**К.ТЫНЫСТАНОВ атындагы ЫСЫК-КӨЛ
МАМЛЕКЕТТИК УНИВЕРСИТЕТИ**

Колдонмо математика кафедрасы

М.У.Мурзакматов, Байболотов Б.А.

СЫЗЫКТУУ ПРОГРАММАЛОО МАСЕЛЕЛЕРИНИН ТҮГӨЙЛӨШТҮК КАСИЕТИ

«Колдонмо математика жана информатика» адистигинин студенттери үчүн методикалык колдонмо

КАРАКОЛ 2010

УДК 519.8
ББК 22.18
М 91

ЫМУнун Окуу-методикалык бирикмеси (19.11.2009-ж. №3 токтому), Окумуштуулар кеңеши (24.12.2009-ж. №4 токтому) тарабынан басмага сунуш кылынды.

Рецензент: физ.-мат. илим. доктору, профессор У. М. Туганбаев.

Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А.

М 91 Сызыктуу программалоо маселелеринин түгөйлөштүк касиети /К.Тыныстанов атын. ЫМУ. – Каракол: 2010. – 27 б.

ISBN 978 – 9967 – 431 – 69 – 0

Усулдук колдонмодо сызыктуу программалоо маселелеринин түгөйлөштүк касиети каралган. Бул колдонмо биринчи иретте студенттердин методду өз алдынча өздөштүрүүлөрүнө жана практикалык маселелерди чыгарууда аларга жардам көрсөтүүгө арналат.

М 1602110000 – 09
ISBN 978 – 9967 – 431 – 69 – 0

УДК 519.8
ББК 22.18

§1. Сызыктуу программалоонун жалпы маселеси

Сызыктуу программалоо – белгисиздерине сызыктуу чектөөлөр коюлган сызыктуу функциянын эң чоң жана эң кичине маанилерин изилдөөнүн жана табуунун методдору жөнүндөгү илим. Демек сызыктуу программалоо маселелери шарттуу экстремум маселелерине кирет, бирок аларга математикалык анализдин методдорун колдонуу ыңгайсыз, себеби сызыктуу функциянын экстремумдары чектөөлөр менен түзүлгөн областтын ички чекиттеринде эмес, областтын чегинде жайланышат. Бирок чек арадагы чекиттерди изилдөөгө мүмкүн эмес, себеби ал чекиттерде сызыктуу функциянын айрым туундулары турактуу. Ошондуктан сызыктуу программалоо маселелерин чыгаруу үчүн атайын методдор түзүлгөн.

Сызыктуу программалоонун *жалпы маселеси* төмөнкүдөй коюлат.

$$Z = c_1x_1 + c_2\, x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

сызыктуу функциясы жана

$$\begin{aligned} &a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k_1, \\ &a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \le b_j, \quad j = k_1 + 1, \ldots, k_2, \\ &a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \ldots + a_{ln}x_n = b_l, \quad l = k_2 + 1,\ \ldots,\ k_3, \\ &x_1,\ x_2, \ldots\, x_n \ge 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

сызыктуу чектөөлөрдүн системасы берилген, мындагы $a_{ij},\ b_i,\ c_j$ – берилген турактуу сандар.

(2) чектөөлөр системасын канагаттандыруучу жана (1) сызыктуу функцияга минимум берүүчү $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ өзгөрмөлөрүнүн терс эмес маанилерин табуу талап кылынат. (1) функция *максат функциясы* деп аталат.

(2) чектөөлөрдөгү барабарсыздыктарды барабардыктар түрүндө жазууга болот. Мисалы,

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n \le\ b_j$$

барабарсыздыгынын сол жагына терс эмес *кошумча* x_{n+1} өзгөрмөсун кошуп,

$$a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n + x_{n+1} = b_j$$

барабардыгын алабыз. Эгерде чектөө

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i$$

түрдөгү барабарсыздык болсо, анда кошумча x_{n+1} өзгөрмөсүн кемитебиз:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_{n+1} = b_i\,.$$

Ошентип, сызыктуу программалоо маселесин

$$Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to min, \qquad (3)$$

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\
&\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\
&x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \ge 0
\end{aligned} \tag{4}$$

түрдө жаза алабыз. (3) түрдөгү маселе сызыктуу программалоонун *канондук маселеси* деп аталат.

(3) чектөөлөр системасынын оң жактарын терс эмес деп эсептейбиз: $b_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, m.$ Эгерде алардын арасында терстери болсо, анда ал теңдемелерди –1 ге көбөйтүп коюуга болот.

(3) маселени *вектордук формада* жазууга болот:

$$\begin{gathered}
Z = CX \to min, \\
A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n = A_0,
\end{gathered} \tag{5}$$

мында $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n), X = (x_1, x_2, \ldots, x_n);$ CX – скалярдык көбөйтүндү;

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \quad \ldots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

(3) – (4) маселенин *матрицалык формасы*

$$\begin{gathered}
Z = CX \to min, \\
AX = A_0,\ X \ge 0
\end{gathered} \tag{6}$$

түрдө жазылат, мында

$$A = (a_{ij}),\ \ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m;\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;\quad X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^{T}.$$

1 – аныктама. (6) шарттарды канагаттандыруучу $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектору сызыктуу программалоонун *мүмкүн болуучу чыгарылышы же планы* деп аталат.

2 – аныктама. Эгерде (5) формуладагы A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес болсо, анда $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектору *таяныч планы* деп аталат.

A_i векторлору m – өлчөмдүү болгондуктан, анын оң компоненталары–нын саны m ден ашпайт.

3 – аныктама. Эгерде таяныч планынын оң компоненталарынын саны туура m болсо, анда ал план *кубулма эмес* деп аталат, андай болбосо *кубулма* план деп аталат.

4 – аныктама. Максат функциясына эң кичине (эң чоң) маани берүүчү план сызыктуу программалоонун *оптималдык планы* же *оптималдык чыгарылышы* деп аталат.

Мындан ары биз максат функциясын минималдоо маселелерин карайбыз. Эгерде максат функциясын максималдоо керек болсо, анда анын белгисин карама-каршыга өзгөртүп, жаңы функциянын минимумун табуу жетиштүү.

Сызыктуу программалоо маселелеринин чыгаруунун негизги методу болуп *симплекс-метод* эсептелет.

§2. Таяныч пландарын түзүү

Сызыктуу программалоонун (1.3), (1.4), конондук маселеси берилсин. (1.4) системанын оң жактары $b_i \geq 0, \quad i = 1,\ 2,\ ...,\ m$ деп эсептейбиз.

Адегенде маселенин чектөөлөрүнүн системасында m бирдик векторлор бар деп эсептейбиз. Жалпылыкты чектебестен эле биринчи m векторлор бирдик векторлор болсун дейли. Анда (1.3), (1.4) маселе мындай жазылат:

$$Z = c_1\ x_1 + c_2 x_2 + ... + c_n x_n \to min; \qquad (1)$$

$$\begin{aligned}
x_1 \qquad\quad &+ a_{1,\,m+1}x_{m+1} + ... + a_{1n}x_n = b_1,\\
x_2 \quad\ &+ a_{2,\,m+1}x_{m+1} + ... + a_{2n}x_n = b_2,\\
&..\\
x_m &+ a_{m,\,m+1}x_{m+1} + ... + a_{mn}x_n = b_m,
\end{aligned} \qquad (2)$$

$$x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n \geq 0. \qquad (3)$$

(2) системаны вектордук формада жазабыз:

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m + x_{m+1} A_{m+1} + ... + x_n A_n = A_0, \qquad (4)$$

мында

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\quad ...,\ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},\ A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,\ m+1} \\ a_{2,\ m+1} \\ \vdots \\ a_{m,\ m+1} \end{pmatrix}, \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\quad A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m - m$ – өлчөмдүү мейкиндиктин сызыктуу көз каранды эмес бирдик векторлору. Алар бул мейкиндиктин базиси болуп саналат. Ошондуктан (4) барабардыкта $x_1, x_2, ..., x_m$ өзгөрмөлөрүн базистик белгисиздер деп эсептеп, калган $x_{m+1}, ..., x_n$ эркин белгисиздерди нөлгө барабарлайбыз, жана $b_i \geq 0 \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ m)$, ал эми $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ – бирдик векторлор экендигин эске алуу менен баштапкы планды алабыз:

$$X_0 = (\,x_1 = b_1,\quad x_2 = b_2,\ ...,\ x_m = b_m,\ x_{m+1} = 0,\ ...,\ x_n = 0\,). \qquad (5)$$

Бул планга

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + ... + x_m A_m = A_0 \qquad (6)$$

ажыроосу туура келет, мындагы $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ векторлору сызыктуу көз каранды эмес, ошондуктан (5) баштапкы план таяныч планы болот.

