УДК 544.272

Мурзакматов М.У.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ – МОЩНЫЙ МЕТОД НАУЧНОГО ПОЗНАНИЯ

Раскрывается роль математической модели как мощного метода познания мира, управления различными явлениями и прогнозирования их. Подчеркивается важность математического моделирования в обучении студентов специальности «Прикладная математика и информатика».

Математика является одной из древних наук. Она зародилась на заре человеческой цивилизации под влиянием потребностей практики. Строительство, измерение площадей земельных участков, навигация, торговые расчеты, управление государством требовали умения производить арифметические вычисления и определенных геометрических знаний. В дальнейшем математика развивалась в стройную логическую систему как составная часть общего комплекса научных знаний. Потребности естествознания, техники, всей практической деятельности людей постоянно ставили перед математикой новые задачи и стимулировали ее развитие. В свою очередь, прогресс в математике делал математические методы более эффективными, расширял сферу их применения и способствовал общему научно-техническому прогрессу.

Роль математики в различных областях человеческой деятельности в разное время была существенно различной. Она складывалась исторически, и существенное влияние на нее оказывали два фактора: уровень развития математического аппарата и степень зрелости знаний об изучаемом объекте, возможность описать его наиболее существенные черты и свойства на языке математических понятий и уравнений или, как теперь принято говорить, возможность построить «математическую модель» изучаемого объекта.

Математическая модель, основанная на некотором упрощении, идеализации, не тождественна объекту, а является его приближенным отражением. Однако благодаря замене реального объекта соответствующей ему моделью появляется возможность сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для этого универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта. Математика позволяет единообразно описать широкий круг факторов и наблюдений, провести их детальный количественный анализ, предсказать, как поведет себя объект в различных условиях, т.е. спрогнозировать результаты будущих наблюдений. А ведь прогнозирование – трудная задача, и оправдывающиеся прогнозы являются предметом особой гордости любой науки.

Сложность построения и исследования математической модели существенно зависит от сложности изучаемого объекта. Математические методы давно и весьма успешно применяются в механике, физике, астрономии, т.е. в науках, в которых изучаются наиболее простые формы движения материи. Математика стала языком этих наук, относящихся к разделу точных.

Приведем примеры математических моделей, встречающихся в школьном курсе математики и физики.

Понятие целого положительного (т.е. натурального) числа не появилось само по себе, а вначале моделировало количественную сторону определенного набора предметов. Недаром на первой стадии развития искусства счета еще не существовало наименования самих чисел, а числа употреблялись обязательно в связи с самими перечисляемыми предметами. Филологи утверждают, что в ряде африканских языков для обозначения двух хижин и двух коров используются различные слова. Дробные числа возникли при измерении величин, а существование несоизмеримых величин привело к возникновению иррациональных чисел.

В геометрии наиболее наглядно обнаруживается роль моделей в математике. Геометрическая модель является воспроизведением ряда пространственных свойств отношений, форм объективной действительности. Поэтому геометрическая модель играет весьма активную, иногда ведущую роль в геометрии или даже в математике в целом. Вероятно, можно сказать, что геометрия вместе с арифметикой находится в фундаменте всей математики. Эти математические науки, по-видимому, наиболее близки к объективной реальности, особенно геометрия, ибо числа носят более абстрактный характер, чем геометрические образы. Именно при оперировании с геометрической моделью в математике были сделаны крупнейшие открытия, такие, например, как несоизмеримость отрезков, иррациональные числа и многие другие. Это не случайно, ибо, строя геометрическую модель, мы можем отвлечься от несущественного и выделить то основное, главное, что нас интересует. Поэтому возникновение и развитие различных математических понятий зависит не только от объективной реальности через моделирование этой реальности в математике.

Таким образом, гносеологическая роль геометрической модели чрезвычайно велика. Оперируя этой моделью, математик получает возможность решать задачи, касающиеся действительности. Например, точка, линия, плоскость служат для создания геометрической модели действительности. Причем представление о точке, линии, плоскости нельзя логически вывести из других понятий, ибо это первичный материал, из которого строится модель. Сама эта модель – результат обобщения многолетней практики действия людей с телами объективной реальности.

