УДК 517.977.56

Емцева Е.С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

ЗАДАЧА О МЯГКОЙ ПОСАДКЕ НА ПЛАНЕТУ

В данной работе рассмотрена технология математического моделирования процесса оптимального управления мягкой посадкой космических аппаратов на поверхность планеты без атмосферы и ее решение с помощью языка высоких технических вычислений Matlab 6.5.

При разработке спускаемых аппаратов принимаются две принципиально различные схемы спуска: с использованием аэродинамического торможения (для планет, имеющих атмосферу) и с использованием тормозного ракетного двигателя (для планет и других небесных тел, не имеющих атмосферы).

Посадка космических аппаратов на поверхность безатмосферной планеты предусматривает предварительный перевод космического аппарата на орбиту ожидания. В определенной точке переходной орбиты вновь включается двигатель и начинается участок основного торможения. В качестве исходной информации используются результаты измерения высоты и скорости снижения. Система управления мягкой посадкой должна обеспечить заданную точность посадки при минимальных затратах топлива.

Постановка задачи. Рассмотрим принцип посадки спускаемого аппарата на поверхность планеты без атмосферы. Согласно второму закону Ньютона уравнение сил, действующих на спускаемый аппарат, можно записать в виде:

$$F = P - G, \quad \text{или} \tag{1}$$

$$h' = -\mu \frac{m'}{m} - g, \tag{2}$$

где g – гравитационное ускорение планеты (м/с^2);

P = – $\mu m'$ – сила тяги тормозного двигателя (кг * м/с^2);

G = mg – гравитационная сила планеты (кг * м/с^2);

μ – скорость истечения газов относительно спускаемого аппарата (м/с);

$m' = \dfrac{dm}{dt}$ – секундный расход массы спускаемого аппарата за счет сгорания топлива (кг/с);

h – высота над поверхностью планеты (м);

h′ – скорость спускаемого аппарата.

Примем, что в начальный момент $t_0 = 0$ спускаемый аппарат находился на высоте h_0 с начальной скоростью v_0. Для обеспечения мягкой посадки в момент $t=t_1$ высота и скорость должны быть нулевыми, т.е.

$$h(t_1)=0; \; v(t_1) = \frac{dh(t)}{dt}\Big|_{t=t_1} = 0.$$

Критерием оптимальности служит критерий минимума расхода топлива

$$I = \int_0^{t_1} m' dt = min. \tag{3}$$

Введем стандартные обозначения переменных состояния

y_1*=h[м] – высота,*

y_2*=v[м/с]-скорость*

и еще одну координату $y_0(t)=I$. Заменив в (3) I на $y_0(t)$, а затем, продифференцировав этот интеграл, можно записать:

$$y_0' = m'(t) \text{ и } y_0 = m(t),$$

причем

$$y_0(0) = m_0, \; y_0(t_1) = m(t_1).$$

Введем еще одну функцию $u = -m'$ [кг/с] – величину, пропорциональную скорости изменения массы спускаемого аппарата за счет расхода топлива при торможении. Тогда имеем

$$y'_0 = m' = -u.$$

Используя (2) и принятые выше обозначения, получим еще два уравнения.

$$y'_1 = y_2,$$

$$y'_2 = -\mu \frac{y'_0}{y_0} - g = \mu \frac{u}{y_0} - g.$$

Получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &y'_0 = -u, && f_0 = -u, \\ &y'_1 = y_2, && f_1 = y_2, \qquad\qquad (4) \\ &y'_2 = \mu \frac{u}{y_0} - g, && f_2 = -\mu \frac{u}{y_0} - g. \end{aligned}$$

Теперь сформулируем задачу о мягкой посадке: найти кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, при которой решение $y(t)$ системы уравнений (4) удовлетворяет при $t = 0$ заданным начальным условиям

$$y(0) = h; \ \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=0} = v,$$

а при некотором $t = t_1$ – условиям

$$y(t_1) = 0; \ \frac{dy(t)}{dt}\Big|_{t=t_1} = 0,$$

причем такое, что функционал (3) принимает минимальное возможное значение на множестве таких функций u. Сформулированная задача является простейшей задачей оптимального управления. Управлением служит функция u.

