УДК 517.2

Шарипов К.С. , Шарипов К.С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

К ЗАДАЧЕ О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМ УРАВНЕНИИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Впервые исследована причина возникновения так называемых управляющих собственных значений и управляемых собственных функций дифференциального уравнения. В частности, здесь исследованы собственные значения и собственные функции дифференциального уравнения второго порядка.

Сначала рассмотрим пример из (1, стр. 194)

$$y''+\lambda y=0, t\in[0,1] \qquad (1)$$

с условиями периодичности

$$y(0)=y(1), y'(0)=y'(1) \qquad (2)$$

Показано, что собственные значения этой задачи определяются формулой [1]

$$\lambda_M=(2\pi n)^2, k=0,\pm1,\pm2,... \qquad (3)$$

Поставим вопрос: можем ли утверждать, что уравнение (1) при условиях (2) имеет собственные значения только и только определенные формулой (3)? Наш ответ: нет.

Приведем доказательство нашего ответа. Краевую задачу (1)-(2), дающую периодическое решение, предлагаем исследовать как задачи управления вида:

$$\text{I} \quad y''+\lambda y=0, t\in[0,1] \qquad (4)$$

Условия управления

$$y(0)=y_0, y'(0)=0 \qquad (5)$$

$$y(1)=y_0, y'(1)=0$$

$$\text{II} \quad y''+\lambda y=0, t\in[0,1] \qquad (6)$$

Условия управления

$$\begin{aligned} &y(0)=0, y'(0)=y_0' \\ &y(1)=0, y_0'(1)=y_0' \end{aligned} \qquad (7)$$

$$\text{III} \quad y'''+\lambda y=0, t\in[0,1] \qquad (8)$$

Условия управления

$$\begin{aligned} &y(0)=y_0, y'(0)=y_0' \\ &y(1)=y_1, y'(1)=y_1' \end{aligned} \qquad (9)$$

Видно, что условия (5), (7) и (9) дают нам условия периодичности (2) решения уравнения (1).

Решаем задачу управления (4)-(5). Сначала напишем ее усовершенствованную задачу Коши в виде

$$y''+\lambda y=0, t\in[t_0,T] \qquad (10)$$

1) начальные условия

$$y(0)=y_0, y'(0)=0 \qquad (11)$$

2) плюс заданные условия

$$y(1)=y_0, y'(1)=y_0' \qquad (12)$$

Задача Коши (10)-(11) имеет решение вида

$$y = y_0 \cos\sqrt{\lambda}t \qquad (13)$$

Отсюда, согласно (12), имеем

$$\begin{aligned} y_0 \cos\sqrt{\lambda} &= y_0 \\ -\sqrt{\lambda}y_0 \sin\sqrt{\lambda} &= 0 \end{aligned} \qquad (14)$$

Особо отметим, что полученную систему исследуем относительно параметра λ, который не входит в общее решение уравнения (10).

Система (14) имеет решение при значениях параметра λ, равных

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, k = 0, \pm 1, ... \qquad (15)$$

Такие значения параметра принято называть собственными значениями уравнения (1). А им соответствующие собственные функции переменных y_0, t, k имеют вид

$$y = y_0 \cos 2\pi kt (k = 0, \pm 1, \pm 2, ...) \qquad (16)$$

Итак, усовершенствованной задачей Коши показано, что задача управления (4)-(5) имеет собственные значения и периодические собственные функции, определяемые соответственно формулами (15)и (16).

Отметим , что методом усовершенствованный задачи Коши можно показать, что задача управления (8)-(9) имеет собственные значения

$$\lambda_л = (2\pi k)^2, k = \pm 1, \pm 2, ... \qquad (17)$$

А им соответствуют периодические собственные функции переменных y_0, t, k, определяемые формулой

$$y = \frac{y_0'}{2\pi k} \sin 2\pi kt \qquad k = \pm 1, \pm 2, ... \qquad (18)$$

Наконец, аналогично легко можно убедиться в том , что задача управления (8)-(9) имеет собственные значения

$$\lambda_k = (2\pi k)^2, k = \pm 1, \pm 2, ... \qquad (19)$$

И им соответствуют периодические собственные функции

$$y = y_0 \cos 2\pi kt + \frac{y_0'}{2\pi k} \sin 2\pi kt, k = \pm 1, \pm 2, ... \qquad (20)$$

Они являются функциями переменных t, y_0 , y'_0, k

При больших значениях параметра (17) решение (18) усовершенствованной задачи Коши (8)-(9) будет приближаться к тривиальному решению задачи уравнения (1)-(2).