Эми (5) баштапкы таяныч планынын жардамы менен экинчи таяныч планын түзөбүз. $A_1, A_2, ..., A_m$ векторлору базистик векторлор болгондуктан (4) барабардыктагы ар бир векторду жалгыз гана жол менен

$$A_j = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} A_i, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

түрдө ажыратып жаза алабыз. Базиске кирбеген кандайдыр бир вектор, мисалы A_{m+1} вектору үчүн анын

$$x_{1,\,m+1}A_1 + x_{2,\,m+1}A_2 + \ldots + x_{m,\,m+1}A_m = A_{m+1} \qquad (7)$$

ажыралуусундагы эң жок дегенде бир $x_{i,\,m+1}$ коэффициенти оң болсун дейли. Кандайдыр бир (азырынча белгисиз) $\theta > 0$ чоңдугун алып, (7) барабардыктын эки жагын тең θ га көбөйтөбүз жана алынган барабардыкты (6) барабардыктан мүчөлөп кемитебиз:

$$(x_1 - \theta\, x_{1,\,m+1})A_1 + (x_2 - \theta\, x_{2,\,m+1})A_2 + \ldots + (x_m - \theta\, x_{m,\,m+1})A_m + \theta A_{m+1} = A_0 . \qquad (8)$$

Демек, эгерде

$$X_1 = (x_1 - \theta\, x_{1,m+1},\ x_2 - \theta\, x_{2,m+1},\ \ldots,\ x_m - \theta\, x_{m,m+1},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

векторунун компоненталары терс эмес болсо, ал план боло алат.

$\theta > 0$ болгондуктан X_1 векторунун $x_{i,\,m+1} \le 0$ белгисиздерин камтыган бардык компоненталары терс эмес. Ошондуктан $x_{i,\,m+1} > 0$ белгисиздерин камтыган гана компоненталарды кароо керек, б.а бардык $x_{i,\,m+1} > 0$ белгисиздери үчүн

$$x_i - \theta\, x_{i,\,m+1} \ge 0 \qquad (9)$$

болгондой кылып $\theta > 0$ чоңдугун аныктоо зарыл.

(9) барабарсыздыктан $\theta \le x_i / x_{i,\,m+1}$ экендиги келип чыгат, демек

$$0 < \theta \le \min_i \frac{x_i}{x_{i,\,m+1}} \qquad (10)$$

шартын канагаттандыруучу каалагандай θ үчүн X_1 вектору маселенин планы болот, мында минимум $x_{i,\,m+1} > 0$ болгудай i индекстери боюнча алынат.

Таяныч планында $m+1$ оң компоненталар болушу мүмкүн эмес, ошондуктан X_1 векторунун эң жок дегенде бир компонентасын нөлгө айландыруу керек. (10) формулада

$$\theta = \theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,m+1}} \qquad (11)$$

деп алсак, анда ушул минимумду камтыган X_1 дин компонентасы нөлгө айланат. Ушундай компонента биринчи орунда турат дейли, б.а.

$$\theta_0 = \min_i \frac{x_i}{x_{i,\,m+1}} = \frac{x_1}{x_{1,\,m+1}}$$

болсун. θ_0 дүн бул маанисин (8) ге коебуз:

$$\left(x_1 - \frac{x_i}{x_{1,m+1}} x_{1,m+1} \right) A_1 + \left(x_2 - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{2,m+1} \right) A_2 + ... + \left(x_m - \frac{x_1}{x_{1,m+1}} x_{m,m+1} \right) A_m + \frac{x_1}{x_{1,m+1}} A_{m+1} = A_0$$

жана

$$x'_2 A_2 + x'_3 A_3 + ... + x'_m A_m + x'_{m+1} A_{m+1} = A_0$$

ажыроосун алабыз, ага жаңы

$$X_1 = (0,\ x'_2,\ x'_3,\ ...,\ x'_m,\ x'_{m+1},\ 0,\ ...,\ 0)$$

таяныч планы ылайык келет, мында

$$x'_i = x_i - \theta_0 x_{i,m+1} \quad (i = 2, 3, \ldots, m), \qquad x'_{m+1} = \theta_0.$$

θ_0 дүн жардамы менен базистен бир векторду чыгарып, анын ордуна башка векторду киргизүү бир базистен экинчи базиске өткөнгө барабар, ошондуктан $A_2, A_3, ..., A_m, A_{m+1}$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды эмес жана ал жаңы базис болуп эсептелет.

Кийинки таяныч планын табуу үчүн жаңы базиске кирбеген каалаган векторду бул базис боюнча ажыратып, базистин бир векторун нөлгө айландыргандай кылып $\theta_0 > 0$ чондугун табуу керек.

Ошентип, жаңы таяныч пландарын түзүү процесси базистен чыгарылуучу векторду жана анын ордуна киргизилүүчү векторду тандоодон турат. Базиске киргизилүүчү векторду аныктоонун критерийи симплекс- методдун негизги элементтеринин бири болуп саналат. Эгерде A_{m+1} векторун базиске киргизиш керек болсо, бирок анын (7) ажыралышындагы бардык компоненталар $x_{i,m+1} \le 0$, болсо анда (8) ажыроодогу бир векторду четтете турган $\theta > 0$ чондугун табууга мүмкүн эмес. Бул учурда X_1 планында $m+1$ оң компонента болот, ал эми $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m,\ A_{m+1}$ векторлор системасы сызыктуу көз каранды жана чыгарылыштардын көп грандыгынын чокусун эмес, ички чекитин аныктайт, ал чекитте максат функциясы экстремумга жетишпейт.

Демек, эгерде маселенин чектөөлөр системасында бирдик базис болсо жана бош мүчөлөр терс эмес болсо, анда кошумча эсептөөлөрсүз эле баштапкы таяныч планын, ошондой эле векторлордун базис боюнча ажыралуусунун коэффициенттерин алууга болот.

1-мисал. $Z = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 + x_6 \to min;$

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad &+ 2x_4 - 3x_5 - 2x_6 = 5, \\ x_2 \quad &+ 3x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 6, \\ x_3 &- 4x_4 - x_5 + 2x_6 = 3, \\ &x_1,\ x_2,\ ...,\ x_6 \ge 0 \end{aligned}$$

маселесинин таяныч пландарын табабыз.

Чыгаруу. Чектөөлөр системасын вектордук формада жазабыз:

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 + A_6 x_6 = A_0.$$

Базис үчүн A_1, A_2, A_3 векторлор системасын алабыз, себеби алар сызыктуу көз каранды эмес бирдик векторлор. Базистик өзгөрмөлөр – x_1, x_2, x_3, Калган өзгөрмөлөрдү нөлгө барабарлап : $x_4 = x_5 = x_6 = 0$, баштапкы планды алабыз:

$$X_0 = (x_1 = 5,\ x_2 = 6,\ x_3 = 3,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0).$$

Бул планга

$$5A_1 + 6A_2 + 3A_3 = A_0 \tag{12}$$

ажыроосу туура келет. Кийинки таяныч планына өтүү үчүн базиске кирбеген, эң жок дегенде бир оң компонентасы бар векторду, мисалы A_4 векторун алабыз жана аны базис боюнча ажыратабыз. Базис бирдик болгондуктан A_4 векторунун ажыралуусунун коэффициенттери болуп ал вектордун компоненталары кызмат кылат, б.а

$$2A_1 + 3A_2 - 4A_3 = A_4. \tag{13}$$

Бул ажыралууда эки оң коэффициент бар. (13) барабардыкты $\theta > 0$ санына көбөйтөбүз жана (12) барабардыктан кемитебиз:

$$(5-2\theta)A_1 + (6-3\theta)A_2 + (3+4\theta)A_3 + \theta A_4 = A_0. \tag{14}$$

(14) ажыроосунан кандайдыр бир векторду четтетүү үчүн

$$\theta = min(5/2,\ \ 6/3) = 2$$

санын табабыз жана бул маанини (14) барабардыкка θ нын ордуна коебуз:

$$A_1 + 11A_3 + 2A_4 = A_0.$$

Бул ажыралууга

$$X_1 = (x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 11,\ x_4 = 2,\ x_5 = 0,\ x_6 = 0)$$

таяныч планы туура келет. Эми A_4 векторунун ордуна A_5 ти алабыз жана анын эски базистеги ажыралуусун жазабыз:

$$-3A_1 - 2A_2 - A_3 = A_5. \tag{15}$$

(15) барабардыкты $\theta > 0$ санына көбөйтөбүз жана (12) ден кемитебиз:

$$(5+3\theta)A_1 + (6+2\theta)A_2 + (3+\theta)A_3 + \theta A_5 = A_0.$$

Бул ажыралыштан бир дагы векторду четтетүүгө мүмкүн эмес (себеби $\theta > 0$). Ага туура келген

$$X_1 = (5+3\theta,\ 6+2\theta,\ 3+\theta,\ \theta,\ 0,\ 0), \qquad \theta > 0$$

вектору таяныч планы боло албайт, себеби анын төрт оң компонентасы бар, ал көп грандыктын ички чекитине туура келет, демек бул чекитте максат фукциясы экстремалдык мааниге ээ болбойт.

