УДК 517.9

Биргебаев А.

*Казахский национальный педагогический университет им. Абая,*
*г. Алматы, Республика Казахстана*

# ТЕОРЕМЫ О РАЗДЕЛИМОСТИ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

*В работе рассматривается разделимость дифференциального оператора квантовой механики. Как известно, для того чтобы решить линейное дифференциальное уравнение сингулярными коэффициентами в суммируемых пространствах (Гилберта, Банаха, Соболева), используются операторные методы и теоремы вложения функциональных пространств. В статье приведен один из таких методов (метод локализации) и получено достаточное условие существования единственности, а также коэрцитивные оценки решения.*

*The present article considers an issue of differential operators' separability in quantum mechanics. It is known that methods of operators and embedding theorems of function spaces are used for solution of linear differential equations by singular coefficients in summable spaces (Gilbert, Banach, Sobolev). The present article includes one of such methods (method of focalization) and sufficient condition of existence and uniqueness, as well as coercive estimates of solutions.*

Обозначим $D(T)$- область определения оператора $T$. В дальнейшем все операторы - линейные. Пусть $B$ и $C$ линейные операторы. Если $x \in D(B) \cap D(C)$, то очевидно, что $x \in D(A)$, $A = B + C$.

Легко проверить, что обратное неверно: т.е. если $x \in D(A)$, то отсюда ещё не следует, что $x \in D(B) \cap D(C)$.

Пример. Пусть $A$ ,$B$ ,$C$ – операторы, действующие из $[0,1]$ в $[0,1]$ .

$$Bu = 1 - \frac{1}{u(x)}, \quad Cu = \frac{1}{u(x)}. \text{ Тогда } \quad Bu + Cu = Au \equiv 1.$$

Посмотрим на области определения

$$D(B) = \left\{ u(x) \in C[0,1] : \sup_{x \in [0,1]} \left| 1 - \frac{1}{u(x)} \right| < \infty \right\} \Rightarrow u(x) \equiv x \notin D(B).$$

$$D(C) = \left\{ u(x) \in C[0,1] : \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{u(x)} \right| < \infty \right\} \Rightarrow u(x) \equiv x \notin D(C) \Rightarrow x \notin D(B) \cap D(C).$$

Но в то же время $Ax = Bx + Cx = 1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = 1$.

Введем оператор Штурма – Лиувилля:

$$Ly = -y'' + q(x)y, \quad x \in J(-\infty, \infty), \quad y \in L_2(J).$$

Определение. Оператор Штурма – Лиувилля называется разделимым, если из условия $Ly \in L_2(J)$, $y \in L_2(J)$ следует $y'' \in L_2(J)$.

Аналогичные работы рассматривались в [1-8].

## § 1. Свойства оператора Штурма-Лиувилля.

Пусть оператор Штурма - Лиувилля $L^0$ определен на $C_0^\infty(J)$, $q(x) \geq 1$.

Покажем, что тогда $\|Ly\| \geq \|y\|$. Возьмем: $(Ly, y)$

$$(L^0 y, y)=\int_{-\infty}^{\infty}(L^0 y)(t)\bar y(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}[-y''(t)+q(t)y(t)]\bar y(t)dt=|\text{по частям}|=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}q(t)|y(t)|^2\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}y''(t)\bar y(t)dt=\int_{-\infty}^{\infty}q(t)|y(t)|^2\,dt-\lim_{M,N\to\infty}\int_{-N}^{M}\bar y\,dy'=|\text{финитность}|=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}q(t)|y(t)|^2\,dt+\int_{-\infty}^{\infty}|y'(t)|^2\,dt\geq\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)|^2dt\geq\|y\|^2.$$

Итак: $(L^0 y, y)\geq\|y\|^2$ и используем неравенство Коши – Буняковского:

$|(L^0 y\, y)|\leq\|L^0_y\|\cdot\|y\|$ сокращая на $\|y\|\neq 0$, получим окончательно $\|L^0 y\|\geq\|y\|$.

