УДК:518:535.2

Джаманкызов Н.К.

Институт физико-технических проблем и материаловедения
Национальной академии наук Кыргызской Республики,
720071, Кыргызская Республика, Бишкек. пр.Чуй, 265-а

АМПЛИТУДНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ ВОЛН В ПЛАНАРНОМ ВОЛНОВОДЕ

Выведены детерминантные уравнения и формулы для амплитудных коэффициентов направленных поперечных волн в планарном волноводе для случая движения сердцевины и оболочки в волноводе с произвольными скоростями.

В настоящее время является актуальными исследования по созданию датчиков ориентации или вращения, основанных на электродинамических принципах.

Математически влияние движения волновода или его составляющих на скорость волны в нем может быть исследовано при совместном рассмотрении уравнений Максвелла и Минковского, которые приводят к волновым уравнениям [1]. На их основе представлены выражения для полей внутри и вне области волновода и выведены детерминантные уравнения для планарного и цилиндрического волноводов [1, 2].

Решение волновой задачи о распространении направленных волн получены с точностью до произвольных комплексных множителей (амплитудных коэффициентов) перед выражениями для полей каждой моды. В то же время такое представление в практически встречающихся задачах недостаточно и необходимо пронормировать амплитудные коэффициенты на заданную мощность, переносимую волной данной моды.

Этому вопросу и посвящена настоящая статья.

Волновые уравнения

В итоге совместного решения уравнений Максвелла и материальных уравнений Минковского получается система уравнений для направленных гармонических волн, которые в гауссовой системе единиц имеет вид:

$$\begin{cases} \nabla_T^2 E_Z + P_e^2 E_Z = 0, \\ \nabla_T^2 H_Z + P_h^2 H_Z = 0, \\ \vec{H}_T = -\dfrac{ik\varepsilon}{P_e^2}\left[\vec{Z}, \vec{\nabla}_T E_Z\right] - ik\dfrac{\beta - b}{aP_h^2}\left(\vec{\nabla}_T H_Z\right), \\ \vec{E}_T = \dfrac{ik\mu}{P_h^2}\left[\vec{Z}, \vec{\nabla}_T H_Z\right] - ik\dfrac{\beta - b}{aP_e^2}\left(\vec{\nabla}_T E_Z\right) \end{cases} \qquad (1)$$

где $P_{h,e}^2 = k^2\left[a\varepsilon\mu - \dfrac{(\beta - b)^2}{a}\right]$ - собственные значения волновых уравнений,

$k = 2\pi/\lambda$ и β - волновое число и постоянное распространение,

ε и μ - диэлектрическая и магнитная проницаемость среды,

$a = \dfrac{1-\mu^2}{1-\varepsilon\mu u^2}$ и $b = \dfrac{(1-\varepsilon\mu)u}{1-\varepsilon\mu u^2}$ - релятивистские коэффициенты второго и первого порядка,

$\vec{Z} = (0,0,1)$ - орт направления волны и скорости среды – *u*.

Когда знаменатель в выражениях для *a* и *b* обращается в нуль, то $a \to \infty$, $b \to \infty$. Эта критическая точка по скорости $u_* = \pm 1 \big/ \sqrt{\varepsilon\mu}$ равна скорости Вавилова – Черенкова.

Безразмерная постоянная распространения β описывает волну, зависящую от времени *t* и координаты *Z* по закону $\exp(i\,\omega t - \beta\, k\, z)$.

В соответствии с геометрией задачи выбирается декартова система координат. Волновод задается двумя плоскостями, уравнения которых– $x = \pm d$, где *d* - полутолщина волновода. Эти плоскости (стенки волновода) разделяют все пространство на две области: область 1, $|x| < d$, образует сердцевину, область 2, $|x| > d$ – оболочку волновода. Ось *o* - *y* нормальна стенкам волновода. Волна распространяется вдоль направления орта $\vec{Z}$.

В технических приложениях оболочка ограничена, кроме отмеченных еще двумя плоскостями $x = \pm(d + \delta)$, где δ – толщина оболочки. Электромагнитное поле направленных волн занимает не только область 1, но и 2, и при этом в области 2 убывает экспоненциально вдоль направления, отсчитываемого по нормам от стенок волновода, а толщина слоя проникновения поля в область 2 по порядку величины есть $\lambda \big/ \sqrt{\varepsilon\mu}$, поэтому практически всегда можно выбрать такое значение δ, когда поле на поверхности $|x| = d + \delta$ пренебрежимо малом. В этом случае волна в волноводе будет распространяться точно так же, когда область 2 целиком заполнена однородным диэлектриком ($\delta \to \infty$). Это и есть модель волновода, которая математически исследуется в данной работе.