§3. Оптималдык планды табуу. Оптималдуулук шарттары

Сызыктуу программалоонун (2.1) – (2.3) маселесинин пландары бар жана анын таяныч пландары кубулма эмес деп божомолдойлу.

Анда таяныч планы үчүн

$$x_1A_1 + x_2A_2 + ... + x_mA_m = A_0, \tag{1}$$

$$x_1\tilde{n}_1 + x_2\tilde{n}_2 + \ldots + x_m\tilde{n}_m = Z(X_0),$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{2}$$

барабардыктарын жаза алабыз.

Каалагандай A_j вектору $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_m$ базиси боюнча жалгыз гана жол менен ажырайт:

$$x_{1j}A_1 + x_{2j}A_2 + \ldots + x_{mj}A_m = A_j, \quad j = 1, 2, \ldots,\ n. \tag{3}$$

Ошондуктан бул ажыралууга максат функциясынын жалгыз гана

$$x_{1j}c_1 + x_{2j}c_2 + \ldots + x_{mj}c_m = z_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4}$$

мааниси туура келет.

Максат функциясынын A_j векторуна туура келген коэффициентин c_j менен белгилейбиз.

1-теорема. Эгерде кандайдыр бир A_j вектору үчүн $z_j - c_j > 0$ шарты аткарылса, анда X_0 планы оптималдуу эмес жана $Z(X) < Z(X_0)$ барабарсыздыгы аткарылгандай X планын түзүүгө болот.

Далилдөө. (3) жана (4) барабардыктарды $\theta > 0$ санына көбөйтөбүз жана тиешелүү түрдө (1) жана (2) барабардыктардан кемитебиз:

$$(x_1 - \theta x_{1j})A_1 + (x_2 - \theta x_{2j})A_2 + \ldots + (x_m - \theta x_{mj})A_m + \theta A_j = A_0,, \tag{5}$$

$$(x_1 - \theta\, x_{1j})c_1 + (x_2 - \theta\, x_{2j})c_2 + \ldots + (x_m - \theta\, x_{mj})c_m + \theta\, c_j = Z(X_0) - \theta(z_j - c_j). \tag{6}$$

(6) барабардыктын эки жагына тең $\theta\, c_j\ \ (j = 1,2,\ldots,n)$ чондугу кошулган. (5) барабардыкта $x_i > 0\ \ (i = 1,2,\ldots,m)$, ошондуктан $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_j$ векторлорунун бардык коэфициенттери терс эмес болгудай кылып $\theta > 0$ санын тандап алууга болот, б.а.

$$X = (x_1 - \theta x_{1j},\ x_2 - \theta x_{2j},\ \ldots,\ x_m - \theta x_{mj},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

жаңы планын алууга болот, ага максат функциясынын

$$Z(X) = Z(X_0) - \theta(z_j - c_j)$$

мааниси туура келет. Теореманын шарты боюнча $z_j - c_j > 0$ жана $\theta > 0$ болгондуктан

$$Z(X) < Z(X_0)$$

Натыйжа. Эгерде кандайдыр бир X_0 планы үчүн бардык $A_j\ \ (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ векторлорунун ушул базис боюнча ажыралышы

$$z_j - c_j \leq \ 0 \tag{8}$$

шартын канагаттандырса, анда X_0 – оптималдуу план.

(8) барабарсыздыктар максат функциясын минималдоо маселесинин *планынын оптималдуулугунун шарты* болуп эсептелет, ал эми $z_j - c_j$ маанилери *пландын баалары* деп аталат.

Демек аталган маселенин планы оптималдуу болушу үчүн анын бааларынын оң эмес болушу зарыл жана жетиштүү.

Максат функциясынын максимумун издөө маселеси үчүн тескерисинче, (8) барабарсыздыктарынын ордуна

$$z_j - c_j \geq 0 \qquad (9)$$

барабарсыздыктары каралат.

§4. Симплекс – методдун алгоритми

§2 де каралган (2.1) – (2.3) маселесин чыгарууну улантабыз. Анын таяныч планы болуп

$$X_0 = (x_1 = b_1,\ x_2 = b_2,\ ...,\ x_m = b_m,\ x_{m+1} = 0,\ ...,\ x_n = 0)$$

вектору, ага тиешелүү базис болуп $A_1, A_2, ..., A_m$ векторлору кызмат кылат. Бул таяныч планын оптималдуулукка изилдөө үчүн (2.2) системанын $A_j \ (j = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ векторлорун $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_m$ базистик векторлору боюнча ажыратып, андан кийин $z_j - c_j$ чамалоолорунун маанилерин эсептөө керек. Базис бирдик болгондуктан A_j векторунун коэффициеттери үчүн анын компоненталарын, б.а.

$x_{ij} = a_{ij} (i = 1,\ 2,\ ...,\ m_i;\ \ j = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ сандарын алуу керек. Мындан аркы эсептөөлөрдү жүргүзүү үчүн маселенин шарттарын жана биринчи таяныч планын аныктагандан кийин алынган маалыматтарды симплекс таблицага жазуу ыңгайлуу (1-табл). C мамычасында максат функциясынын базистик векторлорго тиешелүү коэффициенттерин, A_0 мамычасында $-X_0$ баштапкы таяныч планын жана жыйынтыкта алынган оптималдык планды жазабыз, $A_j \ (j = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ мамычаларында $j-$ вектордун базис боюнча ажыралышын жазабыз, аны мындан ары X_j менен белгилейбиз.

A_0 мамычасынын $(m+1)$ – сабында максат функциясынын $Z(X_0)$ маанисин, ал эми A_j мамычаларында – $z_j - c_j$ маанилерин жазабыз.

$Z(X_0)$ жана $z_j = Z(X_j)$ функцияларын максат функциясына X_0 жана X_j векторлорунун компоненталарын максат функциясына коюп табабыз:

$$Z(X_0) = CX_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i,$$

$$z_j = CX_j = \sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij}, \qquad j = 1,2,\ ...,\ n,$$

мындагы c_i – максат функциясынын коэффициенттери.

1 – таблицаны түзгөндөн кийин анын $(m+1)$ – сабын карайбыз. Эгерде $z_j - c_j \leq 0 \ (j = 1, 2, ..., n)$ болсо, анда X_0 таяныч планы оптималдуу болот жана максат функциясынын минимуму $Z(X_0)$ ке барабар.

Эгерде кандайдыр бир j үчүн $z_j - c_j > 0$ болсо, анда X_0 планы оптималдуу эмес жана бул чамалоого тиешелүү векторду базиске киргизип, башка таяныч планын түзүүгө болот, ал планга максат функциясынын кичирээк мааниси туура келет.

Эгерде оң чамалоолордун саны бирден көп болсо, анда (3.7) барабардыгынын негизинде $max\lfloor\theta_{0j}(z_j - c_j)\rfloor$ маанисине туура келген векторду базиске киргизүү керек, мындагы максимум $z_j - c_j > 0$ шарты аткарылган j индекстери үчүн тандалат, ал эми θ_{0j} саны ар бир j индекси үчүн аныкталат. Мындай тандоо ар бир кадамда чыгарылыштардын көп грандыгынын максат функциянын эң кичине маанисине ылайык келген чокусуна өтүүгө мүмкүнчүлүк берет. Маселени ЭЭМде чыгарганда базиске киргизилүүчү вектор $max(z_j - c_j)$ боюнча тандалат. Эгерде мындай максимумдардын саны бирден көп болсо, анда аларга ылайык келген векторлордун $min\, c_j$ маанисине ылайык келгени базиске киргизилет. Эгерде $z_j - c_j > 0$ маанилеринин бирөө үчүн эле ага тиешелүү вектордун ажыроосунун коэффициенттери x_{ij} оң эмес болсо, анда максат функциясы чыгарылыштардын көп грандыгында чектелген эмес болот.

