УДК 517.2+519.3

Шарипов С., Шарипов К.С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЕ ОПТИМИЗИРУЮЩИЕ КРИВЫЕ

Впервые рассмотрена задача оптимизации функционалов с недифференцируемыми (по Ньютону-Лейбницу) кривыми.

Известно, что оптимизация интегральных функционалов, например, вида

$$J = \int_{t_0}^{T} K(t, z(t), Z'(t))dt \qquad (1)$$

оптимизировалась с дифференцируемыми (по Ньютону-Лейбницу) кривыми, как решения дифференциального уравнения второго порядка.

Отметим, что нами показано, что функционал (1) можно оптимизировать и решением дифференциального уравнения первого порядка.

Здесь займемся вопросом оптимизации функционала (1) с недифференцируемой (по Ньютону-Лейбницу) кривой. Такую кривую, в частности, построим с дифференциальным уравнением первого порядка.

Рассмотрим задачу управления вида

$$y' + p(t)y = q(t), \quad t \in [t_0, T] \qquad (2)$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1,\ y(T)=y_2 \qquad (3)$$

нами показано, что решение уравнения (2) удовлетворяющее условиям (3), будет недифференцируемым (по Ньютону-Лейбницу) в случае, когда, например, функция q(t) является разрывной функцией [1].

Рассмотрим интересный случай, когда правая часть $q(t)$ как внешняя сила действует разными внешними силами на отрезках $[t_0, a]$, $[a,T]$, пусть функция $q(t)$ имеет вид

$$q(t) = \begin{cases} \beta_1, t_0 \le t \prec a, \\ \beta_2, a \le t \le T, \end{cases} \qquad (4)$$

где β_1, β_2 - пока неизвестные величины, значит на отрезке $[t_0, a]$ действует внешняя сила равная β_1, а на $[a,T]$ действует внешняя сила равная β_2.

Тогда имеем задачу управления

$$y' + p(t)y = \begin{cases} \beta_1, t_0 \le t \prec a, \\ \beta_2, a \le t \le T, \end{cases} \qquad (5)$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1,\ y(T)=y_2 \qquad (6)$$

отметим, что условие $y(a)=y_1$ поставлено в точке $t=a$ разрыва правой части (4)

Теория для построения решения уравнения (5) разработана нами, используя теорию исправленных производных. Из последней теории приведем материалы в нужном объеме [2].

Дана урчуктная функция вида

$$C(t) = \begin{cases} \varphi(t), t_0 \le t \prec a, \\ \psi(t), a \le t \le T, \end{cases} \qquad (7)$$

$$\begin{aligned} &\varphi(a-o) = \psi(a+o), \\ &\varphi'(a-o) \ne \psi'(a+o) \end{aligned} \qquad (8)$$

Ее первая исправления производная, равна

$$isc'(A,a,t)=\begin{cases}\varphi'(t), & t_0\le t\prec a,\\ \varphi'(a-o)+A[\psi'(a-o)-\varphi'(a-o)], & t=a,\\ \psi'(t) & a\prec t\le T\end{cases}\qquad(9)$$

$A\in[0,1]$

Урчуктная функция

$$C_1(t)=\begin{cases}0,\ t_0\le t\le a,\\ t-a,\ a\le t\le T,\end{cases}\qquad(10)$$

Ее первая исправления производная, равна

$$isc_1'(A,a,t)=\begin{cases}0, & t_0\le t\prec a,\\ A, & t=a,\quad (A\in[0,1])\\ 1, & a\prec t\le T\end{cases}\qquad(11)$$

При А=1 имеем

$$isc_1'(A,a,t)=\begin{cases}0, & t_0\le t\prec a,\\ 1, & a\le t\le T\end{cases}\qquad(12)$$

Свойства функции (12)

$$1.\int_{t_0}^{t}F(s)\ isc_1'(1,a,s)ds=\int_{a}^{t}F(s)ds\ isc_1'(1,a,t)\qquad(13)$$

$$2.\int_{t_0}^{t}F(s)\ isc_1''(1,a,s)ds=F(a)\ isc_1'(1,a,t)\qquad(14)$$

Теперь функцию (5) можем представить в виде

$$q(t)=\beta_1+(\beta_2-\beta_1)\ isc_1'(1,a,t),\quad t\in[t_0,T]\qquad(15)$$

Тогда

$$y'+p(t)y=\beta_1+(\beta_2-\beta_1)\ isc_1'(1,a,t),\quad t\in[t_0,T]\qquad(16)$$

условия управления

$$y(t_0)=y_0,\ y(a)=y_1,\ y(T)=y_2\qquad(17)$$

Задача управления (16) – (17) имеет общее решение, проходящее через заданные три точки

$$y=y_0e^{-\int_{t_0}^{t}p(s)ds}+n_1(y_0,y_1)\int_{t_0}^{t}e^{-\int_{s}^{t}p(\tau)d\tau}ds+n_2(y_0,y_1,y_2)\int_{a}^{t}e^{-\int_{s}^{t}p(\tau)d\tau}ds\ isc_1'(1,a,t)\qquad(18)$$

где

$$n_1(y_0,y_1)=\frac{y_1-y_0e^{-\int_{t_0}^{a}p(s)ds}}{\int_{t_0}^{a}e^{-\int_{s}^{a}p(\tau)d\tau}ds}\qquad(19)$$

$$n_2(y_0,y_1,y_2)=\frac{y_2-y_0e^{-\int_{t_0}^{T}p(s)ds}}{\int_{t_0}^{T}e^{-\int_{s}^{T}p(\tau)d\tau}ds}-n_1(y_0,y_1)\frac{\int_{t_0}^{a}e^{-\int_{s}^{T}p(\tau)d\tau}ds}{\int_{t_0}^{T}e^{-\int_{s}^{T}p(\tau)d\tau}ds}\qquad(20)$$

Они являются линейными функциями переменных y_0, y_1 и y_2. Общее решение (18) имеет первую исправленную производную (т.е. оно не имеет производной по Ньютону-Лейбницу).