Линейная алгебра является математической моделью геометрических образов объективной действительности.

Небесная механика со времени Ньютона исходит из такой модели устройства солнечной системы: планеты и Солнце представляют собой материальные точки с соответствующими массами, и между ними действуют силы тяготения согласно закону

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad .$$

Здесь F – сила тяготения между небесными телами с массами, соответственно равными m_1 и m_2, расстоянием между их центрами тяжести, равным r, G – постоянная тяготения. Материальные точки, моделирующие планеты, расположены в центрах тяжести соответствующих планет. Как ни схематична эта модель на первый взгляд, она вполне удовлетворительно отражает движения планет и дает возможность вычислять взаимное положение планет на небосводе на многие годы с поразительной точностью. Более того, она дважды позволила путем вычислений предсказать наличие в Солнечной системе планет, которые до того не наблюдались астрономами. Исходя из неправильностей движения самых далеких от Солнца известных в те времена планет, был сделан вывод, что они вызваны наличием еще одной планеты. Сравнив фактические уклонения с теми, которые получились в предположении существования еще одной планеты, удалось вычислить неизвестную массу, расстояние до Солнца и положение на небесном своде для определенного момента времени. Так, в 1846 году была открыта планета, получившая название Нептун, в результате вычислений, выполненных независимо друг от друга и одновременно У. Лаверье и Дж. Адамсом. Подобные же вычисления, выполненные П. Лоуэллом, привели в 1930 г. к открытию девятой планеты Солнечной системы, получившей название Плутон.

Изучая высшую математику, студенты имеют возможность ознакомиться с моделями реальных явлений. Понятие производной, интеграла, дифференциальных уравнений, математической физики, исследования операции, теории вероятностей и математической статистики и др. дают широкую возможность создания самых разнообразных моделей явлений, происходящих не только в природе, но и в общественной жизни и материальном производстве.

Для одного и того же явления можно предложить много моделей, основанных на различных принципах и исходящих из различных схематизаций. История науки оставила нам огромное число примеров такого рода. Например, в оптике рассматривались несколько моделей природы света: корпускулярная, волновая, электромагнитная. Для всех этих моделей были выведены многочисленные закономерности количественного характера. Каждая из них требовала своего особого математического аппарата. Корпускулярная оптика пользовалась средствами элементарной геометрии и пришла к выводу законов отражения и преломления света. Модель волновой теории света требовала новых математических идей как для вывода известных результатов, так и для получения новых. Чисто аналитическим путем были открыты законы интерференции и дифракции света и не наблюдавшиеся ранее. Геометрическая оптика, связанная с корпускулярной моделью, оказалась при этом бессильной. Так, были получены дополнительные аргументы в пользу волновой теории. Но и эта теория уступила свое место электромагнитной теории света, поскольку появились такие факты, которые она уже не могла объяснить. Обе модели света (корпускулярная и волновая) описывают различные свойства явления и являются иллюстрацией известного закона философии о борьбе и единстве противоположностей. Но каждая модель имеет определенные границы применения.

Построение математической модели – это мощный метод познания мира, управления различными явлениями и прогнозирования их.

Значительную роль играла также математика в технике. Этим вплоть до недавнего времени исчерпывалась сфера широкого применения математических методов. Ситуация резко изменилась с появлением ЭВМ.

Благодаря ЭВМ идет интенсивный процесс математизации не только естественных и технических, но также и общественных наук. Важное значение приобрело применение математических методов в экономике. Математическое моделирование начинает широко использоваться в химии, геологии, биологии, медицине, психологии, лингвистике. Подтверждается точка зрения К.Маркса, который считал, что «наука только тогда достигает совершенства, когда ей удается пользоваться математикой».

Теперь остановимся на тех вопросах математического моделирования, которые тесно связаны с внутренними закономерностями развития математики.

Люди и их сознание, сами являющиеся частью и продуктом объективной действительности, взаимодействуют с ней. В качестве отражения объективной действительности в сознании человека создают образы-модели.