Эми $max\,\theta_{0j}(z_j - c_j) = \theta_{0k}(z_k - c_k)$ болсун, б.а. бул максималдык маани k – вектор $(m < k \le n)$ үчүн аткарылсын дейли. Анда базиске A_k вектору киргизилет, а $\theta_{0k} = min(x_i / x_{ik}),\ (x_{ik} > 0)$ маанисине ылайык келген вектор базистен чыгарылат.

$\theta_{0k} = min(x_i / x_{ik}) = x_l / x_{lk}$ мааниси l – сапта турган векторго туура келсин, анда A_l вектору базистен чыгарылат. x_{lk} элементи *жетектөөчү элемент*, ал эми ал жайгашкан сап менен мамыча *жетектөөчү сап, жетектөөчү мамыча* деп аталышат. Жаңы таяныч планына $A_1, ..., A_{l-1}, A_k, A_{l+1}, ..., A_m$ векторлорунан турган базис ылайык келет. Жаңы таяныч планын эсептеп, анын оптималдуулугун текшерүү үчүн бардык $A_0, A_j\ (j = 1, 2, ..., n)$ векторлорун базистик векторлор боюнча ажыратуу керек. Баштапкы базис бирдик базис болгон: $(A_1, A_2, ..., A_m) = E$, ошондуктан

$$A_0 = x_1 A_1 + ... + x_l A_l + ... + x_m A_m, \tag{1}$$

$$A_K = x_{1K} A_1 + ... + x_{lk} A_l + ... + x_{mk} A_m, \tag{2}$$

$$A_j = x_{1j} A_1 + ... + x_{lj} A_l + ... + x_{mj} A_m. \tag{3}$$

(2) барабардыктан

$$A_l = \frac{1}{x_{lk}}\left(A_k - x_{1k} A_1 - ... - x_{mk} A_m\right) \tag{4}$$

векторун табабыз жана аны (1) барабардыкка коебуз жана A_0 векторун эсептейбиз:

$$A_0 = x_1A_1 + ... + x_l\left[\frac{1}{x_{lk}}\left(A_k - x_{1k}A_1 - .... - x_{mk}A_m\right)\right] + ... + x_mA_m,$$

же

$$A_0 = \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{1k}\right)A_1 + ... + \frac{x_l}{x_{lk}}A_k + ... + \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}}x_{mk}\right)A_m.$$

Демек жаңы таяныч планы $X_0 = (x_1', x_2', ..., x_m')$

$$\begin{cases} x_i' = x_i - \dfrac{x_l}{x_{lk}}x_{ik}, & i \neq l, \\ x_k' = \dfrac{x_l}{x_{lk}}, & i = l \end{cases} \tag{5}$$

формулалары менен эсептелет. (4) формуланы (3) кө коюп, A_j векторунун жаңы базис боюнча ажыралышын алабыз:

$$A_j = x_{1j}'A_1 + \text{K} + x_{kj}'A_k + \text{K} + x_{mj}'A_m,$$

мында

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik}, & i \neq l, \\ x_{kj}' = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, & i = l. \end{cases} \tag{6}$$

(5) жана (6) формулаларды бириктирип, жаңы таяныч планын жана вектордук жаңы базис боюнча ажыралуусун табабыз:

$$\begin{cases} x_{ij}' = x_{ij} - \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}x_{ik}, & i \neq l, \\ x_{lj}' = \dfrac{x_{lj}}{x_{lk}}, & i = l, \end{cases} \tag{7}$$

$$j = 0,\ 1,\ 2,\ \text{K},\ n.$$

Эгерде $j = k$ болсо

$$\begin{cases} x_{ik}' = x_{ik} - \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}}x_{ik} = 0, & i \neq l, \\ x_{lk}' = \dfrac{x_{lk}}{x_{lk}} = 1, & i = l \end{cases}$$

алынат, б.а. базиске киргизилүүчү вектордун бардык коэффициенттердин бирөөнөн башкасы нөлгө айланат, ал эми жектөөчу элемент – бирге барабар, Базистик векторго туура келүүчү чамалоо нөлгө барабар, ошондуктан (m+1) – саптын маанилерин эсептөө үчүн да (7) формулалар пайдаланылат.

Ошентип A_0, A_j $(j = 1,\ 2,\ ...,\ n)$ векторлорунун жаңы базис боюнча ажыралышынын коэффициенттерин, жаңы таяныч планынын чамалоолорун жана максат функциясынын маанисин алуу үчүн жетектөөчү саптын бардык элементтерин жетектөөчү элементке бөлүп, симплекс- таблицаны (2 – табл.) түзөбүз.

$$Z(X_0) = CX_0; \quad z_j - c_j = Cx_j - c_j$$
(8)

формулалары эсептөөлөрдүн тууралыгын көзөмөлдөө үчүн колдонулат.

Эгерде 2 – таблицанын (m+1) – сабындагы бардык чамалоолор $z_j - c_j \leq 0$ болсо, анда жаңы алынган план X_0 оптималдуу болуп эсептелет; эгерде оң чамалоолор да болсо, анда кийинки таяныч планын изилдөө керек. Процесс оптималдуу планды алганча, же максат функциясынын чектелбегендигине ишеним пайда болгонго чейин улантылат. Эгерде оптималдуу пландын базистик векторлорго туура келген чамалоолору нөлгө барабар болсо, анда бул оптималдуу пландын жалгыз экендигин көрсөтөт. Эгерде базиске кирбеген векторго нөлдүк чамалоо туурат келсе, анда оптималдуу план жалгыз эмес.

Маселеде максат функциясынын максимумун табуу керек болсо, (3.9) оптималдуулук шарты аткарылбаган учурда $min\theta_{0j}(z_j - c_j)$ мааниси туура келген вектор базиске киргизилет, мында минимум $z_j - c_j < 0$ шартын канагаттандырган j индекстери үчүн алынат. Эгерде минималдык чамалоолордун саны бирден көп болсо, анда $max\ c_j$ маанисине туура келген векторлор базиске киргизилет.

2 – мисал.

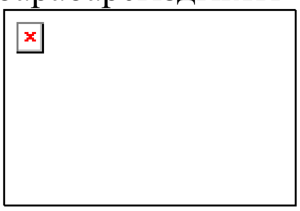
$$Z = x_1 - x_2 - 3x_3 \to min\ ;$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2, \\ 3x_1 \qquad + x_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

маселени симплекс-метод менен чыгарабыз.

Чыгаруу. Маселенин чектөөлөрүнүн оң жактары терс эмес болууга тийиш, ошондуктан экинчи барабарсыздыкты –1 ге көбөйтөбүз:



Чектөөлөрдөгү барабарсыздыктарды барабардыктарга айландырабыз, ал үчүн барабарсыздыктардын оң жагына терс эмес кошумча өзгөрмөлөрдү кошобуз:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 \qquad = 1, \\ -4x_1 + 2x_2 - x_3 \quad + x_5 \quad = 2, \\ 3x_1 \qquad + x_3 \quad + x_6 = 5, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ \text{K}\ ,\ x_6 \geq 0.$$

1 – таблица

i	Базис	C	A_0	C_1	C_2	…	C_l	…	C_m	C_{m+1}	…	C_j	…	C_k	…	C_n
				A_1	A_2	…	A_l	…	A_m	A_{m+1}	…	A_j	…	A_k	…	A_n
1	A_1	C_1	x_1	1	0	…	0	…	0	$x_{1,\, m+1}$	…	x_{1j}	…	x_{1k}	…	x_{1n}
2	A_2	C_2	x_2	0	1	…	0	…	0	$x_{2,\, m+1}$	…	x_{2j}	…	x_{2k}	…	x_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	A_l	C_l	x_l	0	0	…	1	…	0	$x_{l,\, m+1}$	…	x_{lj}	…	x_{lk}^{*}	…	x_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	A_m	C_m	x_m	0	0	…	0	…	1	$x_{m,\, m+1}$	…	x_{mj}	…	x_{mk}	…	x_{mn}
$m+1$	$z_j - c_j$		z_0	0	0	…	0	…	0	$z_{m+1} - c_{m+1}$	…	$z_j - c_j$	…	$z_k - c_k$	…	$z_n - c_n$

