УДК 532.546

Мурзакматов М.У., Шамырканов М.Б.

ЫГУ им.К.Тыныстанова

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД В ОДНОСЛОЙНОЙ ПЛАСТАХ

Разработана методика приближенного решения задачи оптимального управления УГВ в двумерной постановке.

Рассмотрим плоскую задачу нестационарной безнапорной фильтрации грунтовых вод [1]

$$\mu_в \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(h-b)\frac{\partial h}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k(h-b)\frac{\partial h}{\partial y}\right] = f(x,y,t), \quad (x,y)\in D, \quad 0 < t \le t_0 , \qquad (1)$$

$$h(x,y,0) = h_0(x,y), \quad (x,y)\in D, \qquad (2)$$

$$k(h-b)\frac{\partial h}{\partial n} + \beta h = \alpha, \quad (x,y)\in S = \partial D, \quad 0 < t \le t_0 , \qquad (3)$$

где $h(x,y,t)$ – уровень грунтовых вод (УГВ); $k = k(x,y)$ – коэффициент фильтрации грунта; $\mu_в$ – коэффициент водоотдачи или недостатка насыщения; $f(x,y,t)$ – функция инфильтрации; $h_0(x,y)$ – УГВ в начальный момент $t = 0$; $b = b(x,y)$ – поверхность водоупора; $\alpha = \alpha(x,y,t)$ и $\beta = \beta(x,y,t)$ – заданные функции; t_0 – фиксированный момент времени; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к границе области фильтрации; D – область фильтрации, $S = \partial D$ – ее граница.

Для решения задачи (1) – (3) предварительно линеаризуем ее путем введения функции

$$T_в(x,y,t) = k(\tilde{h} - b), \qquad (4)$$

где $\tilde{h}(x,y,t)$ – значения функции $h(x,y,t)$ из предыдущей итерации.

Управление уровнем грунтовых вод можно производить путем устройства горизонтальных и вертикальных дрен (при понижении УГВ) или проведением поливов (при повышении), другими словами, в качестве допустимого управления используем функцию $f(x,y,t)$.

Задача оптимального управления УГВ заключается в создании такого режима с помощью управления $f(x,y,t)$, при котором в момент времени t_0 грунтовые воды заняли бы заданное оптимальное положение. Математически это означает нахождение такого допустимого управления $f^0(x,y,t)$, что соответствующие УГВ $h^0(x,y) = h(x,y,t_0)$ были как можно близки к заданной функции $\varphi(x,y)$, другими словами, требуется найти функцию $f(x,y,t)$, доставляющую минимум функционалу [2]

$$I(f) = \iint_D \left[h(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right]^2 dx\,dy + \alpha\int_0^{t_0}\iint_D f^2(x,y,t)\,dx\,dy\,dt . \qquad (5)$$

Здесь α – положительное число, называемое параметром регуляризации [3]. Допустимое управление $f^0(x,y,t)$, доставляющее минимум функционалу (5), называется оптимальным управлением, а соответствующее им УГВ $h^0(x,y) = h(x,y,t_0)$ – оптимальными УГВ.

Возьмем некоторое допустимое управление $f(x,y,t)$, а соответствующее ему УГВ находим, решая задачу (1) – (3). Затем дадим управлению $f(x,y,t)$ некоторое приращение Δf и обозначим через $\Delta h(x,y,t)$ соответствующее приращение функции $h(x,y,t)$. Тогда Δh является решением задачи [4]

$$\mu_в \frac{\partial \Delta h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right) = \Delta f(x,y,t) \quad ,$$

$$\Delta h(x,y,0) = 0, \quad (x,\, y) \in D, \tag{6}$$

$$T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial n} + \beta \cdot \Delta h = 0, \quad (x,y) \in S, \quad 0 < t \le t_0 \ .$$