Теория начинается там, где начинается обобщение (абстракция), формирование понятий. Понятие является отражением в нашем сознании существенных свойств данного множества предметов или явлений.

Изучая действительность, ученый выделяет некоторые характерные для его исследования свойства и вводит соответствующие этим свойствам понятия посредством логического определения. Таким образом, понятия или теории являются моделями объективной действительности.

Математика строит модели реальных явлений. Ее первые понятия представляют собой образ свойств действительности. Отражая в своих моделях свойства и взаимоотношения явлений, математика создает свой символический язык. Наряду с начальными фразами создания языка оформляются и правила-операции над математическими понятиями, называемыми символическим языком, который в сущности их и определяет. Однако возможности получения крупных и постоянных применений математики складываются лишь тогда, когда аппарат операций достигает высшей степени своего развития. Создание дифференциального и интегрального исчисления с их языком и операциями знаменует собой выдающуюся эпоху в развитии науки, но математика показала все свои возможности в этой области лишь после создания аппарата дифференциальных уравнений. Развитие и применение математики, совершенствование ее языка и аппарата поставили вопросы, связанные с необходимостью исследования и создания этого аппарата наряду с проблемой логического построения математических моделей. Было установлено, что мощные математические методы создаются при помощи алгебраических операций и соотношений и аппарата бесконечных процессов, определяющих понятия предела и непрерывности.

Таким образом, алгебра и топология составили основу, на которой строились математические науки. При аксиоматическом, логическом построении данной математической модели, исходя из известных понятий, мы стремимся установить среди них те «основные понятия», из которых при помощи только формальной логики можно вывести все свойства данной модели. Так создается теория, абстрактная модель, математическая структура.

После того как были установлены элементы математического аппарата, аппарат алгебраических операций, аппарат топологии и сам аксиоматический метод, сразу встала проблема подразделения математики на абстрактные структуры и их объединения в структуре математических структур по признаку все большей степени абстракции. При этом в качестве основных выступили алгебраические структуры, структуры порядка и топологические структуры. С их помощью создаются многократные и специальные структуры.

Основным явлением в современной математике является проблема построения математических структур.

Предположим, что исходя из реальных явлений, мы можем построить абстрактную модель этих явлений, отражающую их главные свойства. Эта абстрактная модель проще, чем реальные явления. Поэтому мы можем исследовать эту модель при помощи существующих методов и установить закономерности, которые необозримы в реальных явлениях.

Теперь, наоборот, предположим, что создана или существует структура, и что существуют реальные объекты и явления, которые ее реализуют, т.е. иными словами, предположим, что структура имеет свою реализационно-изоморфную модель. В этом случае наши объекты будут обладать и всеми свойствами, которые проистекают из структуры. Таких реализаций может быть много, но нет необходимости исследовать их свойства – они заданы свойствами структуры.

Установление изоморфизмов с некоторой математической структурой представляет собой чрезвычайно мощную возможность научного предвидения и крупных применений, что наблюдается повсеместно, т.к. любая структура имеет многочисленные реализации самого разнообразного характера. Так, например, в нашу эпоху было установлено, что схемы арифметических действий в двоичной системе, таблицы истинности дизъюнкции в математической логике и некоторые диодные схемы представляют собой изоморфные модели. Из этого факта непосредственно следует принцип построения ЭВМ, осуществляющих математические и логические операции. Таким образом, получилось применение математики и математической логики в технике, что привело к невиданному техническому прогрессу.

Современные электронные вычислительные устройства как раз и реализуют математические структуры. В этом случае, когда реализация некоторой модели в данной области освоена алгоритмически и практически, можно сказать, что эта модель применена или внедрена в практику. Так, современная электронная вычислительная техника есть результат внедрения логики алгебры в технику.

Не все модели в различных науках можно исследовать при помощи наличного математического аппарата и существующих математических структур. Если для данной модели не существует изоморфной структуры, возникает необходимость расширить некоторую из существующих или создать новую математическую структуру. Таким образом, проблемы данной науки обогащают математические структуры.