Рассмотрим системы, в которых связь между переменными управления и фазовыми переменными математически может быть выражена при помощи следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, u), \qquad t_0 \le t \le T. \qquad (5)$$

Здесь правая часть представляет собой функции $f_1, f_2, \ldots, f_n$ от $n + r + 1$ переменных, которые определяют закон изменения производных (т.е. скоростей изменения) фазовых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Существует и, как правило, не один набор управляющих функций $u = u(t) = (u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t))$, который решает задачу управления. Для отбора лучшего управления вводят *критерий оптимальности.*

$$I(u) = \int_{t_0}^{T} f_0(t, y(t), u(t))dt, \qquad (6)$$

в котором $f_0(t, y_1, \ldots, y_n, u_1, \ldots, u_r)$ — фиксированная функция $n + r + 1$ переменных, обладающая такими свойствами, чтобы обеспечить существование интеграла.

Итак, *задача оптимального управления* для системы дифференциальных уравнений (5) заключается в максимизации интегрального функционала (6) на множестве всех допустимых управлений, переводящих систему (5) из заданного начального состояния в заданное конечное. Решением этой задачи является управление (вектор-функция) $u^*(t) = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_r^*(t))$, которое именуют *оптимальным управлением*. Этому управлению однозначно соответствует определенная траектория $y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t), \ldots, y_n^*(t))$, называемая *оптимальной траекторией*. При этом пару векторных функций $y^*(t)$, $u^*(t)$ называют *оптимальным процессом*.

Центральное место в теории управления занимает принцип максимума, смысл которого заключается во вводе дополнительной *функции Гамильтона (функции*

Понтрягина) или *гамильтониана:*

$$H(t,y,\vec{\psi},u)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(t,y,u),$$

где $y = (y_1,y_2...,y_n)$, $u = (u_1,u_2...,u_n)$, $f_0, f_i,..., f_n$ — функции из (5), (6) и $\vec{\psi} = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$.

Применим вышеописанный принцип максимума к поставленной задаче. Согласно принципу максимума, управление оптимально, если гамильтониан

$$H=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(y,u), \tag{7}$$

(f_i – правые части системы уравнений (4); n=2), принимает максимальное значение, а вспомогательные переменные ψ_i связаны с гамильтонианом и переменными состояния уравнениями:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_i}{dt}=\dfrac{\partial H}{\partial\psi_i},\\ \dfrac{d\psi_i}{dt}=-\dfrac{\partial H}{\partial y_i}, \quad i=0,1,...,n.\end{cases} \tag{8}$$

Подставив $f_i(y,u)$ из (4) в (7), получаем гамильтониан

$$H= -\psi_0 u+\psi_1 y_2+\psi_2\left(\mu\frac{u}{y_0}-g\right)=\psi_1 y_2-\psi_2 g+\left(\psi_2\frac{\mu}{y_0}-\psi_0\right)u, \tag{9}$$

дифференцируя который, согласно второму уравнению системы (8), находим уравнения для вспомогательных функций:

$$\frac{d\psi_0}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_0}=\mu\frac{u}{y_0^2}\psi_2,$$

$$\frac{d\psi_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_1}=0,$$

$$\frac{d\psi_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial y_2}=-\psi_1.$$

Подставив в первое уравнение системы (8) H из уравнения (9), находим:

$$\frac{dy_0}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi_0}=-u,$$

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi_1}=y_2,$$

$$\frac{dy_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial\psi_2}=-g+\mu\frac{u}{y_0}.$$

Из уравнения (9) определим экстремум множителя,

$$\alpha=\psi_2\frac{\mu}{y_0}-\psi_0,$$

стоящего перед u, для чего найдем производную

$$\alpha'=\mu\frac{\psi_2' y_0-\psi_2 y_0'}{y_0^2}-\psi_0'=-\psi_1\frac{\mu}{y_0}.$$

Т.к. из уравнения (10) $\psi_1=const\neq 0$, то производная α' в нуль не обращается. Это значит, что множитель α изменяется монотонно, не имеет ни максимума, ни минимума.