2 – таблица

1	A_1	C_1	x'_1	1	0	…	x'_{1k}	…	0	$x'_{1,\, m+1}$	…	x'_{1j}	…	0	…	X'_{1n}
2	A_2	C_2	x'_2	0	1	…	x'_{2k}	…	0	$x'_{2,\, m+1}$	…	x'_{2j}	…	0	…	x'_{2n}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	A_k	C_k	x'_k	0	0	…	x'_{lk}	…	0	$x'_{l,\, m+1}$	…	x'_{lj}	…	1	…	x'_{ln}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	A_m	C_m	x'_m	0	0	…	x'_{mk}	…	1	$x'_{m,m+1}$	…	x'_{mj}	…	0	…	x'_{mn}
$m+1$	$z_j - c_j$		z'_0	0	0	…	$z'_l - c_l$	…	0	$z'_{m+1} - c_{m+1}$	…	$z'_j - c_j$	…	0	…	$z'_n - c_n$

Системаны вектордук формада жазабыз:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + x_3A_3 + x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0,$$

мында

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

A_4, A_5, A_6 бирдик векторлорун баштапкы таяныч планынын базиси үчүн алабыз, x_1, x_2, x_3 өзгөрмөлөрүн нөлгө барабарлайбыз, натыйжада

$$X_0 = (x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 1,\ x_5 = 2,\ x_6 = 5)$$

баштапкы таяныч планын алабыз. Ага

$$x_4A_4 + x_5A_5 + x_6A_6 = A_0$$

ажыроосу туура келет.

X_0 планын текшерүү үчүн биринчи симплекс-таблицаны (3-табл.) түзөбүз жана $Z(X_0)$ маанисин жана $z_j - c_j$ чамалоолорун эсептейбиз:

3 – таблица

i	Базис	C	A_0	$c_1=1$	$c_2=-1$	$c_3=-3$	$c_4=0$	$c_1=0$	$c_6=0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_4	0	1	2	–1	1^*	1	0	0
2	A_5	0	2	–4	2	–1	0	1	0
3	A_6	0	5	3	0	1	0	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		0	–1	1	3	0	0	0

$$Z(X_0) = CX_0 = 0; \quad z_1 = Cx_1 = 0; \quad z_2 = Cx_2 = 0; \quad z_3 = Cx_3 = 0;$$

$$z_1 - c_1 = 0 - 1 = -1; \quad z_2 - c_2 = 0 + 1 = 1; \quad z_3 - c_3 = 0 + 3 = 3.$$

Базистик векторлор үчүн чамалоолор нөлгө барабар. Алынган чамалоолордун экөө оң: $z_2 - c_2 = 1 > 0,\ \ z_3 - c_3 = 3 > 0$. Демек баштапкы таяныч планы оптималдуу эмес, бирок аны жакшыртууга болот. Ал үчүн $\theta_{oj}(z_j - c_j) > 0$ маанисине туура келген векторду базиске кийирүү керек. A_2 жана A_3 векторлорунун ажыралышында оң коэффициенттер бар, ошондуктан $\theta_{02} > 0$ жана $\theta_{03} > 0$. Ал сандарды табабыз:

$$\theta_{02} = 2/2 = 1; \quad \theta_{03} = min(1/1, 5/1) = 1/1 = 1; \quad \theta_{02}(z_2 - c_2) = 1 \cdot 1 = 1;$$

$$\theta_{03}(z_3 - c_3) = 1 \cdot 3 = 3; \quad max(1; 3) = 3.$$

Демек 1 – сап менен 3 – мамычанын кесилишинде турган элемент – жетектөөчү, 1 – сап – жетектөөчү сап, 3 – мамыча – жетектөөчү мамыча болушат; ошондуктан A_4 векторун базистен чыгарып, анын ордуна A_3 векторун киргизүү керек .

Эми экинчи симплекс-таблицаны түзөбүз (4–таблица)

4 – таблица

i	Базис	C	A_0	$c_1=1$	$c_2=-1$	$c_3=-3$	$c_4=0$	$c_1=0$	$c_6=0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	–3	1	2	–1	1	1	0	0
2	A_5	0	3	–2	1^*	0	1	1	0
3	A_6	0	4	1	1	0	–1	0	1
$m+1$	z_j-c_j		–3	–7	4	0	–3	0	0

Жетектөөчү саптын жаңы элементтерин эсептейбиз. Ал үчүн жетектөөчү саптын эски элементтерин жетектөөчү элементке (1ге) бөлөбүз жана экинчи сап менен кошобуз; үчүнчү саптан кемитебиз; 3кө көбөйтүп, (m+1) – саптан кемитебиз. Натыйжада 4 – таблицаны алабыз. 4 – таблицада экинчи таяныч планы

$$X_0^{(1)}=(x_1=0;\ x_2=0;\ x_3=1;\ x_4=0;\ x_5=3;\ x_6=4)$$

алынды, максат функциясынын ага туура келген мааниси $Z(X_0^{(1)})=-3.$

(m+1) – сапта $z_2-c_2=3+1=4>0$, демек $X_0^{(1)}$ планы оптималдуу эмес, A_2 векторун базиске киргизүү керек.

$\theta_{02}=min(3/1;\ 4/1)=3/1=3$ маанисин табабыз, демек экинчи мамыча менен экинчи саптын кесилишинде турган 1 саны жетектөөчү элемент болот, анда A_5 вектору базистен чыгарылат. Жаңы симплекс – таблицаны түзөбүз (5 – таблица) жана акыркы итерацияда оптималдуу планды алабыз.

5 – таблица

i	Базис	C	A_0	$c_1=1$	$c_2=-1$	$c_3=-3$	$c_4=0$	$c_1=0$	$c_6=0$
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	–1	3	–2	1	0	1	1	0
3	A_6	0	1	3^*	0	0	–2	–1	1
$m+1$	z_j-c_j		–15	1	0	0	–7	–4	0
1	A_3	–3	4	0	0	1	2	1	0
2	A_2	–1	11/3	0	1	0	–1/3	1/3	2/3
3	A_1	1	1/3	1	0	0	–1/2	–1/3	1/3
$m+1$	z_j-c_j		–46/3	0	0	0	–19/3	–11/3	–1/3

Төртүнчү итерациянын (m+1) – сабындагы бардык чамалоолор оң эмес, ошондуктан

$$X_0^{(3)}=(x_1=1/3;\ x_2=11/3;\ x_3=4)$$

планы оптималдуу, ага туура келген максат функциясынын мааниси $Z_{min}(X_0^{(1)})=-46/3.$

§5. Түгөйлөштүк түшүнүгү

Сызыктуу программалоонун ар бир маселеси менен тыгыз байланышкан ага *түгөйлөш* деп аталуучу маселе да жашайт. Баштапкы маселе менен ага түгөйлөш маселенин байланышы төмөнкүдөй: баштапкы маселенин максат функциясынын коэффициенттери c_i түгөйлөш маселенин чектөөлөр системасынын бош мүчөлөрү болуп кызмат кылат, ал эми түгөйлөш маселенин чектөөлөрүнүн коэффициенттеринин матрицасы баштапкы маселенин чектөөлөрүнүн коэффициенттеринин транспонирленген матрицасы болот. Түгөйлөш маселенин чыгарылышы баштапкы маселенин чыгарылышынан алынышы мүмкүн, же тескерисинче иштөөгө да болот.

Мисал үчүн ресурстарды пайдалануу жөнүндөгү маселени карап көрөлү. Ишкананын ресурстарынын саны m, алардын көлөмү $b_i (i=1,\ 2,\ ...,\ m)$ бирдиктер болсун. Бул ресурстардан n түрдөгү продукциялар чыгарылат. j – продукциянын бир бирдигин чыгаруу үчүн i – ресурстук a_{ij} бирдиги сарпталат жана анын наркы c_j акча бирдиги. Ишканага (акча менен эсептегенде) эң чон пайда алып келе тургандай кылып, продукция чыгаруунун планын түзүү керек. Чыгарылуучу j – продукциянын санын $x_j\ (j=1,2,...,n)$ менен белгилеп, маселенин математикалык моделин жазабыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_2, \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \quad j=1,\ 2,\ ...,n$$

чектөөлөрүн канагаттандыруучу жана

$$Z = c_1x_1 + c_2\ x_2 + ... + c_nx_n$$

максат функциясына максималдык маани берүүчү $X = (x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$ векторун табуу керек.