Возьмем $L$- замыкание $L^0$. Прежде всего, возникает вопрос, как построить замыкание. Общая процедура такова [7]: выделить все те элементы, $f\in\overline{D(L_0)}$ для которых найдется хотя бы одна последовательность

$f_1, f_2,..., f_n,... \in D(L_0)$ такая, что $\{L_0 f_n\}$ обращается в сходящуюся последовательность, и положить $\bar L\, f=\lim_{n\to\infty}L_0(f_n)$. При таком присоединении важно следить за тем, что при $\forall\{f_n\},\ f_n\to f$ соответствующие последовательности $\{L_0 f_n\}$ стремились к одному только $L\ f$.

Действительно, область определения $L_0$ есть $C_0^\infty(J)$-т.е. всюду плотное в $L_2$ множество. Если мы покажем, что $\exists\, z,\ y\in D(L_0)$, $(L_0\, z, y)=(z\ , L_0 y)$, то $L_0$-симметрический оператор, и, следовательно, всегда допускает замыкание

$$(L_0\, z, y)=\int_{-\infty}^{\infty}[-z''+q(x)z(x)]\bar y(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}q(x)z(x)\bar y(x)dx+\int_{-\infty}^{\infty}-z''\,\bar y\,dx=$$

$$=\left|\text{по частям , пользуясь}: \ y,z\in C_0^\infty(J)\right|=\int_{-\infty}^{\infty}[-\bar y''(x)+q(x)y(x)]z(x)dx=$$

$$=|q(x)-\text{вещественно}|=\int_{-\infty}^{\infty}z(x)\overline{L_0 y'}\,dx=(z, L_0 y).$$

Заметим, что неравенство $\|Ly\|\geq\|y\|$ сохраняется вследствие непрерывности нормы. Действительно, в банаховом пространстве справедливо, если $a_n\to a\ ,b_n\to b$ и $\|a_n\|\leq\|b_n\|\ \Rightarrow\ \|a\|\leq\|b\|$.

$$\left.\begin{aligned}\|x\|\leq\|x-y\|+\|y\|\Rightarrow\|x\|-\|y\|\leq\|x-y\|\\ \|y\|\leq\|x-y\|+\|x\|\Rightarrow\|y\|-\|x\|\leq\|x-y\|\end{aligned}\right\}\ |\ \|x\|-\|y\|\ |\leq\|x-y\|\Rightarrow$$

Если

$a_n\to a\Rightarrow\|a_n\|\to\|a\|$ и т.д.

Покажем теперь, что существует $L^{-1}$. Из $\|Ly\|\geq\|y\|$ следует, что если $Ly=0$, то $y$ =0, с другой стороны, если $y=0\ \Rightarrow Ly=0$, так как $L$- линейный оператор, сопоставляя все сказанное, получаем существование $L^{-1}$, т.е. уравнение $Lx=y$ разрешимо однозначно.

Действительно, если $\exists\, x_1\neq x_2$, $Lx_1=y$, $Lx_2=y\ \Rightarrow L(x_1-x_2)=0\ \Rightarrow\ x_1-x_2=0.$

Пусть $R(L)$-область значений оператора $L$ , оценим норму обратного оператора $L^{-1}$. Обозначим: $Ly=V\ ,V=L^{-1}y.$

$$\|L^{-1}\| = \sup_{V\in D(L^{-1})} \frac{\|L^{-1}V\|}{\|V\|} = |D(L^{-1}) = R(L)| = \sup_{V\in R(L)} \frac{\|L^{-1}(V)\|}{\|V\|} = \sup_{y\in D(L)} \frac{\|y\|}{\|Ly\|} \le 1.$$

Покажем, что обратный оператор определен на всем $L_2$.

Очевидно:

$$R(L) = \{V \in L_2(J);\ \ V = Ly\}.$$

Итак: $Ly = -y'' + q(x)y$, $q(x) \ge 1$. Пусть $R(L) \ne H$. Тогда $\exists\, h \ne 0$; $h \in H$ такой, что $(R(L), h) = 0$. Это значит, что для $\forall y \in D(L)$, $(Ly, h) = 0$. В частности, и для $\forall y \in C_0^\infty(J)$. Далее, $C_0^\infty$ плотно в $H \subset L_2$. Поэтому существует последовательность $h_n \in C_0^\infty(J)$, $h_n \xrightarrow{L_2} h$, сходящаяся к $h$ по норме $L_2$.

$$0 = (Ly,\ h - h_n) + (Ly, h_n) \Rightarrow |(Ly, h_n)| = |(Ly, h - h_n)| \le \|Ly\| \cdot \|h - h_n\|.$$