Теперь вычислим приращение функционала (5):

$$\Delta I = \iint_D \left\{ \left[h\,(x,y,t_0) + \Delta h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right]^2 - \left[h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right]^2 \right\} dx\,dy +$$

$$+ \alpha \int_0^{t_0} \iint_D \left\{ \left[f\,(x,y,t) + \Delta f\,(x,y,t)\right]^2 - f^{\,2}(x,y,t) \right\} dx\,dy\,dt\,.$$

Вычислим подынтегральные выражения:

$$\left[h\,(x,y,t_0) + \Delta h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right]^2 - \left[h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right]^2 =$$

$$= 2\cdot \Delta h\,(x,y,t_0)\left[h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right] + \Delta h^2\,(x,y,t_0),$$

$$\left[f\,(x,y,t) + \Delta f\,(x,y,t)\right]^2 - f^{\,2}(x,y,t) = 2\cdot f\,(x,y,t)\cdot \Delta f\,(x,y,t) + \Delta f^{\,2}(x,y,t).$$

Тогда

$$\Delta I = \iint_D \left\{ 2\cdot \Delta h\,(x,y,t_0)\left[h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right] + \Delta h^2\,(x,y,t_0) \right\} dx\,dy +$$

$$+ \alpha \int_0^{t_0} \iint_D \left[2\cdot f\,(x,y,t)\cdot \Delta f\,(x,y,t) + \Delta f^{\,2}(x,y,t) \right] dx\,dy\,dt =$$

$$= 2\iint_D \left[h\,(x,y,t_0) - \varphi(x,y)\right]\cdot \Delta h\,(x,y,t_0)\,dx\,dy + 2\alpha \int_0^{t_0} \iint_D f\,(x,y,t)\cdot \Delta f\,(x,y,t)\,dx\,dy\,dt +$$

$$+ \iint_D \Delta h^2\,(x,y,t_0)\,dx\,dy = \alpha \int_0^{t_0} \iint_D \Delta f^{\,2}\,(x,y,t)\,dx\,dy\,dt\,. \tag{7}$$

Введем произвольную функцию $\psi(x,y,t)$ и составим скалярное произведение (функционал):

$$L(\psi,h,f) = \int_0^{t_0} \iint_D \psi(x,y,t)\left[\mu_в \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_в \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_в \frac{\partial h}{\partial y}\right) - f\,(x,y,t)\right] dx\,dy\,dt = 0\,. \tag{8}$$

Таким же образом составим приращение этого функционала:

$$\Delta L(\psi,\Delta h,\Delta f) = \int_0^{t_0} \iint_D \psi(x,y,t)\left[\mu_в \frac{\partial \Delta h}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial x}\right) - \right.$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)-\Delta f(x,y,t)\Bigg]dx\,dy\,dt=0. \qquad (9)$$

Второе слагаемое формулы (9) интегрируем по частям:

$$\int_0^{t_0}\iint_D \psi(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_в \frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dt=$$

$$=\int_0^{t_0}\int_S \psi(x,y,t)T_в(x,y,t)\frac{\partial \Delta h}{\partial n}ds\,dt-\int_0^{t_0}\iint_D T_в\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Delta h}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt=$$

$$=-\int_0^{t_0}\int_S \psi(x,y,t)\cdot\beta(x,y,t)\cdot\Delta h(x,y,t)ds\,dt-$$

$$-\int_0^{t_0}\iint_D T_в\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Delta h}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt. \qquad (10)$$

Формулу (10) подставим в уравнение (7):

$$\Delta L(\psi,\Delta h,\Delta f)=\int_0^{t_0}\iint_D\Bigg[\psi(x,y,t)\mu_в\frac{\partial \Delta h}{\partial t}+T_в\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \Delta h}{\partial x}+\frac{\partial \psi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \Delta h}{\partial y}\right)-$$

$$-\psi(x,y,t)\cdot\Delta f(x,y,t)\Bigg]dx\,dy\,dt+\int_0^{t_0}\int_S \psi(x,y,t)\cdot\beta(x,y,t)\cdot\Delta h(x,y,t)ds\,dt=0. \qquad (11)$$