В модели пленарного волновода параметры волны не зависят от *y* и

$$\vec{\nabla} = \vec{i}\, d/dx \ ,$$

Волновые уравнения (1) имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 H_Z}{dx^2} + P_h^2 H_Z = 0, \\ H_Z = -\dfrac{ik(\beta - b)}{aP_h^2}\ \dfrac{dH_Z}{dx}, \\ E_y = \dfrac{ik\mu}{P_h^2}\ \dfrac{dH_Z}{dx}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 E_Z}{dx^2} + P_e^2 E_Z = 0, \\ H_y = -\dfrac{ik\varepsilon}{P_e^2}\ \dfrac{dE_Z}{dx}, \\ E_z = \dfrac{ik(\beta - b)}{aP_e^2}\ \dfrac{dE_Z}{dx} \end{cases} \qquad (2)$$

В общем случае волны в волноводе – гибридные, когда все шесть компонентов поля отличны от нуля и находятся из решения системы уравнений (2), а продольные компоненты полей H_Z и E_Z связываются граничными условиями. Однако существуют частные решения, когда:

1) $H_Z = 0$. Это – поперечно-магнитные, или ТМ - волны (Е - волны), или

2) $E_Z = 0$. Это – поперечно-электрические, или ТЕ – волны (Н - волны).

Различают четные и нечетные решения уравнений (2). На вид частных решений (2) в области 2 налагается еще дополнительное условие неизлучения в направлении, нормальном стенкам волновода, что естественно вытекает из определения направленных волн. Этому условию соответствуют функции вида

$$exp(-q_2(|x| < d)),$$

где $q_2 = i\ p_{h,e}$ - новое собственное значение для области 2, использование которого позволяет выразить решение волновой задачи без комплексных величин в конечных выражениях.

Поля поперечных волн

С учетом изложенного, выражения для полей, удовлетворяющих системе уравнений (2) для областей 1 и 2, чет – и нечетных мод, могут быть представлены в следующих видах.

ТЕ – четные моды

$|x| < d$:

$$\begin{cases} H_Z = -A_e \dfrac{ip}{\mu_1}\sin(kpx), \\ H_x = A_e \dfrac{\beta - b_1}{a_1\mu_1}\cos(kpx), \\ E_y = A_e\cos(kpx) \end{cases} \qquad \begin{cases} H_Z = -A_e \dfrac{\mathrm{iq}}{\mu_2}\cos(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ H_x = -A_e \dfrac{\beta - \mathrm{b}_2}{a_2\mu_2}\cos(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ E_y = A_e\cos(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})} \end{cases} \qquad (4)$$

ТЕ – нечетные моды

$$\begin{cases} H_Z = A_o \dfrac{ip}{\mu_1} cos(kpx), \\ H_x = -A_o \dfrac{\beta - b_1}{a_1\mu_1}\sin(kpx), \\ E_y = A_o\sin(kpx) \end{cases} \qquad \begin{cases} H_Z = -A_o \dfrac{\mathrm{iq}}{\mu_2}\sin(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ H_x = -A_o \dfrac{\beta - \mathrm{b}_2}{a_2\mu_2}\sin(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ E_y = A_o\sin(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})} \end{cases} \qquad (5)$$

ТМ – четные моды

$$\begin{cases} E_Z = B_e \dfrac{ip}{\varepsilon_1}\sin(kpx), \\ E_x = B_e \dfrac{\beta - b_1}{a_1\varepsilon_1}\cos(kpx), \\ H_y = B_e\cos(kpx) \end{cases} \qquad \begin{cases} E_Z = B_e \dfrac{\mathrm{iq}}{\varepsilon_2}\cos(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ E_x = B_e \dfrac{\beta - \mathrm{b}_2}{a_2\varepsilon_2}\cos(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ H_y = B_e\cos(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})} \end{cases} \qquad (6)$$

ТМ – нечетные моды

$$\begin{cases} E_Z = -B_o \dfrac{ip}{\varepsilon_1}\cos(kpx), \\ E_x = B_o \dfrac{\beta - b_1}{a_1\varepsilon_1}\sin(kpx), \\ H_y = B_o\sin(kpx) \end{cases} \qquad \begin{cases} E_Z = B_o \dfrac{\mathrm{iq}}{\varepsilon_2}\sin(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ E_x = B_o \dfrac{\beta - \mathrm{b}_2}{a_2\varepsilon_2}\sin(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})}, \\ H_y = B_o\sin(kdp)e^{-k\mathrm{q}(|\mathrm{x}|-\mathrm{d})} \end{cases} \qquad (7)$$

