УДК 5.17.947.537

Тогочуев А. Ж., Сагынтай кызы Н.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -U_1''' + (|x| + \|U\| + 1)U &= f_1(x) \\ -U_2''' + (|x| + \|U\| + 1)U &= f_2(x) \\ &\text{-----------------} \\ -U_n''' + (|x| + \|U\| + 1)U &= f_n(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

Основным результатом этой работы является доказательство существования решений системы (1), имеющей ограниченную производную третьего порядка.

Пусть E_n n-мерное пространство Евклида. Обозначим через $H=E_n(R, R_n)$ евклидово пространство, полученное пополнением C_0^∞ (R, R_n)-множеством финитных бесконечно гладких вектор–функций, определенных на R=(-∞,∞) со значением в R_n по норме

$$\| f(x)\|_{H} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Введем обозначения:

$$Q(x,U) = \begin{pmatrix} |x|+\|U\|+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |x|+\|U\|+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |x|+\|U\|+1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) записывается в операторном виде

$$-U''' + Q(x,U)U = f(x) \quad , x \in R,\ f \in E_n(R, R_n)\ . \qquad (2)$$

К операторному уравнению (2) используем теорему из работы [3].

Теорема [3]**:** Пусть Q $(x$,U) непрерывная по совокупности переменных операторная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) Для почти всех x и U операторы Q(x, U) самосопряжены и являются обратными к вполне непрерывным операторам.

б) $\langle Q(x,U) f, f \rangle_{En} \geq s(x) \langle f, f \rangle_{En}$, где $s(x)$ положительная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $|x| \to +\infty$.

в) $$\sup_{|x-z|\le 2}\ \sup_{\|C_1-C_2\|H \le 2A} \left\{ \begin{aligned} &\big\| [Q(x,c_1) - Q(t,c_2)][Q(x,c_1)+\lambda E]^{-1} \big\|_{En} + \\ &+ \big\| [Q(t,c_2 - Q(x,c_1)][Q(t,c_2)+\lambda E]^{-1} \big\|_{En} \end{aligned} \right\} \le T(A),$$

где $T(A) \le o(1)$ при $\lambda >> 1$ для любого конечного числа A.

Тогда существует число $\mu(A, f)$ и при $\lambda > \mu(A, f)$ уравнение (2) для любой правой части f(x)$\in H$ имеет решение U(x)$\in H$ такое, что $U''' \in$ H.

В силу этой теоремы для доказательства существования решений системы (1) с ограниченной производной третьего порядка нам остается проверить условия а), б), в) для матрицы Q(x,U).

Условие **а)** очевидно, т.к Q(x,U) диагональная матрица порядка n и det Q(x,U)$\neq 0$.

Проверяем условие **б):**

$$Q(x,U)\,f=\begin{pmatrix} |x|+\|U\|+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |x|+\|U\|+1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & |x|+|U|+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix}=\left(|x|+\|U\|+1\right)\cdot\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix}=$$

$$=\left(|x|+\|U\|+1\right)f.$$

Тогда

$$\left\langle Q(x,U)\,f,\,f\right\rangle_{\mathrm{En}}=\left\langle (|\,x\,|+\|\,U\,\|+1)\,f,\,f\right\rangle_{\mathrm{En}}=(|x|+\|U\|+1)\left\langle f,\,f\right\rangle_{\mathrm{En}}.$$

Отсюда

$$\left\langle Q(x,U)\,f,\,f\right\rangle_{\mathrm{En}}\geq |x|\left\langle f,\,f\right\rangle_{\mathrm{En}}.$$

Так как |x|-положительная функция и $|x|\to+\infty$ при $x\to\infty$, поэтому условие **б)** выполнено.

Чтобы проверить условие **в),** нужно найти обратную матрицу $\left[Q(x,c_1)+\lambda E\right]^{-1}$. Так как

$$\det\left[Q(x,c_1)+\lambda E\right]=\begin{vmatrix} |\,x\,|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\,x\,|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\,x\,|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda \end{vmatrix}=(|x|+\|c_1\|+1+\lambda)^n$$

и алгебраические дополнения

$$Q_{ij}=\begin{cases}(|\,x\,|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda\,)^{n-1} & \textit{при}\quad i=j\\ 0 & \textit{при}\quad i\neq j\end{cases}\quad (i,j=1,\,2\ldots,\,n),$$

То

$$\left[Q(x,c)+\lambda E\right]^{-1}=\frac{1}{(|\,x\,|+\|\,c\,\|+1+л)^n}$$

$$*\begin{pmatrix} |\left(x|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda\right)^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\left(x|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda\right)^{n-1} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \left(|x|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda\right)^{n-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{|x|+\|c_1\|+1+\lambda}E.$$

Теперь оценим норму

$$\|\left[Q(x,c_1)-Q(t,c_2)\right]\left[Q(x,c_1)+\lambda E\right]\|_{En.}$$

Так, как

$$Q(x,c_1)-Q(t,c_2)=(|x|-|t|+\|c_1\|-\|c_2\|)E.$$

Тогда $\|\left[Q(x,c_1)-Q(t,c_2)\right]\left[Q(x,c_1)+\lambda E\right]\|_{\mathrm{En}}=$

$$= \left\| \frac{|x| - |t| + \|c_1\| - \|c_2\|}{|x| + \|c_1\| + 1 + \lambda} E \right\|_{E_n} = \sqrt{3}\frac{|x| - |t| + \|c_1\| - \|c_2\|}{|x| + \|c_1\| + 1 + \lambda} \le \sqrt{3}\frac{|x-t| + \|c_1 - c_2\|}{1+\lambda}$$

Отсюда

$$\sup_{|x-t|\le 2}\ \sup_{\|C_1-C_2\|\le 2A} \left\{ \left\| [Q(c_1) - Q(c_2)][Q(x,c_1) + \lambda E]^{-1} \right\|_{E_n} + \left\| [Q(t,c_2) - Q(x,c_1)][Q(t,c_2) + \lambda E]^{-1} \right\|_{E_n} \right\} =$$

$$= \sup_{|x-t|\le 2}\ \sup_{\|C_1-C_2\|\le 2A} 2\sqrt{3}\frac{|x-t| + \|c_1 - c_2\|}{1+\lambda} \le 2\sqrt{3}\frac{2+2A}{1+\lambda} = 4\sqrt{3}\frac{1+A}{1+\lambda} = T(A)$$

Число $T(A)= 4\sqrt{3}\dfrac{1+A}{1+\lambda}$ ограничено при любом конечном A и $T(A)$<o (1) при λ >>1.

Итак, матрица Q(x,U) удовлетворяет всем условиям вышеуказанной теоремы. Поэтому система (1) имеет решение с ограниченной производной третьего порядка, т.е. $U''' \in H$.

Литература:

1. Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1979.
2. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы .-М.: Наука, 1969.
3. Тогочуев А.Ж., Муратбеков М.Б. Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом. В кн.: Тезисы докладов конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Великого Октября. –Фрунзе, 1987.