Таким образом, $(Ly, h_n) \to 0$ при $n \to \infty \Rightarrow$, т.к. $L = L^*$, то и $(y, Lh_n) \to 0$ при $n \to \infty$. $(h_n \in D(L))$, $\{Lh_n\}$ слабо сходится: действительно, для любого $z \in L_2$.

$$|(z, Lh_n)| = |(z - z_m,\ Lh_n) + (z_m,\ Lh_n)| \le |(z - z_m,\ Lh_n)| + |(z_m,\ Lh_n)|.$$

Для $\forall \varepsilon > 0$, $|(z - z_m, Lh_n)| \le \|z - z_m\| \cdot \|Lh_n\| \to 0$, т.к. $\|z - z_m\| \to 0$, $|(z_m, Lh_n)| \to 0$ и $z_m \in D(L)$. Итак, $\{Lh_n\}$ слабо сходится к 0.

Тогда $(h,\ Lh_n) = (h - h_n, Lh_n) + (h_n, Lh_n) \to 0$. Но $(h - h_n,\ Lh_n) \to 0$, т.к. $h_n \to h, (h_n, Lh_n) \to 0$. Поэтому при $q(k) \ge 1$

$$(h_n, Lh_n) \ge \|h_n\|^2 \Rightarrow h_n \to 0 \Rightarrow h = 0.$$

## § 2. Общие теоремы о разделимости.

Сохраняются обозначения предыдущего параграфа. Покажем, что если $Jm\lambda \ne 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$, тогда $(L + \lambda E)^{-1}$ существует и ограничен.

Доказательство.

Итак, пусть $\exists y \in D(L)$; $Ly + \lambda y = 0$ при $Jm\lambda \ne 0$ и $\mathrm{Re}\,\lambda > -1$. По определению $L$ как замыкания, имеем: при $\{y_n\} \in C_0^\infty$ и $y_n \to y$, $Ly_n \to f \in L_2$ и полагаем $Ly \overset{def}{=} f$. Тогда надо показать, что при условиях на λ из

$$f + \lambda y = 0 \Rightarrow y = 0.$$

Имеем:

$$f, y >=< f - Ly_n, y > + < Ly_n, y > =< f - L\,y_n, y > + < Ly_n, y - y_n > + < Ly_n, y_n >.$$

$$< f, y >=< f - Ly_n, y >=< Ly_n, y - y_n > + < Ly_n, y_n >.$$

Тогда,

$$< y, y >=< (y - y_n) + y_n, (y - y_n) + y_n >= \|y - y_n\|^2 + \{< y - y_n, y_n > + < y_n, y - y_n >\} +$$

$$+ < y_n, y_n > = \|y - y_n\|^2 + \{< y - y_n, y_n > + < y - y_n, y_n >\} + \|y_n\|^2.$$

так как

$$f + \lambda y = 0 \Rightarrow 0 =< f + \lambda y, y >=< Ly + \lambda y, y >=< f, y > + \lambda < y, y >=$$

$$= \{< f - Ly_n, y >=< Ly_n, y - y_n > + \|y - y_n\|^2 + [< y - y_n, y_n > + < \overline{y - y_n}, y_n >]\} +$$

$$+ < Ly_n, y_n > + \lambda < y_n, y_n >= 0 \Rightarrow$$

В силу того, о чем говорились выше, и выражение в фигурных скобках стремится к $0 \Rightarrow [< Ly_n, y_n > + \lambda < y_n, y_n >] \to 0$. Тогда имеем $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$, что при $n > N(\varepsilon)$,

$$\left| < Ly_n, y_n > + \lambda \|y_n\|^2 \right| < \varepsilon.$$

$$< Ly_n, y_n >= \int_{-\infty}^{\infty} \left|y_n'\right|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} q(x)|y_n|^2 dx \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} |y_n'|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} [q(x) + \operatorname{Re}\lambda]|y_n|^2 dx + Jm\lambda \|y_n\|^2 \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y_n'|^2 + \int_{-\infty}^{\infty} (q(x) + \operatorname{Re}\lambda)|y_n|^2 dx < \varepsilon \quad , \qquad\qquad |Jm\lambda| \cdot \|y_n\|^2 < \varepsilon \ .$$

Любое из этих равенств подтверждает, что $\|y_n\| \to 0 \ \Rightarrow y = 0$.