Функцию $\psi(x,y,t)$ определим теперь как обобщенное решение краевой задачи

$$\mu_в\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_в\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_в\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0,\quad 0\le t<t_0,\quad (x,y)\in D,$$

$$\psi(x,y,t_0)=-2\frac{h(x,y,t_0)-\varphi(x,y)}{\mu_в}, \qquad (12)$$

$$T_в\frac{\partial \psi}{\partial n}+\beta\psi=0,\quad 0\le t<t_0,\quad (x,y)\in S.$$

Возьмем произвольную функцию $g(x,y,t)$, обращающуюся в нуль при $t=0$, и образуем по аналогии с (8) равенство

$$\int_0^{t_0}\iint_D g(x,y,t)\left[\mu_в\frac{\partial \psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(T_в\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_в\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dt=0. \qquad (13)$$

Левую часть равенства (13) интегрируем по частям:

$$\int_0^{t_0}\iint_D g(x,y,t)\cdot\mu_в\frac{\partial \psi}{\partial t}dx\,dy\,dt=\iint_D \mu_в\, g(x,y,t)\cdot\psi(x,y,t)\Big|_{t=0}^{t=t_0}dx\,dy-$$

$$-\int_0^{t_0}\iint_D \mu_в\,\psi(x,y,t)\frac{\partial g}{\partial t}\,dx\,dy\,dt=\iint_D \mu_в\, g(x,y,t_0)\left\{-2\frac{h(x,y,t_0)-\varphi(x,y)}{\mu_в}\right\}dx\,dy-$$

$$-\int_0^{t_0}\iint_D \mu_в\,\psi(x,y,t)\frac{\partial g}{\partial t}\,dx\,dy\,dt\,; \qquad (14а)$$

$$\int_0^{t_0}\iint_D g(x,y,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T_в\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T_в\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dt=$$

$$=\int_0^{t_0}\int_S g(x,y,t)\cdot T_в\frac{\partial\psi}{\partial n}\,ds\,dt-\int_0^{t_0}\iint_D T_в\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt=$$

$$=-\int_0^{t_0}\int_S g(x,y,t)\cdot\beta(x,y,t)\cdot\psi(x,y,t)\,ds\,dt-\int_0^{t_0}\iint_D T_в\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt\,.$$
(14в)

Формулы (14а) и (14в) подставим в уравнение (13). Имеем

$$-2\iint_D g(x,y,t_0)[h(x,y,t_0)-\varphi(x,y)]\,dx\,dy-\int_0^{t_0}\iint_D \mu_в\,\psi(x,y,t)\frac{\partial g}{\partial t}\,dx\,dy\,dt-$$

$$-\int_0^{t_0}\int_S g(x,y,t)\cdot\beta(x,y,t)\cdot\psi(x,y,t)\,ds\,dt-\int_0^{t_0}\iint_D T_в\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)dx\,dy\,dt=0,$$

или

$$2\iint_D g(x,y,t_0)[h(x,y,t_0)-\varphi(x,y)]\,dx\,dy+\int_0^{t_0}\iint_D\left[\mu_в\cdot\psi(x,y,t)\frac{\partial g}{\partial t}+\right.$$

$$\left.+T_в\left(\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]dx\,dy\,dt+\int_0^{t_0}\int_S g(x,y,t)\cdot\beta(x,y,t)\cdot\psi(x,y,t)\,ds\,dt=0\,. \qquad (15)$$

Полагая в равенстве (15) $g(x,y,t)=\Delta h(x,y,t)$ и вычитая из (15) выражение (11), получаем

$$2\iint_D [h(x,y,t_0)-\varphi(x,y)]\Delta h(x,y,t_0)\,dx\,dy+\int_0^{t_0}\iint_D \psi(x,y,t)\Delta f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt=0\,. \qquad (16)$$