где $p = \sqrt{a_1\varepsilon_1\mu_1 - (\beta - b_1)^2 / a_1}$, $\quad \mathrm{q} = \sqrt{(\beta - b_1)^2 / a_2 - a_2\varepsilon_2\mu_2}$, (8)

При расчетах величин (8), когда скорости u_1 или u_2 совпадают со скоростью Вавилова – Черенкова, то в релятивистских коэффициентах a_2, b_2 возникает особенности. В свою очередь это приводит к особенностям вида

∞ -∞ в выражениях для p и q, которые раскрываются, что позволяет вести расчеты при любых скоростях $|u_{1,2}| < 1$. В результате имеем следующие выражения для p^2 и q^2, удобные в численных расчетах:

$$\mathrm{p}^2=\frac{1}{1-u_1^2}\left[\varepsilon_1\mu_1(\beta u_1-1)^2-(u_1-\beta)^2\right];$$
$$\mathrm{q}^2=\frac{1}{1-u_2^2}\left[(u_2-\beta)^2-\varepsilon_2\mu_2(\beta u_2-1)^2\right]. \qquad (9)$$

В выражениях (4) - (9) индексы относятся 1 и 2, нижние индексы «e» - для четных («even») и «o» - для нечетных («odd») мод соответственно.

Детерминантные уравнения

Как видно, каждая из мод содержит по шесть компонентов полей, из них четыре компонента являются тангенциальными (y -и Z - компоненты).

Используем граничные условия электродинамики, которые для тангенциально движущихся сред имеют такой же вид, как и для покоящихся сред.

На границе раздела сред 1 и 2 при x=d получим четыре уравнения относительно четырех неизвестных амплитудных коэффициентов:

$$-A_e\frac{ip}{\mu_1}\sin(kpd)=-A_e\frac{\mathrm{iq}}{\mu_2}\cos(kdp); \qquad (10)$$

$$A_o\frac{ip}{\mu_1}\cos(kpd)=-A_o\frac{\mathrm{iq}}{\mu_2}\sin(kdp); \qquad (11)$$

$$-B_e\frac{ip}{\varepsilon_1}\sin(kpd)=B_e\frac{\mathrm{iq}}{\varepsilon_2}\cos(kdp); \qquad (12)$$

$$B_o\frac{ip}{\varepsilon_1}\cos(kpd)=-B_o\frac{\mathrm{iq}}{\varepsilon_2}\sin(kdp); \qquad (13)$$

При записи граничных уравнений в (10) – (13) фактически использовались лишь z – компоненты, так формулы для y – компонент приводят к тождествам.

Хотя уравнения (10) – (13) разделяются на четыре независимых уравнения, их можно записать формально в виде произведения матрицы 4×4 на вектор – столбец, компонентами которого являются амплитудные коэффициенты. Введем обозначения:

$$e_e=\frac{p}{\mu_1}\sin(kpd)-\frac{\mathrm{q}}{\mu_2}\cos(kdp), \qquad e_o=\frac{p}{\mu_1}\cos(kpd)+\frac{\mathrm{q}}{\mu_2}\sin(kpd),$$
$$h_e=\frac{p}{\varepsilon_1}\sin(kpd)-\frac{\mathrm{q}}{\varepsilon_2}\cos(kdp), \qquad h_o=\frac{p}{\varepsilon_1}\cos(kpd)+\frac{\mathrm{q}}{\varepsilon_2}\sin(kpd)$$

В этих обозначениях детерминантное уравнение можно записать:

$$\begin{bmatrix} e_e & o & o & o \\ o & e_o & o & o \\ o & o & h_e & o \\ o & o & o & h_o \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_e \\ A_o \\ B_e \\ B_o \end{bmatrix}=0. \qquad (14)$$

Выписанная система линейных уравнений является однородной, причем для нетривиального решения вектор – столбец не равен нулю. Отсюда, приравняв к нулю определитель системы, получим детерминантное уравнение, справедливое в общем случае для гибридных волн:

$$e_e*e_o*h_e*h_o=0. \qquad (15)$$

Входящие в (10) – (15) величины p и q определены:

для TE – мод: $\mathrm{p}=\mathrm{p_e}/\mathrm{k}$, $q=\mathrm{ip_e}/\mathrm{k}$,

для TM – мод: $\mathrm{p}=\mathrm{p_h}/\mathrm{k}$, $q=\mathrm{ip_h}/\mathrm{k}$.