Следовательно, получаем оптимальным по критерию (3) управление.

$$u=\begin{cases}0, & 0\le t\le \xi_0,\\ u_0, & \xi_0\le t\le t_1,\\ 0, & t\ge t_1\end{cases}$$

На интервале $0\le t\le \xi_0$ спускаемый аппарат снижается только под воздействием гравитационной силы планеты. В момент ξ_0 включается тормозной двигатель. В момент времени t_1 спускаемый аппарат достигает поверхности планеты и двигатель выключается. Таким образом, необходимо определить моменты включения двигателя ξ_0 и момента посадки t_1.

Для определения этих моментов проинтегрируем сначала дифференциальные уравнения системы (4) на первом (пассивном) участке снижения, положив в них $u=0$, затем аналогично проинтегрируем эти же уравнения на втором (активном) участке снижения, положив в них $u=u_0$. Используя также начальные условия (5), окончательно получаем систему двух трансцендентных уравнений с двумя искомыми моментами времени ξ_0 и t_1:

$$0= h_0 + v_0\xi_0 - g\frac{\xi_0^2}{2} + (v_0 - g\xi_0)(t_1-\xi_0) -$$

$$-\frac{g}{2}(t_1-\xi_0)^2+\mu\frac{m_o}{u_0}[(1-\frac{u_0(1-\xi_0)}{m_0})\ln(1-\frac{u_0(1-\xi_0)}{m_0})+\frac{u_o}{m_0}(t_1-\xi_0)],$$

$$0 = v_0 - g\xi_0 - g(t_1-\xi_0) - \mu ln(1-\frac{u_0(t_1-\xi_0)}{m_0}),$$

где при $t=\xi_0$:

$$y_2(\xi_0)=v_0 - g\xi_0,$$

$$y_1(\xi_0)=h_0 + v_0\xi_0 - g\frac{\xi_0^2}{2}.$$

Рассмотрим пример нахождения моментов включения и выключения двигателя ξ_0, t_1 аппарата, выполняющего спуск на Луну.

Исходные данные для расчета:

$g=1{,}623$ *м/с*^{2} – гравитационное ускорение Луны;

$u_0=1$ *кг/с* – секундный расход топлива;

$\mu=2500$ *м/с* – скорость истечения газов относительно спускаемого аппарата;

$h_0=50000$ *м* – начальная высота;

$v_0=0$ *м/с* – начальная скорость снижения.

Ниже приведен листинг программы нахождения временных параметров.

```
>> syms ksi0 t1
h0=50000; v0=0; g=1.623; mu=2500; m0=1000; u0=1;
x1_ksi0=h0+v0*ksi0-g*ksi0^2/2;  x2_ksi0=v0-g*ksi0;
eq1=x1_ksi0+x2_ksi0*(t1-ksi0)-1/2*g*(t1-ksi0)^2+mu/u0*m0*((1-u0*(t1-ksi0)/m0)*log(1-u0*(t1-ksi0)/m0)+u0*(t1-ksi0)/m0);
eq2=x2_ksi0-g*(t1-ksi0)-mu*log(1-u0*(t1-ksi0)/m0); [ksi0,t1]=solve(eq1,eq2,'ksi0,t1');
>> t1
t1 =371.54610305169575088165088985482
>> ksi0=(exp((v0-g*t1)/mu)*m0-m0+u0*t1)/u0
ksi0 =157.22450343355956062202380574853.
```

В результате выполнения программы мы получили искомые моменты времени t_1 = 371.546 и ξ_0 =157.225.

В данной работе мы с помощью принципа максимума решили задачу о мягкой посадке на планету. Было получено оптимальное управление для обеспечения мягкой посадки на Луну при минимальном расходе топлива.

Литература:

1. Ногин В.Д.. Введение в оптимальное управление. – СПб.: ЮТАС, 2008.

2. Соколов Ю.Н. Радиоелектронні і компьютерні системи. –Харьков, 2009.

3. Ногин В.Д., Протодьяконов И.О., Евлампиев И.И. Основы теории оптимизации. -М.: Высшая школа, 1986. – 384 с.