При больших значениях параметра (19) решение (20) усовершенствованной задачи Коши (8)-(9) будет приближаться к решению усовершенствованной задачи Коши (6)-(7) .

Приходится особо отметить, что существование у краевой задачи (1)-(2) собственных значений вида (17) и (19) и собственных функций (18) и (20) показана нами впервые.

Теперь мы можем говорить о преимуществе нами выдвинутого метода усовершенствованной задачи Коши перед существующим методом для определения собственных значений и собственных функций дифференциальных уравнений и дифференциальных задач.

Чтобы это было не голословно, отметим, что при значении параметра

$$L = (2\pi k)^2, k = \pm 1, \pm 2, ...$$

соответствуют две управляемые собственные функции вида (18) и (20). Отсюда следует, что мы не согласны с выводами, сделанными в работе ((1) стр 32).

Теперь рассмотрим задачу управления вида

$$y'' - \lambda y = 0, t \in [0,1] \qquad (21)$$

условия апериодического управления

$$y(0) = y_0, y'(0) = 0, y'(1) = 0 \qquad (22)$$

Решение уравнения имеет вид

$$y = c_1 e^{\sqrt{\lambda}t} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}t}, t \in [0,1]$$

Составим усовершенствованную задачу Коши

$$y'' - \lambda y = 0, t \in [0,1] \qquad (23)$$

1) начальные условия $y(0) = y_0, y'(0) = 0$ (24)

2) плюс заданное условие $y'(1) = y_0'$ (25)

Находим решение задачи Коши (23)-(24):

$$c \ \ + c_2 = y_0$$

$$c_1 - c_2 = \frac{y_0}{\sqrt{\lambda}} (\lambda \neq 0)$$

Отсюда, $c_1 = \frac{y_0 + y'_0}{2\sqrt{\lambda}}$ $c_2 = \frac{y_0 - y'_0}{2\sqrt{\lambda}}$ (26)

Тогда $y = \frac{y_0 + y'_0}{2\sqrt{\lambda}} + e^{\sqrt{\lambda}t} + \frac{y_0 - y'_0}{2\sqrt{\lambda}} e^{\sqrt{\lambda}t}$ (27)

Отсюда, согласно (25), имеем

$$\frac{y_0 + y'_0}{2} e^{\sqrt{\lambda}} - \frac{y_0 - y'_0}{2} e^{-\sqrt{\lambda}} = y'_0$$

Отсюда имеем квадратичное уравнение вида

$$(y_0 + y'_0)e^{2\sqrt{\lambda}} - 2y'_0 e^{\sqrt{\lambda}} - (y_0 - y'_0) = 0$$

Тогда

$$\lambda_1 = \ln \frac{y'_0 + \sqrt{y_0'^2 + y_0^2 - y_0'^2}}{y_0 + y_0'} = 0 \qquad (28)$$

$$\lambda_2 = \ln \frac{y_0` - \sqrt{y_0'^2 + y_0^2 - y_0'^2}}{y_0 + y_0'} = \ln \frac{y_0' - y_0}{y_0 + y_0'} + 2\pi ik \qquad k=0,\pm1,\ldots(29)$$

Видно, что собственные значения как функции переменных y_0, y'_0, k (28)и (29) могут быть действительными и комплексными.

Здесь, конечно, мы привели такие примеры, что собственные значения имеют точные значения.

Область значений функций (28) и (29) дают нам спектр собственных значений задачи управления (21)-(22).

Отметим, что собственные значения, зависящие от заданных условий управления (22) , нами построены впервые для уравнения второго порядка. (Этот результат еще раз подтверждает преимущество метода усовершенствованной задачи Коши перед существующим методом построения собственных значений.)

Собственным значениям соответствуют собственные функции:

$$y_1 = \frac{y_0 + y'_0}{2} + \frac{y_0 - y_0'}{2} = y_0 \qquad (30)$$

$$y_2 = \frac{y_0 + y_0'}{2} e^{(\ln\frac{y_0' - y_0}{y_0 + y_0'} + 2\pi ik)t} + \frac{y_0 - y_0'}{2} e^{-(\ln\frac{y_0' - y_0}{y_0 + y_0'} + 2\pi ik)t} \qquad (31)$$

Они могут быть действительными и комплексными. Нами показано, что спектры собственных функций делятся как действительные и комплексные собственные функции.

Здесь ограничимся вышеприведенными задачами управления, порождающими задачи о собственных значениях и собственных функциях.