Продукцияны чыгарууга зарыл болгон ресурстарды чамалайбыз. Ресурстун наркынын бирдиги үчүн чыгарылуучу продукцияны наркынын бирдигин алабыз. $y_i\ (i=1,2,\mathrm{K}\ ,m)$ менен i – ресурстун бирдигинин наркын белгилейбиз. Анда j – продукциянын бирдигин даярдоого жумшалуучу бардык ресурстардын наркы $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j$ га барабар. Жумшалган ресурстардын наркы даярдалган продукттун наркынан аз болушу мүмкүн эмес, ошондуктан

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j \ge \tilde{n}_j\ , \quad j=1,2,...,n$$

барабарсыздыгы аткарылууга тийиш. Бардык болгон ресурстардын наркы $\sum_{i=1}^{n} b_i y_i$ ге барабар. Демек түгөйлөш маселе төмөнкүдөй коюлат:

$$y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ ..., \ m$$

чектөөлөрдүн канагаттандыруучу жана

$$f = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m$$

сызыктуу функциясына минималдык маани берүүчү $Y = (y_1, \ y_2, \ ..., \ y_m)$ векторун табуу талап кылынат.

Жогоруда келтирилген баштапкы жана түгөйлөш маселелердин экономикалык интерпретациясы төмөнкүдөй.

Баштапкы маселе. Эгерде продукциянын бирдигинин баасы $c_j \quad (j = 1, 2, ..., n)$, ал эми колдо болгон ресурстардын көлөмү $b_i (i = 1, \ 2, \ ..., \ m)$ болсо, анда чыгарылуучу продукциянын наркы эң чон болсун үчүн кайсы продукцияны канча $x_j (j = 1, 2, ..., n)$ санда чыгаруу керек?

Түгөйлөш маселе. Эгерде ресурстардын көлөмү b_i, ал эми продукциянын бирдигинин наркы c_j болсо, анда продукцияны чыгарууга кеткен чыгымдар эң аз болсун үчүн ар бир ресурстун бирдигинин баасы y_i канча болуш керек?

y_i өзгөрмөлөрү *баалар*, же *эсептик баалар*, же *айкын эмес баалар* деп аталат.

Сызыктуу программалоонун көптөгөн маселелери баштапкы жана түгөйлөш маселелер түрүндө коюлат, ошондуктан түгөйлөш маселелердин жуптарын изилдөө зарыл.

§6. Симметриялуу эмес түгөйлөш маселелер

Симметриялуу эмес түгөйлөш маселелерде баштапкы маселенин чектөөлөлөрүнүн системасы барабардыктар түрүндө, ал эми түгөйлөш маселеники – барабарсыздыктар түрүндө берилет жана түгөйлөш маселенин өзгөрмөлөрү терс болушу да мүмкүн. Далилдөө жеңил болсун үчүн маселенин коюлушун матрицалык формада жазабыз.

Баштапкы маселе.

$$AX = A_0, \quad X \geq 0 \tag{1}$$

чектөөлөрүн канагаттандыруучу жана $Z = CX$ максат функциясын максималдоочу $X = (x_1, x_2, ..., x_m)^T$ векторун табуу керек .

Түгөйлөш маселе.

$$YA \leq C \tag{2}$$

чектөөлөрүн канагаттандыруучу жана $f = YA_0$ сызыктуу функциясын минималдоочу $Y = (y_1, \ y_2, \ ..., \ y_m)$ векторун табуу керек.

Эки маселеде тең $\tilde{N} = (c_1,\ c_2,\ ...,\ c_n)$ – вектор, $A_0 = (b_1,\ b_2,\ ...,\ b_m)^T$ – вектор, $A = (a_{ij})$ чектөөлөр системасынын коэффициенттеринин матрицасы. Түгөйлөш маселелердин оптималдуу пландарынын арасындагы байланыш жөнүндө төмөнкү теоремада айтылат.

Түгөйлөштук теоремасы. Эгерде түгөйлөш маселелердин жубунун бирөө оптималдуу планга ээ болсо, анда экинчи маселе да чыгарылышка ээ болот, атап айтканда, бир маселенин максат функциясынын максимуму экинчи маселенин максат функциясынын минимумуна барабар. Эгерде маселелердин бирөөнүн максат функциясы чектелген эмес болсо, анда экинчи маселе чыгарылышка ээ болбойт.

Бул теорема боюнча түгөйлөш маселелердин бирөөнүн чыгарылышын табуу менен экинчисинин оптималдуу планын табууга болот .

3 – мисал. Баштапкы маселе.

$$Z = x_2 - x_4 - 3x_5 \to min;$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 + x_5 \qquad &= 1, \\ -4x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 \qquad &= 2, \\ 3x_2 \qquad\qquad + x_5 + x_6 &= 5, \\ x_1,\ x_2,\ ...,\ x_6 \geq 0 . \end{aligned}$$

Мында $C = (0,\ 1,\ -1,\ -3,\ 0)$,

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\ A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Түгөйлөш маселе.

$$f = y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to max;$$

$$\begin{aligned} y_1 \qquad\qquad &\leq 0, \\ 2y_1 - 4y_2 + 3y_3 &\leq 1, \\ y_2 \qquad &\leq 0, \\ -y_1 + 2y_2 \qquad &\leq -1, \\ y_1 - \ y_2 + \ y_3 &\leq -3, \\ y_3 &\leq 0. \end{aligned}$$

Баштапкы маселенин чыгарылышын симплекс-метод менен табабыз (6 –табл.).

6 – таблица

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	Базис	C	A_0	0	1	0	– 1	–3	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
1	A_1	0	1	1	2	0	–1	1^*	0
2	A_3	0	2	0	– 4	1	2	–1	0
3	A_6	0	5	0	3	0	0	1	1
m+1	$z_j - c_j$		0	0	–1	0	1	3	0
1	A_5	–3	1	1	2	0	–1	1	0
2	A_3	0	3	1	–2	1	1^*	0	0
3	A_6	0	4	–1	1	0	1	0	1
m+1	$z_j - c_j$		–3	–3	–7	0	4	0	0
1	A_5	–3	4	2	0	1	0	1	0
2	A_4	–1	3	1	–2	1	1	0	0
3	A_6	0	1	–2	3^*	–1	0	0	1
m+1	$z_j - c_j$		–15	–7	1	–4	0	0	0
1	A_5	–3	4	2	0	1	0	1	0
2	A_4	–1	11/3	–1/3	0	1/3	1	0	2/3
3	A_2	1	1/3	–1/2	1	–1/3	0	0	1/3
m+1	$z_j - c_j$		–46/3	–19/3	0	–11/3	0	0	–1/3

Баштапкы маселенин оптималдуу планы $X^* = ($ 0; 1/3; 11/3; 4; 0) жана максат функциясынын минималдык мааниси $Z_{min} = -46/3$ 1 – таблицанын 4 – итерациясында алынды. Бул итерацияны пайдаланып, түгөйлөш маселенин оптималдуу планы $Y^* = C^* D^{-1}$ формуласы аркылуу эсептелет, мындагы D^{-1} –баштапкы маселенин оптималдуу планын камсыз кылган базистик векторлордун компоненталарынан түзүлгөн матрицага тескери матрица. Акыркы базиске $A_5,\ A_4,\ A_2$ векторлору кирет, демек

$$D = (A_5,\ A_4,\ A_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ага тескери матрица D^{-1} 4 – итерациянын $A_1,\ A_3,\ A_6$ мамычаларында турган коэффициенттеринен түзүлгөн:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Бул итерациядан көрүнүп тургандай, $C^* = (-3; -1;\ 1)$.

Демек

$$Y^* = C * D^{-1} = (-3; -1;\ 1)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

$$Y^* = (-19/3; -11/3; -1/3), \quad f = -46/3.$$

§7. Симметриялуу түгөйлөш маселелер

Сызыктуу программалоонун түгөйлөш маселелеринин бир түрү болуп симметриялуу түгөйлөш маселелер эсептелет. Бул маселердин баштапкы жана түгөйлөш маселелеринин чектөөлөрү барабарсыздыктар түрүндө берилет, ал эми түгөйлөш өзгөрмөлөргө терс эместик шарты коюлат.

Баштапкы маселе.

$Z = CX$ максат функциясына максимум берүүчү жана

$$AX \geq A_0, \quad X \geq 0 \qquad (1)$$

чектөөлөр системасын канагаттандыруучу

$$X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)^T$$

векторун табуу талап кылынат.

Түгөйлөш маселе.