Теперь займемся оптимизацией функционала (1) на совокупности недифференцируемых (по Ньютону-Лейбницу) кривых (18) [2].

В совокупности исправлено дифференцируемых кривых (18) интегральный функционал (1) напишем так [2].

$$J = \int_{t_0}^{T} K(t, y(t), isy'(t))dt, \tag{21}$$

где $isy'(t)$ - первая исправленная производная функции (18).

Подставляя общее решение (18) в функционал (21), имеем функцию переменных y_0, y_1 и y_2. Ее обозначим так

$$J = J(y_0, y_1, y_2) \tag{22}$$

Она имеет производную по Ньютону-Лейбницу по y_0, y_1, y_2.

Нас интересует экстремум этой функции (22). Поэтому рассматриваются следующие задачи:

1. Нахождение обычного экстремума функции (22).
2. Нахождение условного экстремума функции (22) относительно уравнения связи

$$g(y_0, y_1, y_2)=0 \tag{23}$$

3. Если функция (22) дает нам квадратическую форму относительно y_0, y_1, y_2, то ее исследуем на задачу Седловой точки.

Значения, $\overline{y}_0, \overline{y}_1$ *и* $\overline{y}_2$ дающие экстремум функционалу (17) называем экстремальными условиями управления и при них из общего решения (18) можно выделить недифференцируемую (по Ньютону-Лейбницу) экстремальную кривую функционала (21).

4. Если функция (22) дает нам линейную форму относительно y_0, y_1 и y_2 и для них дано линейные ограничения

$$\begin{aligned} &\alpha_0 y_0 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \le d_0, \\ &\alpha_3 y_0 + \alpha_4 y_1 + \alpha_5 y_2 \le d_1, \\ &\alpha_6 y_0 + \alpha_7 y_1 + \alpha_8 y_2 \le d_3 \end{aligned} \tag{24}$$

то ее исследуем линейным программированием.

Эти задачи можем исследовать в следующих случаях:

1) y_0, y_1 и y_2 – подвижные величины,
2) y_0, y_2 - неподвижные, а y_1 подвижная величина.
3) y_0 – неподвижная, а y_1 и y_2 подвижные величины.

Ограничимся этими приведенными случаями.

Приведем пример.

Среди недифференцируемых (по Ньютону-Лейбницу) кривых (18) проходящие через заданные три точки определить кривую $y(t)$ такую, что функция

$$f(t) = t\ isy'(t), \quad t \in [t_0, T]$$

ограничивает максимальную (минимальную) площадь?

Площадь определяется интегралом

$$S = \int_{t_0}^{T} t\ isy'(t)dt \tag{25}$$

Вычислим исправленную производную функции (18)

$$isc_1'(t) = -y_0 p(t) e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + n_1(y_0, y_1)(1 - p(t)) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} ds +$$

$$+ n_2(y_0, y_1, y_2)(1 - p(t) \int_{a}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} ds)\ isc_1'(1, a, t) \tag{26}$$

Подставляя (26) в (25) получим совокупность площадей относительно переменных *y_0, y_1* и *y_2*

$$S = -y_0 \int_{t_0}^{T} tp(t) e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} dt + n_1(y_0, y_1) \int_{t_0}^{T} t(1 - p(t) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} ds)dt +$$

$$+ n_2(y_0, y_1, y_2) \int_{t_0}^{T} t(1 - p(t) \int_{a}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} ds)dt \tag{27}$$

Полученную функцию (27) исследуем на условный экстремум: найти максимальное (минимальное) значение функции (27) относительно уравнения связи (например) вида

$$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 1 \tag{28}$$

Показано, что интегральный функционал (27) имеет экстремум относительно переменных *y_0, y_1, y_2*

$$y_0 = \overline{y}_0,\ y_1 = \overline{y}_1,\ y_2 = \overline{y}_2 \tag{29}$$

Тогда из (18) при (29) имеем экстремальную недифференцируемую (по Ньютону-Лейбницу) кривую интегрального функционала (25).

$$y = -\overline{y}_0 e^{-\int_{t_0}^{t} p(s)ds} + n_1(\overline{y}_0, \overline{y}_1) \int_{t_0}^{t} e^{-\int_{t_0}^{t} p(\tau)d\tau} + n_2(\overline{y}_0, \overline{y}_1, \overline{y}_2) \int_{a}^{t} e^{-\int_{s}^{t} p(\tau)d\tau} ds\ isc_1'(1, a, t) \tag{30}$$

Литература

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Управления решения дифференциального и интегрального уравнений // Вестник ИГУ, № 12, 2003,
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Усовершенствование производных Ньютона-Лейбница и их применение // Вестник ИГУ, № 17, 2006.