Перейдем к теории отыскания периодических решений неоднородного уравнения второго порядка.

Рассмотрим простейшее уравнение второго порядка вида

$$y'' + \alpha^2 y = f(t), \ t \in [t_0, T] \ (\alpha > 0) \ (f(t) \neq 0) \qquad (32)$$

и условиями периодичности

$$y(t_0) = y(T), y'(t_0) = y'(T) \tag{33}$$

Здесь рассмотрим случай, когда непрерывная функция f(t) периодична с периодом T.

Ставится задача: найти решение уравнения (32), имеющего период T , т.е. построить решение задачи управления (32)-(33).

Успешно можно исследовать задачу управления (32)-(33) методом, предложенным нами, а именно: методом усовершенствованной задачи Коши.

Усовершенствованная задача Коши имеет вид

$$y''+\alpha^2 y = f(t), t \in [t_0, T] \tag{34}$$

1) начальные условия

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0' \tag{35}$$

2) плюс заданные условия

$$y(T) = y_0, y'(T) = y_0' \tag{36}$$

Структуру управляющих собственных значений и управляемых собственных функций усовершенствованной задачи Коши (34)-(36) успешно можно исследовать введением параметров (произвольных постоянных) в уравнение (34) [2]. Это делается так.

Функцию f(t) с периодом T ищем в виде

$$f(t) = \beta_1 f_1(t) + \beta_2 f_2(t), t \in [t_{0,} T], \tag{37}$$

где β_1, β_2 - пока неизвестные параметры, а $f_1(t), f_2(t)$ - непрерывные функции с периодом T.

Итак, впервые показано , что собственные значения усовершенствованной задачи Коши (34)-(36), т.е. задачи (32)-(33) порождаются двумя параметрами $\beta_1 u \beta_2$ как два класса собственных значений.

Здесь показано, что они определяются формулами соответственно, отсюда

$$\beta_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & m_1 \\ b_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix} b_1} \tag{38}$$

$$\beta_2 \frac{\begin{vmatrix} n_1 & b_1 \\ m_1 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}}, \tag{39}$$

где $n_1 = \cos a \sin a f_1(1) - a \sin a \int_0^1 f_1(s) \sin asds + a \cos a \int_0^1 f_1(s) \cos asds + f_1(1) \cos a \sin a,$

$$m_1 = f_2(1) \cos a \sin a - a \sin a \int_0^1 f_2(s) \sin asds + a \cos a \int_0^1 f_2(s) \cos asds + f_2(1) \cos a \sin a,$$

$$n_2 = \cos a \int_0^1 f_1(s) \sin asds + \sin a \int_0^1 f_1(s) \cos asds$$

$$m_2 = \cos a \int_0^1 f_2(s) \sin asds + \sin a \int_0^1 f(s) \cos asds$$

$$b_1 = y_0' + y_0 a \sin a - y_0' \cos a,$$

$$b_2 = y_0 - y_0 \cos a - \frac{y_0'}{a} \sin a$$

Здесь предполагается, что $f_1(t)$ и $f_2(t)$ такие, что $\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix} \neq 0$ (40)

Подставляя (36), (38) и (39) в (19), имеем

$$y = y_0 \cos at + \frac{y_0'}{a} \sin at + \cos at \int_0^t \left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & m_1 \\ b_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}} f_1(s) + \frac{\begin{vmatrix} n_1 & b_1 \\ n_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}} f_2(s) \right) \sin as) ds +$$

(41)

$$+ \sin at \int_0^t \left(\frac{\begin{vmatrix} b_1 & m_1 \\ b_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}} f_1(s) + \frac{\begin{vmatrix} n_1 & b_1 \\ n_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}} f_2(s) \right) \cos as) ds$$

Полученная функция (41) будет периодическим решением задачи (1)-(2) в классе функций

$$q(t) = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & m_1 \\ b_2 & m_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}} f_1(t) + \frac{\begin{vmatrix} n_1 & b_1 \\ n_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2 \end{vmatrix}} f_2(t), t \in [t_0, T] \qquad (42)$$

$\cos a \neq 1$

и называется периодическими собственными функциями, соответствующими собственным значениям (38) и (39).

Отметим, что данная задача (1)-(2) при $\cos a \neq 1$ имеет два независимых собственных значения (38)-(39), обуславливающих существование ее периодических собственных функций.

Литература

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. –М.: Наука, 1971.
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений //Вестник ИГУ, № 12, 2004.