Учитывая (16), для приращения ΔI получаем формулу

$$\Delta I=-\int_0^{t_0}\iint_D[\psi(x,y,t)-2\alpha f(x,y,t)]\Delta f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt+$$

$$+\iint_D \Delta h^2(x,y,t_0)\,dx\,dy+\alpha\int_0^{t_0}\iint_D \Delta f^2(x,y,t)\,dx\,dy\,dt\,. \qquad (17)$$

Считая в формуле (17) функцию $f(x,y,t)$ – оптимальным управлением, а $h(x,y,t)$ – соответствующими ему оптимальными УГВ, т.е. полагая $f=f^0$, $h=h^0$ и $\psi=\psi^0$, получим, что приращение функционала (17) должно быть неотрицательным:

$$\Delta I = -\int_0^{t_0}\iint_D \left[\psi^0(x,y,t) - 2\alpha f^{\,0}(x,y,t)\right]\Delta f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt +$$

$$+\iint_D \Delta h^2(x,y,t_0)\,dx\,dy + \alpha\int_0^{t_0}\iint_D \Delta f^{\,2}(x,y,t)\,dx\,dy\,dt \ge 0. \qquad (18)$$

Следовательно,

$$\int_0^{t_0}\iint_D \left[\psi^0(x,y,t) - 2\alpha f^{\,0}(x,y,t)\right]\Delta f(x,y,t)\,dx\,dy\,dt \le 0, \qquad (19)$$

т.е. если для функции $\psi^0(x,y,t)$ и для любого допустимого приращения $\Delta f(x,y,t)$ имеет место неравенство (19), то управление $f^{\,0}(x,y,t)$ и соответствующие им УГВ $h^0(x,y,t)$ являются оптимальными.

Введя функцию

$$H\left(\psi^0, h^0, f\right) = f(x,y,t)\cdot\psi^0(x,y,t) - \alpha f^{\,2}(x,y,t),$$

неравенство (19) запишем в виде

$$\int_0^{t_0}\iint_D H\left(\psi^0, h^0, f(x,y,t)\right)dx\,dy\,dt \le \int_0^{t_0}\iint_D H\left(\psi^0, h^0, f^{\,0}\right)dx\,dy\,dt. \qquad (20)$$

Неравенство (20) равносильно равенству

$$H\left(\psi^0, h^0, f^{\,0}\right) = \max_f H\left(\psi^0, h^0, f\right), \qquad (21)$$

выражающему принцип максимума.

Из условия (21) следует, что оптимальное управление $f^{\,0}(x,y,t)$ должно удовлетворять равенству

$$f^{\,0}(x,y,t) = \frac{1}{2\alpha}\psi(x,y,t)\ . \qquad (22)$$

Следовательно, управление $f(x,y,t)$ определяется с помощью функции $\psi(x,y,t)$, являющейся решением ретроспективной краевой задачи (12) с «начальным» условием

$$\psi(x,y,t_0) = -2\frac{h(x,y,t_0) - \varphi(x,y)}{\mu_в}\ . \qquad (23)$$

Отсюда получается следующая идея решения поставленной задачи: задавая начальное приближение управления $f^{(1)}(x,y,0)$ (например, $f^{(1)}(x,y,0)=0$) и решая задачу (1) – (3), находим УГВ $h^{(1)}(x,y,t_0)$, затем по формуле (23) определяем $\psi^{(1)}(x,y,t_0)$. Используя эту функцию в качестве «начального» условия, решаем ретроспективную задачу (12), находим функцию $\psi^{(2)}(x,y,t)$ и вычислим второе приближение управления $f^{(2)}(x,y,t)$ по формуле (22) и переходим к следующей итерации и т.д.

Литература:

1. Полубаринова–Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969. – 414 с.
2. Егоров А.С. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1974. – 392 с.
4. Ч.Дж.Джаныбеков, А.А.Уралиев. Об одном приближенном способе конструирования оптимального управления движениями подземных вод в неоднородной пористой среде. // Вестник ИГУ, № 11, 2004. – С.19–23.