$f = YA_0$ максат функциясына максимум берүүчү жана

$$YA \leq C, \quad Y \geq 0$$

чектөөлөр системасын канагаттандыруучу $Y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_m)$ векторун табуу талап кылынат.

Барабарсыздыктар системасын кошумча өзгөрмөлөрдүн жардамы менен теңдемелер системасына айландырууга болот, ошондуктан симметриялуу түгөйлөш маселелерди симметриялуу эмес түгөйлөш маселелер менен алмаштыра алабыз жана түгөйлөштүк теоремасын колдонобуз.

Симметриялуулукту пайдалануу менен чыгарууга ыңгайлуу маселени тандап алууга болот. ЭЭМди колдонбостон эсептөөдө түгөйлөштүктү колдонуу эсептөөлөрдү кыскартууга жардам берет.

4 – мисал. Баштапкы маселе.

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

Түгөйлөш маселени жазуу үчүн чектөөлөр системасын (1) түргө келтирүү керек, ал үчүн экинчи барабарсыздыкты –1 ге көбөйтөбүз.

Түгөйлөш маселе.

$$f = 2y_1 + 3y_2 + 6y_3 + 3y_4 \to max;$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 + 2y_4 \le 1, \\ 2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \le 2, \\ -y_1 + 4y_2 - 2y_3 - 2y_4 \le 3, \end{cases}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4 \ge 0.$$

Баштапкы маселени чыгаруу үчүн төрт кошумча өзгөрмөнү жана системаны өзгөртүп түзгөндөн кийин бир жасалма өзгөрмөнү киргизүү керек. Анда баштапкы симплекс – таблица алты саптан жана тогуз мамычадан туруугa тийиш.

Түгөйлөш маселени чыгаруу үчүн үч кошумча өзгөрмөнү кийирүү зарыл. Чектөөлөр системасы алдын-ала өзгөрмөлөрдү талап кылбайт, анын биринчи симплекс-таблицасы төрт жана сегиз мамычадан турат.

Түгөйлөш маселени симплекс-метод менен чыгарабыз (7-табл.)

7 – таблица

i	Базис	C	A_0	2	3	6	3	0	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
1	A_5	0	1	2	–1	1*	2	1	0	0
2	A_3	0	2	2	1	1	–1	0	1	0
3	A_7	0	3	–1	4	–2	–2	0	0	1
m+1	$z_j - c_j$		0	–2	–3	–6	–3	0	0	0
1	A_3	6	1	2	–1	1	2	1	0	0
2	A_6	0	1	0	2*	0	–1	–1	1	0
3	A_7	0	5	3	6	0	2	2	0	1
m+1	$z_j - c_j$		6	10	–9	0	9	6	0	0
1	A_3	6	3/2	2	0	1	3/2	1/2	1/2	0
2	A_2	3	1/2	0	1	0	–1/2	–1/2	1/2	0
3	A_7	0	2	3	0	0	4	5	3	1
m+1	$z_j - c_j$		21/2	10	0	0	9/2	3/2	9/2	0

Түгөйлөш маселенин оптималдуу планы $Y^* = (0;\ 1/2;\ 3/2;\ 0)$, максат функциясынын максималдык мааниси $f_{max} = 21/2$.

Баштапкы маселенин оптималдуу планын акыркы итерациянын (m+1) – сабындагы A_5, A_6, A_7 мамычаларындагы чамалоолорду пайдаланып табабыз: $x_1 = 3/2 + 0 = 3/2;$ $x_2 = 9/2 + 0 = 9/2;$ $x_3 = 0 + 0 = 0.$ Баштапкы маселенин оптималдуу планы $X^* = (3/2; 9/2; 0)$, максат функциясынын минималдык мааниси $Z_{min} = 21/2.$

§8. Түгөйлөш маселелердин математикалык моделдеринин түрлөрү

Симметриялуу эмес жана симметриялуу түгөйлөш маселелерди изилдөөдөн көрүнүп тургандай, түгөйлөш маселелердин матеметикалык моделдери төмөнкүдөй түрлөргө ээ болушу мүмкүн.

Симметриялуу эмес маселелер

(1) *Баштапкы маселе* *Түгөйлөш маселе*

$$Z = CX \to min; \quad AX = A_{0,} \quad X \geq 0.$$

$$f = YA_0 \to max; \quad YA \leq C.$$

(2) *Баштапкы маселе* *Түгөйлөш маселе*

$$Z = CX \to max; \quad AX = A_0, \quad X \geq 0.$$

$$f = YA \to min; \quad YA \geq C, \quad Y \geq 0.$$

Симметриялууу маселелер

(3) *Баштапкы маселе* *Түгөйлөш маселе*

$$Z = CX \to min; \quad AX \geq A_0, \quad X \geq 0.$$

$$f = YA_0 \to max; \quad YA \leq C, \quad Y \geq 0.$$

(4) *Баштапкы маселе* *Түгөйлөш маселе*

$$Z = CX \to max; \quad AX \leq A_0, \quad X \geq 0.$$

$$f = YA_0 \to min; \quad YA \geq C, \quad Y \geq 0.$$

Берилген баштапкы маселеге түгөйлөш маселени жазуу үчүн баштапкы маселенин чектөөлөр системасын тиешелүү түргө келтирүү зарыл. Мисалы төмөндө берилген маселенин түгөйлөшүнүн математикалык моделин жазалы:

5-мисал. $Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Бул маселе – максат функциясынын минимунун табууга арналган симметриялуу маселе. Анын түгөйлөшү (3) түрдө жазылыш керек. Бул түргө келтирүү үчүн биринчи барабарсыздыкты –1 ге көбөйтүү керек.

Баштапкы маселе

$$Z = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 \geq -4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 5, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 6, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Түгөйлөш маселе

$$f = -4y_1 + 5y_2 + 6y_3 \to max;$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \leq 2, \\ y_1 - 5y_2 - y_3 \leq 1, \\ y_1 + y_2 + 3y_3 \leq 5, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \leq 0.$$

Теорема. Эгерде баштапкы маселенин оптималдуу планынын компоненталарын чектөөлөр системасына койгондо i – чектөө барабарсыздыкка айланса, анда түгөйлөш маселенин оптималдуу планынын i – компонентасы нөлгө барабар.

Эгерде түгөйлөш маселенин оптималдуу планынын i – компонентасы оң болсо, анда баштапкы маселенин i – чектөөсү даана барабарсыздык болот.

§9. Түгөйлөш симплекс- метод

Мурунку параграфтарда (§6 жана §7) баштапкы маселенин чыгарылышын алуу үчүн түгөйлөш маселеге өтүп, анын оптималдуу планынын чамалоолорун пайдалануу менен баштапкы маселенин оптималдуу чыгарылышын аныктоого боло тургандыгын көргөнбүз.

Сөзсүз эле түгөйлөш маселеге өтүүнүн зарылдыгы деле жок, себеби бирдик кошумча базистүү алгачкы симплекс-таблицаны карасак, анын мамычаларында баштапкы маселе, ал эми саптарында – түгөйлөш маселе жазылган. Баштапкы маселенин пландарынын чамалоолору c_j, ал эми түгөйлөш маселенин пландарынын чамалоолору – b_i. Түгөйлөш маселени баштапкы маселе жазылган симплекс-таблица боюнча чыгаралы; түгөйлөш маселенин оптималдуу планын, демек аны менен бирге баштапкы маселенин оптималдуу планын да табалы. Мындай метод *түгөйлөш симплекс- метод* деп аталат.

Сызыктуу программалоонун канондук маселесин чыгаруу керек болсун:

$$Z = CX \to min;$$

$$AX = A_0, \quad X \geq 0.$$

Буга түгөйлөш маселе

$$f = YA_0 \to max;$$

$$YA \leq C$$

түрдө жазылат. Биз тандап алган $D=(A_1, A_2, ..., A_l, ..., A_m)$ базис боюнча табылган $X = D^{-1}A_0 = (x_1, x_2, ..., x_l, ..., x_m)$ векторунун эң жок дегенде бир компонентасы терс (мисалы, $x_l < 0$) болсун, а бирок бардык A_j векторлору үчүн $z_j - c_j \le 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$ шарттары аткарылсын дейли. Анда түгөйлөштүк теоремасынын негизинде $Y = CD^{-1}$ вектору түгөйлөш маселенин планы болот. Бул план оптималдуу эмес, себеби, биринчиден, биз тандап алган базис боюнча X векторунун терс компонентасы бар, демек ал баштапкы маселенин планы боло албайт; экинчиден, түгөйлөш маселенин оптималдуу планынын чамалоолору терс эмес болууга тийиш.