Поэтому, хотя в выражениях для p и q постоянная β входит формально одинаково, она будет различной для разных мод.

Частными решениями уравнения (15) будут такие, когда один и только один из четырех сомножителей равен нулю. Например, если $e_e=0$, а функции e_o, h_e, h_o не равны нулю, то получим частный случай детерминантного уравнения для TE – четных мод.

Поочередное приравнение к нулю сомножителей в левой части уравнения (15) приводит к следующим детерминантным уравнениям для четырех мод планарного волновода:

TE – чет: $$tg(kdp)=\frac{\mu_1 q}{\mu_2 p}; \qquad (16)$$

TE – нечет: $$tg(kdp)=\frac{\mu_2 q}{\mu_1 q}; \qquad (17)$$

TM – чет: $$tg(kdp)=\frac{\varepsilon_1 q}{\varepsilon_2 p}; \qquad (18)$$

TM – нечет: $$tg(kdp)=\frac{\varepsilon_2 p}{\varepsilon_1 q}. \qquad (19)$$

Расчеты постоянной распространения β в зависимости от kd при различных скоростях движения сред 1 и 2 приведены, в частности, в работах [1, 3].

Нормировка амплитуд

Поток энергии электромагнитного поля направленной волны определяется проекцией вектора Пойтинга $\vec{P}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E}\vec{H}^*\right]$ на орт $\vec{Z}$, то есть Z – компонентной P_Z. Для всех мод справедливо соотношение:

$$P_Z=\frac{c}{4\pi}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{z}\\ E_x & E_y & E_z\\ H_x^* & H_y^* & H_z^*\end{vmatrix}=\frac{c}{4\pi}(E_xH_y^*-E_yH_x^*). \qquad (20)$$

Чтобы найти полную энергию, переносимую волной, необходимо проинтегрировать P_z по всей плоскости S, нормальной оси волновода:

$$W=\iint_s P_z ds$$

В плоскопараллельном волноводе зависимость от координаты y – отсутствует и двукратный интеграл по поверхности сводится к однократному по переменной x. При этом вычисленный интеграл будет описывать поток энергии, отнесенной к единичной ширине волновода.

TE – четные моды

Для TE – четных мод, как следует из (4), $E_x=0$, поэтому

$$P_Z=\frac{c}{4\pi}E_yH_x^*.$$

Подставляя E_y и H_x^* их выражения из (4) для областей 1 и 2 в интеграл

$$W=-\frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E_yH_x^*dx \qquad (21)$$

и используя симметрию задачи относительно оси o-z, интеграл (21) разбивается на два интеграла по области 1 и области 2:

$$-\frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}=-\frac{c}{2\pi}\left(\int\limits_{0}^{d}+\int\limits_{d}^{\infty}\right). \qquad (22)$$

Для этой области 1 имеем:

$$-\frac{c}{2\pi}E_y H_x^* = \frac{c}{2\pi}\frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}E_y E_y^* = \frac{c}{2\pi}A_e A_e^* \frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}\cos^2(\kappa\rho x),$$

$$\int\limits_0^d \cos^2(\kappa\rho x)dx = \left[2\kappa d\rho+\sin(2\kappa d\rho)\right]/(4\kappa\rho). \qquad (23)$$

В правой части (23) тригонометрический член $\sin(2\kappa d\rho)$ можно исключить, используя правую часть детерминантного уравнения (16). Поэтому

$$\int\limits_0^d \cos^2(\kappa\rho x)dx = \frac{1}{2\kappa\rho}\left(\kappa d\rho+\frac{\mu_1\mu_2 q\rho}{\mu_2^2\rho^2+\mu_1^2 q^2}\right). \qquad (24)$$

Интеграл для области 2. Здесь

$$-\frac{c}{2\pi}E_y H_x^* = \frac{c}{2\pi}\frac{\beta-b_2}{a_2\mu_2}E_y E_y^* = \frac{c}{2\pi}A_e A_e^* \frac{\beta-b_2}{a_2\mu_2}\cos^2(\kappa d\rho)e^{-2\kappa q(x-d)},$$

$$\int\limits_d^\infty e^{-2\kappa q(x-d)}dx = \frac{1}{2kq}. \qquad (25)$$

Объединяя интегралы (24) и (25) с учетом множителей перед ними, получим выражение для потока энергии, переносимой волной ТЕ – четной моды:

$$W=|A_e|^2\frac{c}{4\pi\kappa}\left\{\kappa q\frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}+\frac{\mu_2}{\mu_2^2\rho^2+\mu_1^2q^2}\left[\frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}q^2+\frac{\beta-b_2}{a_2\mu_2}\rho^2\right]\right\} \qquad (26)$$