Мы показали, что при условии $Jm\lambda \neq 0$ или $\operatorname{Re}\lambda > -1$, $(L + \lambda E)^{-1}$ существует. Для того чтобы показать, что этот оператор ограничен, воспользуемся неравенством Коши -Буняковского.

Пусть $z \in C_0^{\infty}(J)$:

$$\|(L + \lambda E)z\| \cdot \|z\| \geq |( \ (L + \lambda E)z, z \ )| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (-z'' + q(x)z + \lambda z)\bar{z}\, dx \right| =$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} |z'|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} [q(x) + \operatorname{Re}\lambda]|z|^2 dx + i \int_{-\infty}^{\infty} Jm\lambda |z|^2 dx \right| = \|a + b_i| \geq |a\| \geq$$

$$\geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} |z'|^2 dx + \int_{-\infty}^{\infty} [q(x) + \operatorname{Re}\lambda]|z|^2 dx \right| \geq \left| \int_{-\infty}^{\infty} |z'|^2 dx > 0, \ [q(x) + \operatorname{Re}\lambda] > \varepsilon > 0 \right| \geq$$

$$\geq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |z|^2 dx = \varepsilon \|z\|^2 \ \Rightarrow \|(L + \lambda E)z\| \geq \|z\| \cdot \varepsilon \ \ \Rightarrow$$

Это же равенство распространяется и на $\bar{L}_0$ вследствие непрерывности нормы. Это можно проделать аналогично доказательству $\exists \ (L + \lambda E)^{-1}$.

Тогда:

$$\left\|(L + \lambda E)^{-1}\right\| = \sup_{\substack{\|x\| \neq 0 \\ x \in D\left((L+\lambda E)^{-1}\right)}} \frac{\left\|(L + \lambda E)^{-1} x\right\|}{\|x\|} = \left| \begin{array}{c} т.к.\ (L + \lambda e)^{-1}\ \exists \\ и \quad R(L + \lambda E) = D(L + \lambda E)^{-1} \\ то\ \ найдем\ \ дальше \end{array} \right| =$$

$$= \sup_{\substack{z \in D(L+\lambda E) \\ z \neq 0}} \frac{\|z\|}{\|(L + \lambda E)z\|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

<u>**Лемма 2.1**</u> Для того чтобы оператор $Ly = -y'' + q(x)y$ был разделим, необходимо и достаточно, чтобы оператор $(L + \lambda E)$ был разделим при любом $\lambda$.

**Доказательство.**

(Н) Из того, что $L$ разделим, надо вывести разделимость $(L + \lambda E)$ при $\forall \lambda$.

Сразу видно, что $D(L) = D(L + \lambda E)$ (если бы $\exists z \in D(L)$ и $z \notin D(L + \lambda E)$, то из разделимости $L$ на элементе $z$ не следовала бы разделимость $(L + \lambda E)$ на этом же элементе, ибо $z \notin D(L + \lambda E)$, так что замечание всегда существенно).

Так как $L$ разделим, что из $y \in D(L) \in L_2$, $Ly \in L_2 \Rightarrow y'' \in L_2$. Но если

$$y,\ Ly \in L_2 \Rightarrow Ly + \lambda y \in L_2 \Rightarrow (L + \lambda)y \in L_2 \ ,\ y'' \in L_2$$

(Д) $(L + \lambda E)$ - разделим, это означает, что из $y \in L_2$, $(L + \lambda E)y \in L_2 \Rightarrow y'' \in L_2$.

Но из $(L + \lambda E)y \in L_2$, $y \in L_2 \Rightarrow Ly \in L_2$. Итак: $Ly \in L_2$ $y'' \in L_2 \Rightarrow Ly$ - разделим.

<u>Замечание.</u> Дословно повторяя рассуждения леммы, можно показать, что $L + r(x)$ и

$L$ разделимы одновременно, если $r(x)$ - непрерывная ограниченная функция.

Определение. Резольвентным множеством $\rho(T)$ оператора $T$ называется множество комплексных чисел для некоторых операторов $(T-\lambda E)^{-1}$ (соответственная точка $\lambda$ называется резольвентной), существует, определен на всем пространстве и ограничен.