Демек $x_l < 0$ компонентасына ылайык келген A_l векторун баштапкы маселенин базисинен чыгаруу керек, ал эми терс чамалоого туура келген векторду түгөйлөш маселенин базисине кийирүү керек.

Баштапкы маселенин базисине киргизүүчү векторду тандоо үчүн таблицанын 1 – сабына көз жүгүртөбүз: эгерде ал сапта терс элемент $(x_{lj} < 0)$ жок болсо, анда түгөйлөш маселенин максат функциясы чектелген эмес, баштапкы маселенин чыгарылышы жок. Эгерде айрым элементтер терс ($x_{lj} < 0$) болсо, анда бул маанилерди камтыган мамычалар үчүн $\theta_{0j} = min(x_i / x_{ij}) \ge 0$ санын табабыз жана баштапкы маселеде $max\,\theta_{0j}(z_j - c_j)$ маанисине жана түгөйлөш маселеде $min\,\theta_{0j}(z_j - c_j)$ маанисине ылайык келүүчү векторду аныктайбыз. Бул векторду баштапкы маселенин базисинен чыгарылуучу вектор жетектөөчү саптан табылат.

Эгерде $\theta_{0j} = min(x_i / x_{ij}) = 0$, б.а. $x_i = 0$ болсо, анда $x_{ij} > 0$ болгондо гана ал жетектөөчү элемент үчүн алынат. Жетектөөчү элементти мындай тандоо X векторунун терс компоненталарынын көбөйүшүнө алып келбейт. Процесс $X \ge 0$ болгуча улантылат, бул шарт аткарылганда түгөйлөш маселенин да, баштапкы маселенин да оптималдуу пландары алынат.

Түгөйлөш симплекс-методдун алгоритми боюнча эсептөөдө бардык $x_i < 0$ компоненталарын четтеткенге чейин $z_j - c_j \le 0$ шартын эске албай койсо деле болот, андан кийин оптималдуу план кадимки эле симплекс-метод менен табылат. Эгерде бардык i лер үчүн $x_i < 0$ болсо ушундай жасоо ыңгайлуу; анда баштапкы маселенин кийинки планына өтүү итерациясында θ_{0j} ны катыштын минимуму эмес, максимуму боюнча аныктоо керек, б.а. $\theta_{0j} = max(x_i / x_{ij}) > 0$.

Эгерде базис оң болгондо маселенин чектөөлөр системасында оң дагы, терс дагы бош мүчөлөр болсо, ал маселеге түгөйлөш симплекс-методду колдонуу ыңгайлуу, себеби бул учурда чектөөлөр системасын өзгөртүүлөрдүн саны аз жана симплекс-таблицанын өлчөмү кичине болот.

6- мисал. $Z = -2x_1 + x_2 + 5x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 \le 4, \\ x_1 - 5x_2 + x_3 \ge 5, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Чыгаруу. Экинчи барабарсыздыкты –1ге көбөйтөбүз жана барабарсыздыктарды барабардыктарга айландырабыз:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 + x_5 = -5, \\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

Базис үчүн A_4 жана A_5 векторлорун алып, биринчи симплекс-таблцаны түзөбүз (8-табл.)

8 – таблица

i	Базис	*C*	*A₀*	–2	1	5	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	4	1*	1	–1	1	0
2	A_5	0	–5	–1	5	–1	0	1
$m+1$	$z_j - c_j$		0	2	–1	–5	0	0

$x_2 = -5 < 0$ болгондуктан экинчи саптын элементтерине көз жүгүртөбүз. Алардын арасында эки терс элемент бар, алар A_1 жана A_3 векторлоруна тиешелүү мамычаларда турушат. Анда

$$\theta_{01} = min(4/1, -5/-1) = 4/1 = 4; \quad \theta_{01}(z_1 - c_1) = 4 \cdot 2 = 8;$$

$$\theta_{03} = -5/-1 = 5; \ \theta_{03}(z_3 - c_3) = 5 \cdot (-5) = -25,$$

Баштапкы маселеде минимум изделгендиктен базиске $max\,\theta_{0j}(z_j - c_j) = max(-25, 8) = 8$ чамалоосуна туура келген вектор киргизилет, б.а A_1 вектору базиске киргизилет, ал эми базистен A_4 вектору чыгарылат; жетектөөчү элемент – 1.

9-таблица

i	Базис	*C*	*A₀*	–2	1	5	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_1	–2	4	1	1	–1	1	0
2	A_5	0	–1	0	6	–2*	1	1
$m+1$	$z_j - c_j$		–8	0	–3	–3	–2	0
1	A_1	–2	9/2	1	–2	0	½	–1/2
2	A_3	5	1/2	0	–3	1	–1/2	–1/2
$m+1$	$z_j - c_j$		–13/2	0	–12	0	–7/2	–3/2

Кийинки симплекс-таблицаны түзөбүз (9-табл.). Акыркы итерацияда баштапкы маселенин оптималдуу планы алынган:

$$X^* = (9/2;0;1/2), \quad Z_{min} = -13/2.$$

Түгөйлөш маселенин отималдуу планы:

$$Y^* = (7/2;\,3/2), \qquad f_{\max} = -13/2.$$

Түгөйлөш маселенин планын алыш үчүн биринчи алынган базиске тура келген $z_j - c_j$ чамалоолорун –1ге көбөйтөбүз, себеби баштапкы жана түгөйлөш маселелер симметриялуу.

7-мисал. $Z = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 7, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots., x_3 \geq 0$$

Чыгаруу. Чектөөлөрдү –1ге көбөйтөбүз жана теңдемелер системасын түзөбүз:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -4, \\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + \quad x_5 = -7, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0$$

Маселенин чыгарылышы 10 – таблицада келтирилген. Биринчи итерацияда жетектөөчү элемент $\theta_{0j} = max(x_i / x_{ij}) > 0$ боюнча тандалып алынган, бул – экинчи итерацияда

10-таблица

i	Базис	C	A_0	3	2	–4	0	0
				A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_4	0	–4	–1*	–1	2	1	0
2	A_5	0	–7	–3	–1	4	0	1
m+1	$z_j - c_j$		0	–3	–2	4	0	0
1	A_1	3	4	1	1	–2	–1	0
2	A_5	0	6	0	2*	–2	–3	1
m+1	$z_j - c_j$		12	0	1	–2	–3	0
1	A_1	3	3/2	1	0	–1	½	–1/2
2	A_2	2	5/2	0	1	–1	–3/2	1/2
m+1	$z_j - c_j$		19/2	0	0	–1	–3/2	–1/2

баштапкы маселенин таяныч планын алууга мүмкүндүк берди. Андан ары маселе кадимки эле симплекс-метод менен чыгарылды.

Баштапы маселенин оптималдуу планы:

$$X^* = (3/2;5/2;0); \quad Z_{min} = 19/2.$$

Маселелер симметриялуу болгондуктан түгөйлөш маселенин оптималдуу планы:

$$Y^* = (3/2;1/2); \quad f_{max} = 19/2.$$

Өз-алдынча чыгарууга маселелер

№ 1. Симметриялуулук касиетин пайдаланып, түгөйлөш маселенин жардамы менен баштапкы маселени чыгаргыла.

$$Z = 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \geq 5, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 1, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3, \\ x_1 - x_2 + 8x_3 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3\ \geq 0.$$

№2. Төмөнкү түгөйлөш маселе үчүн баштапкы маселени жазгыла жана аны чыгаргыла:

$$f = 2y_1 + 4y_2 + 12y_4 \to min;$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + y_3 + 4y_4 \geq 10, \\ 2y_1 + y_2 - 2y_3 + 3y_4 \geq 4, \end{cases}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4, \geq 0.$$

№3. Түгөйлөш симплекс-методду колдонуп, төмөнкү маселелерди чыгаргыла:

а) $$Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \to max;$$

$$\begin{cases} x_{\cdot} + 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \geq 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 2x_4 \geq 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

б) $$Z = 5x_1 - x_2 - 4x_3 \to max;$$

$$\begin{cases} -x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ -x_1 + x_2 \geq 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 \geq 8, \\ x_1 - x_3 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1,\ 2,\ 3.$$

в) $$Z = 2x_1 + 3x_2 + \frac{5}{2}x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 6, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 16, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$

г) $$Z = 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 \to min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 9, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ x_1 + 6x_2 \geq 12, \end{cases}$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0$$