Из этого выражения получим для амплитудного коэффициента:

$$|A_e|=2\sqrt{\frac{W\pi\kappa}{c}}\left\{\kappa d\frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}+\frac{\mu_2}{\mu_2^2\rho^2+\mu_1^2q^2}\left[\frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}q^2+\frac{\beta-b_2}{a_2\mu_2}\rho^2\right]\right\}^{-1/2}. \qquad (27)$$

В частном случае немагнитных сред $(\mu_1=\mu_2=1)$ и покоящегося волновода $(a_1=a_2=1,\quad b_1=b_2=0)$ формулы (26) и (27) можно привести к следующему виду:

$$W=|A_{eo}|^2\frac{c\beta_0}{4\pi\kappa}\left(d+\frac{1}{q_0}\right), \qquad (28)$$

$$|A_e|=2\left[\frac{W\pi\kappa}{c\beta_0(d+1/q_0)}\right]^{-1/2}. \qquad (29)$$

Формула (29) совпадает при переходе к системе единиц СГС с формулой для неподвижного волновода в работе [4].

ТЕ – нечетные моды

Для ТЕ – нечетных мод в области 1 и 2:

$$-\frac{c}{2\pi}E_x H_x^* = \frac{c}{2\pi}\frac{\beta-b_2}{a_1\mu_1}E_y E_y^* = \frac{c}{2\pi}A_o A_o^* \frac{\beta-b_1}{a_1\mu_1}\sin^2(\kappa px),$$

$$-\frac{c}{2\pi}E_x H_x^* = \frac{c}{2\pi}\frac{\beta-b_2}{a_2\mu_2}E_y E_y^* = \frac{c}{2\pi}A_o A_o^* \frac{\beta-b_2}{a_2\mu_2}\sin^2(\kappa d\rho)e^{-2\kappa q(x-d)}$$

Повторяя вычисления, аналогичные для четных мод, получим формулы для переносимой волной энергии и амплитудного коэффициента A_o в точности совпадающие с формулами (26), (27). Но надо иметь в виду, что хотя как четных, так и нечетных ТЕ –

мод формально выражения для переносимой волной энергии и амплитудного коэффициента имеют одинаковый вид, тем не менее входящие в них величины β, p, q вычисляются из разных детерминантных уравнений.

ТМ – четные моды

В данном случае в (2) E_y=0, поэтому в области 1 необходимо вычислить интеграл от функции

$$\frac{c}{2\pi}E_x H_y^* = \frac{c}{2\pi}\frac{\beta-b_1}{a_1\varepsilon_1}H_y H_y^* = \frac{c}{2\pi}B_e B_e^*\frac{\beta-b_1}{a_1\varepsilon_1}\cos^2(\kappa px),$$

а в области 2 – от функции

$$\frac{c}{2\pi}E_x H_y^* = \frac{c}{2\pi}\frac{\beta-b_2}{a_2\varepsilon_2}H_y H_y^* = \frac{c}{2\pi}B_e B_e^*\frac{\beta-b_2}{a_2\varepsilon_2}\cos^2(\kappa d\rho)e^{-2\kappa q(x-d)}.$$

Сравнивая правые части интегрируемой функции для ТМ – четных мод с соответствующими функциями для ТЕ – четных мод, можно заметить, что отличие заключается лишь в замене обозначений амплитудных коэффициентов и проницаемостей. Поэтому имеются все основания переписать формулы (26) и (27), заменив:

$$A_e = B_e,\ \mu_1 = \varepsilon_1,\ \mu_2 = \varepsilon_2$$

Итак, для поперечно-магнитных четных волн формулы для потока энергии направленной волны и амплитудного коэффициента имеем:

$$W = |B_e|^2\frac{c}{4\pi\kappa}\left\{\kappa d\frac{\beta-b_1}{a_1\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2\rho^2+\varepsilon_1^2 q^2}\left[\frac{\beta-b_1}{a_1\varepsilon_1}q^2 + \frac{\beta-b_2}{a_2\varepsilon_2}\rho^2\right]\right\}; \quad (30)$$

$$|B_e| = 2\sqrt{\frac{W\pi\kappa}{c}}\left\{\kappa d\frac{\beta-b_1}{a_1\varepsilon_1} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2^2\rho^2+\varepsilon_1^2 q^2}\left[\frac{\beta-b_1}{a_1\varepsilon_1}q^2 + \frac{\beta-b_2}{a_2\varepsilon_2}\rho^2\right]\right\}^{-1/2}. \quad (31)$$

В этих формулах, напомним, β, p и q находятся из решения детерминантного уравнения для ТМ – четных мод.