**Лемма 2.2** Пусть $\lambda$ – резольвентная точка оператора $L$, $q(x)\geq 1$. Для того, чтобы оператор $L$ был разделим, $\Leftrightarrow$, чтобы оператор $q(x)(L+\lambda E)^{-1}$ был ограничен.

**Доказательство.**

(Н) Из условий: $L$ разделим $\lambda\in\rho(L)$ требуется показать, что оператор $q(x)(L+\lambda E)^{-1}$ ограничен ( из $L_2$ в $L_2$ ).

Так как $\lambda\in\rho(L)$, то $(L+\lambda E)^{-1}$ $\exists$ и ограничен, и поэтому при $\forall f\in L_2$.

$$y=(L+\lambda E)^{-1}\ f\in D(L).$$

С другой стороны, так как $L$ разделим, то $q(x)y\in L_2$. Итак, мы показали, что оператор $q(x)(L+\lambda E)^{-1}$ $\exists$ и определен на всем $L_2$. Если мы покажем, что он замкнут, то он же будет и ограничен по теореме Банаха о замкнутом графике.

Но оператор умножения на $q(x)$ замкнут ( $y_n\to 0$, в $L_2$ это $\lim y_n=0$ почти всюду $\Rightarrow q(x)\,y_n\to 0$ в $L_2$ ), а оператор $(L+\lambda E)^{-1}$ ограничен, следовательно, их произведение замкнутый оператор.

(Д). Пусть $q(x)(L+\lambda E)^{-1}$ ограничен и $\lambda\in\rho(L)$, надо показать, что оператор $L$ разделим.

Действительно, пусть $y\in D(L_\lambda), L_\lambda=L+\lambda E\Rightarrow L_\lambda y=f\in L_2$ по определению оператора $L_\lambda$ $\Rightarrow$ $q(x)y(x)=q(x)L_\lambda^{-1}f\in L_2$, ибо $q(x)L_\lambda^{-1}$ ограничен. Отсюда, в связи $L_\lambda y\in L_2$, $q(x)y\in L_2$ заметим, что $y''\in L_2$, а это показывает разделимость оператора $L_\lambda$, учитывая лемму 2.1, получаем и разделимость оператора $L$.

**Лемма 2.3.** Пусть $\lambda\in\rho(L)$. Для того чтобы оператор $L$ был разделим, необходимо и достаточно, чтобы был ограничен оператор $A=\dfrac{d^2}{dx^2}(L+\lambda E)^{-1}$ для $\forall\lambda\in\rho(L)$.

**Доказательство.**

Справедливо тождество:

$$-\frac{d^2}{dx^2}(L+\lambda E)^{-1}=\left(-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)+\lambda\right)(L+\lambda E)^{-1}-[q(x)+\lambda](L+\lambda E)^{-1}=E-(q(x)+\lambda)(L+\lambda E)^{-1}$$

Тогда если $A$ - ограничен, то ограничен ( $A-\lambda E$ ), и так как $\lambda$ - резольвентная точка, ограничен и $q(x)(L+\lambda E)^{-1}$, тогда, согласно лемме 2.2, оператор $L$ разделим. Обратно, если же $L$ разделим и $\lambda\in\rho(L)$, то

$$E-(q(x)+\lambda)L_\lambda^{-1}\ \text{- ограниченный оператор}$$

**Лемма 2.4.** Следующие условия эквивалентны:

1. $L$- разделим.
2. $A=\sup\limits_{u\in D(L)}\left\{\|qu\|_{L_2}\cdot\left(\|Lu\|_{L_2}+\|u\|_{L_2}\right)^{-1}\right\}<\infty$.
3. $\sup\limits_{u\in D(L)}\left\{\|u''\|_{L_2}\cdot\left(\|Lu\|_{L_2}+\|u\|_{L_2}\right)^{-1}\right\}<\infty$

Возьмем фиксированную функцию $\omega(t)$ со свойствами:

$$\omega(t)=\begin{cases}1, & |t|\le \frac{1}{2}\\ \le 1, & t\in J\\ 0\,, & |t|\ge 1\end{cases} \qquad \text{и} \qquad \omega(t)\in C_0^{(2)}(J)\,.$$

Очевидно, на каждом участке все дважды дифференцируемо, в том числе и в точках сопряжения.

Определим: $\omega_n(t)=\omega(t-n)$; это просто сдвиг графика $\omega(t)$ на *n* единицу вправо.