ТМ – нечетные моды

Для ТМ – нечетных мод дело обстоит точно так же, как и как для ТЕ – нечетных мод. А именно: для ТМ – нечетных мод справедливы формулы (30) и (31), если параметры β, p и q определены из решения детерминантного уравнения для ТМ – нечетных мод.

Отсечки и критические параметры

Как известно, направленные волны могут распространяться лишь при определенных геометрических параметрах волновода.

Условия отсечки для четных мод получаются из условия, чтобы q / p и $tg(kdp)$ одновременно обращались в нуль. Отсюда

$$q_c=0,$$
$$(kd)_c P_c=\nu\pi,\ (\nu=0,1,2\ldots), \quad (33)$$

где нижним индексом «с» отмечены критические величины.

Для нечетных мод условие отсечки – это одновременное обращение в бесконечность величины p/q и $tg(kdp)$:

$$\begin{cases} q_c = 0 \\ (kd)_c p_c = \dfrac{\pi}{2} + \nu\pi, \quad (\nu = 0,1,2...). \end{cases} \quad (34)$$

Из системы (33) или (34) из первого уравнения можно найти положительное значение β_c и после его подстановки в P_c выразить $(kd)_c$ из второго уравнения, т.к. q_c зависит от параметров среды 2, а P_c – среды 1, то критическое значение волнового параметра $(kd)_c$ будет сложным образом зависеть от шести параметров.

Из (33) следует, что при $\nu=0$, $(kd)_c=0$, в то время как система (34) не имеет нулевого решения для $(kd)_c$. Это значит, что существует единственная низшая мода для четных волн, которая может распространяться по сколь угодно тонкому волноводу, или, что то же самое, по волноводу фиксированной толщины могут распространятся четные волны со сколь угодно низкой частотой колебаний. Все остальные моды имеют частоты отсечки, не равные нулю. Эти свойство используется для создания одновременного волновода. Диапазон возможных изменений β для четных мод определяется от значения $p=0$ до значения $q=0$. Поэтому

$$\alpha_2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}+b_2 \le \beta \le \alpha_1\cdot\sqrt{\varepsilon_1\mu_1}+b_1. \quad (35)$$

Действительные решения для нечетных мод определяются, кроме (35), еще и областью $\beta>\beta_c$, где β_c находится из решения системы (33) или (34) при заданном kd и номера моды ν.

Заключение

Полученные результаты показывают, что амплитудные коэффициенты при заданной мощности, переносимой волной определенной моды, сложным образом зависят не только от геометрии (kd), диэлектрических характеристик сердцевины (ε_1, μ_1) и оболочки (ε_2, μ_2) волновода, но скоростей движения сред u_1 и u_2.

Выведенные формулы в частном случае неподвижного волновода совпадают с ранее известными результатами.

Выявлена примечательная электродинамическая симметрия формул в гауссовой системе единиц для амплитудных коэффициентов между TE - и TM - модами.

При расчетах амплитудных коэффициентов необходимо учитывать области определения и критических параметров волны и волновода.

Автор благодарен Ф.Х. Байбулатову за интерес к работе и критические замечания.

Литература

1. Байбулатов Ф.Х. Распространение электромагнитных волн в движущемся волноводе. //Оптика и спектроскопия. 1985, т.58, вып.6, с.1309-1313.

2. Байбулатов Ф.Х. Распространение электромагнитных волн в движущемся цилиндрическом волноводе. //Оптика и спектроскопия 1989, т.67, вып.2, с.383-388.

3. Байбулатов Ф.Х., Панков П.С., Кененбаева Г.М., Кабирова А.Ф. Численное доказательства эффекта расщепления мод в цилиндрическом волноводе в области Черенковских скоростей движения. //Известия АН Кирг. ССР, 1990, физмат. науки №1, с.3-6.

4. Маркузе Д. Оптические волноводы //М., Мир, 1974.