Рассмотрим $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2(t)$. Очевидно: $1\le \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2(t)\le 2$.

Введем новую функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi_n(t)=\frac{\omega_n(t)}{\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\omega_n^2(t)\right)^{\frac{1}{2}}}\ ;\ \text{Очевидно:}\ \ \varphi_n(t)\equiv 0 \ \ \text{при} \quad t\notin[n-1,n+1],\ \sum_{-\infty}^{\infty}\varphi_n^2(t)=1.$$

Рассмотрим теперь оператор $L_n y=-y''+q(x)y$ на отрезке $[n-1\,,\,n+1]=\Delta u$ с граничными значениями $y(n-1)=y(n+1)=0,\ \ q(x)\ge 1$.

Этот оператор строится так: берутся функции из класса $C_0^{\infty}$ с носителями, сосредоточенными внутри $\Delta u$. На этих функциях определяется оператор $L_n$, затем берется замыкание этого оператора из $L_2(\Delta u)$ в $L_2(\Delta u)$.

Сделаем некоторые тождественные преобразования, верные при $\forall f\in L_2(J)$; ибо $(L+\lambda E)^{-1}$ существует и ограничен и определен всюду на $L_2(J)$ при $Jm\lambda\ne 0$ и $\operatorname{Re}\lambda>-1$.

$$(L+\lambda E)^{-1}f=(L+\lambda E)^{-1}\left[f-\sum_{j=-\infty}^{\infty}(L_j+\lambda E)\varphi_j\cdot(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j\cdot f\right]+$$
$$+(L+\lambda E)^{-1}\left[\sum_{j=-\infty}^{\infty}(L_j+\lambda E)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j\cdot f\right].$$

Следовательно, схематично мы можем записать:

$$\left.\begin{array}{r}(L+\lambda E)^{-1}f=(L+\lambda E)^{-1}B_\lambda\cdot f+M_\lambda f\ ,\quad \text{где}\\ B_\lambda f=\left[E-\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}(L_j+\lambda E)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j\right]\cdot f\\ M_\lambda f=(L+\lambda E)^{-1}\left(\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}(L_j+\lambda E)\varphi_j(L_j+\lambda E)^{-1}\varphi_j\cdot f\right)\end{array}\right\}$$

## § 3. Оценка обратного оператора с весом.

Таким образом, создана необходимая база для применения леммы 2.2:

$\left\|q(x)(L+\lambda E)^{-1}\right\|=\left\|q(x)M_\lambda(E-B_\lambda)^{-1}\right\|\le\left\|q(x)M_\lambda\right\|\cdot C_\lambda$, где $B_\lambda$-оператор, полученный с помощью принципа локализации

Здесь $C_\lambda=\left\|(E-B_\lambda)^{-1}\right\|$. Мы знаем, что оператор $L$ разделим, если $q(x)\ge 1$ и в $\forall\lambda\in\rho(L)$ оператор $\left\|q(x)(L+\lambda E)^{-1}\right\|$ ограничен. Таким образом, надо изучить оператор $q(x)M_\lambda$ на ограниченность.

**Лемма 3.1.** Пусть $C^{-1} \le \dfrac{q(x)}{q(y)} \le C$ при $|x-y| \le 2$, $q(x) \ge 1$ (1)

Тогда: $\left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\| \le \dfrac{1}{q_j + \lambda}$; $q_j = \min\limits_{x \in \Delta_j} q(x)$.

**Доказательство.**

По неравенству Коши-Буняковского $\left\|\left(L_j + \lambda E\right)u\right\| \cdot \|u\| \ge \left(\left(L_j + \lambda E\right)u, u\right) =$

$$= \left| \begin{matrix} \textit{произведем интегрирование по частям} \\ \textit{и воспользуемся краевыми условиями} \end{matrix} \right| = \int\limits_{(j-1)}^{(j+1)} \left[-y'' + \left(q(x) + \lambda\right)y\right]\bar{y}\,dx =$$

$$= \int\limits_{(j-1)}^{(j+1)} \left[\,|y'|^2 + \left(q(x)+\lambda\right)|y|^2\right] dx \ge \left(\min_{x \in \Delta_j} q(x) + \lambda\right) \int\limits_{\Delta_j} |y|^2\,dx = \left| \begin{matrix} y \equiv u(x) \\ q_j = \min\limits_{x \in \Delta_y} q(x) \end{matrix} \right| = \left(q_j + \lambda\right) \cdot \|u\|^2.$$

Сокращая на $u$, получим $\left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} u\right\| \cdot \|u\| \ge \left(q_j + \lambda\right) \cdot \|u\|$ .

Обозначим: $\left(L_j + \lambda E\right)u = V \Rightarrow u = \left(L_j + \lambda E\right)^{-1} V \Rightarrow$, так как $u \in D\left(L_j\right)$, то эти переобозначения законны, ибо $\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}$ $\exists$ : $\Rightarrow$ $\|V\| \ge \left(q_j + \lambda\right)\left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1} V\right\|$, но, так как $q(x) \ge 1$, $\lambda > 0 \Rightarrow q_j > 0$ и

$$\frac{\left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\|}{\|V\|} \le \frac{1}{q + \lambda} \Rightarrow \left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\| \le \frac{1}{q + \lambda},$$ это верно, так как когда пробегает всю область $D\left(L_j\right)$, а $\left(L_j + \lambda E\right)$ имеет обратный, ограниченный на всем пространстве, то $V$ пробегает все $L_2\left(\Delta_j\right)$.

Далее пользуемся определением нормы.

**Лемма 3.2.** $\left\|q(x) M_\lambda\right\| \le 2^3 \sup\limits_{\{j\}} \left\|q(x)\,\varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\|$.

**Теорема.** Если выполнено условие

$$C^{-1} \le \frac{q(x)}{q(y)} \le C, \qquad q(x) \ge 1, \qquad |x-y| \le 1, \qquad (2)$$

то оператор Штурма-Лиувилля: $Ly = --y'' + q(x)y$ при $x \in J = (-\infty, \infty)$ разделим.

**Доказательство.**

По лемме 2.2: разделимость оператора $L$ равносильна условию $\forall \lambda \in \rho(L)$ $\left(q(x) \ge 1\right)$

Из принципа локализации: $\left\|q(x)\left(L + \lambda E\right)^{-1}\right\| \le C_\lambda \left\|q(x) M_\lambda\right\|$.

По лемме 1.5: $\left\|q(x) M_\lambda\right\| \le C \sup\limits_{\{j\}} \left\|q(x)\varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{L_2 \to L_2\left(\Delta_j\right)}$.

По лемме 1.4: для конкретного $j$

$$\left\|q(x)\varphi_j\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{L_2\left(\Delta_j\right) \to L_2\left(\Delta_j\right)} \le \sup_{x \in \Delta_j} q(x) \left\|\left(L_j + \lambda E\right)^{-1}\right\|_{L_2\left(\Delta_j\right) \to L_2\left(\Delta_j\right)} \le$$

$$\le \sup_{x \in \Delta_j} q(x) \cdot \frac{C}{\lambda + \min\limits_{x \in \Delta_j} q(x)} < C_5 < \infty$$

в силу условий теоремы и $C_5$ не зависит от $j \Rightarrow \left\|q(x)\left(L + \lambda E\right)^{-1}\right\| < \infty \Rightarrow L \in R$.

Примером может служить оператор $Ly = -y'' + e^{|x|}y$.

**Литература:**


1. Everitt W.H., Xiertz M. Some propereties of certein operators. Proc. London Math. Soc., 23(3), 1971, 301-304.

2. Everitt W.N., Yiertz M. Some ineqalies assocated with certein differential equations, Math. Z. 126, 1972, 308-326.

3. Everitt W.N., Yiertz M. On some properties of the rowers of a formally self-adjoins differential expessions. Proc. London Math. Soc., 24(3), 1972, 149-170.

4. Everitt W.N., Yiertz M. On some properties of the prower-ties of a formally self-adjoins differential expessions. Proc. London Math. Soc., 24(3), 1972, 756-768.

5. Бойматов К.Х. Теоремы разделимости.-Докл. АН СССР, 1973, т. 213, № 5, с. I009-I0II.

6. Биргебаев А. Элементы теорем вложения и теории разделимости. Аматы КазНПУ им. Абая Алматы,2008.

7. Муратбеков М.Б. Разделимость и спектр дифференциальных операторов смешанного типа. -Тараз, МКТУмон. -2006.

8. Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов. Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 3, с. 540-543.