УДК: 517.9

Айсахунов К.У.

ИГУ им. К.Тыныстанова, магистрант

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

В статье рассматривается история развития производной. Отмечено, что исправленная производная Шарипова является усовершенствованным вариантом производных Ньютона-Лейбница и Шварца.

Ключевые слова: *Производная Ньютона-Лейбница, производная Шварца, исправленная производная Шарипова, урчуктная функция.*

Бул макалада туундунун өнүгүү тарыхы каралган. Шарипов агайдын түзөтүлгөн туундусу Ньютон-Лейбниц жана Шварцтын туундуларынын өркүндөтүлгөн варианты болуп саналары көрсөтүлгөн.

Негизги сөздөр: *Ньютон-Лейбництин туундусу, Шварцтын туундусу, Шариповдун түзөтүлгөн туундусу, урчуктуу функция.*

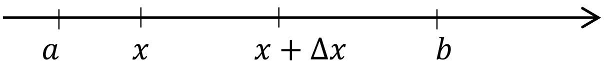
In this article the history of the development of derivative is considered. It is noted, that Sharipov's corrected derivative is the improved variant of Newton-Leibniz and Schwartz's derivatives.

Key words: *Newton-Leibniz derivative, derivative of Schwartz, Sharipov's corrected derivative, urchuktny function.*

В математическом анализе изучается понятие производной. Оно было введено И.Ньютоном и Лейбницем.

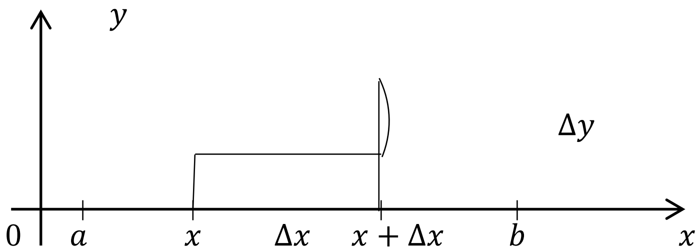
Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$, $x \in (a, b)$. (1)

Берем точку $x \in (a, b)$. Придаем ей приращение Δx ($\Delta x \to 0$). Тогда имеем точку: $x + \Delta x$.



Находим приращения функции по формуле:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$



Составим отношение:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Отсюда переходим к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

При существовании данного предела ввели понятия производный по формуле

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f^{'}(x) \qquad (2)$$

Здесь $f'(x)$ называется производный функции $f(x)$ в точке x.

Отметим, что это весьма важная формула называется производной $f'(x)$ функции

$f(x)$ по Ньютону-Лейбницу.

Это и есть основа дифференциального и интегрального исчисления и дифференциальных и интегральных уравнений.

Пример 1. Дана функция $y = x^2$; найти ее производную $f'(x)$.

Решение. При значении аргумента, равном x, имеем $y = x^2$. При значении аргумента, равном $x + \Delta x$, имеем $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$. Находим приращение функции:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

Составляем отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

Переходя к пределу, найдем производную от данной функции:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

Итак, производная от функции $y = x^2$ в произвольной точке равна.

$$f'(x) = 2x.$$

П р и м е р 2. Дано $y = \frac{1}{x}$, найти $f'(x)$, $x \neq 0$.

Р е ш е н и е. Рассуждая так же,как впредыдущем примере, получаем:

$$y = \frac{1}{x}, \qquad y + \Delta y = \frac{1}{x + \Delta x},$$

$$\Delta y = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x + \Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x + \Delta x)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{1}{x(x + \Delta x)}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(-\frac{1}{x(x + \Delta x)}\right) = -\frac{1}{x^2}.$$

Итак, производная от функции $y = \frac{1}{x}$ в произвольной точке равна.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Производная Шварца

Непрерывную функцию (1) исследовали, когда левая и правая производные существуют и принимают конечные значения $f'(x - 0)$ и $f'(x + 0)$ соответственно, причем имеет место равенство

$$f'(x - 0) = f'(x + 0) \tag{3}$$

В этом случае как известно, что непрерывная функция (1) имеет производную по Ньтону-Лейбницу.

Теперь приведем пример.

Рассмотрим непрерывную функции вида:

$$c(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases} \tag{4}$$

В отличие от функции (1) она состоит из двух функций:

$$ц(x) = x^2, \qquad 0 \leq x \leq 1 \tag{5}$$

$$ш(x) = 2 - x, \qquad 1 \leq x \leq 3. \tag{6}$$

Вычислим производные от них в точке $x = 1$

$$\lim_{x\to 1-0} ц(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1 = ц(x-0)$$

$$\lim_{x\to 1+0} ш(x) = \lim_{x\to 1+0} (2-x) = 1 = ш(x+0)$$

Имеем:

$$ц(x-0) = ш(x+0) = 1$$

Отсюда следует, что функция (4) будет непрерывный в точке $x = 1$.

Значит, она является непрерывной функцией на промежутке времени [0,3].

Вычислим ее левую и правую производную:

Левая производная

$$\lim_{x\to 1-0} ц'(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2)' = \lim_{x\to 1-0} 2x = 2 = ц'(x-0)$$

Правая производная

$$\lim_{x\to 1+0} ш'(x) = \lim_{x\to 1+0} (2-x)' = \lim_{x\to 1+0} (-1) = -1 = ш'(1+0)$$

Видно, что имеет место неравенство:

$$ц'(1-0) = 2 \neq -1 = ш'(1+0) \tag{7}$$

Теперь сопоставляя (3) и (7) придем к заключении о том, что непрерывная функция (4) не имеет производной по Ньютону-Лейбницу в точке $x = 1$. Она называется недифференцируемой функцией по Ньютону-Лейбницу.

Для таких функций в точке $x = 1$ Шварцем было введено понятие производной по формуле:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{c(1+\Delta x) - c(1-\Delta x)}{2\Delta x} \tag{8}$$

Вычислим его:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{2 - 1 - \Delta x - (1-\Delta x)^2}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1 - \Delta x - 1 + 2\Delta x - (\Delta x)^2}{2\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta x - \Delta x^2}{2\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1-\Delta x}{2} = \frac{1}{2}$$

Значит, предел (8) существует и значение равно $\frac{1}{2}$.

Итак, число $\frac{1}{2}$ является производной Шварца функции (4) в точке $x = 1$.

Функция (4) не имеет производной по Ньютону-Лейбницу в точке $x = 1$, однако она имеет производной по Шварцу.

Теперь можем говорить о том, что производная Шварца является развитием производной по Ньютону-Лейбницу.

Неумоляя достоинства производной Шварца, можем говорить, что с ее помощью не была решена задачи о производной, об интеграле и т.д.

Исправленная производная Шарипова

Впервые Шарипов С. при определении производной функции типа (4)-(7) предложил новую идею, что нужно выйти из плоскости Δx.

Рассмотрим урчуктную функцию:

$$c(x) = \begin{cases} ц(x), & x_0 \le x \le a \\ ш(x), & a \le x \le X \end{cases}$$

$$1) \qquad ш(a+0) = ц(a-0)$$

$$2) \qquad ш'(a+0) \ne ц'(a-0)$$

Исправленная производная Шарипова определяется формулой:

$$\lim_{\substack{л_1 \to 0 \\ л_2 \to 0}} \frac{c(x+л_2) - c(x-л_1)}{л_1 + л_2} = \begin{cases} ц'(x), & 0 \le x < a \\ ц(a-0) + [ш(a-0) - ц(a-0)]A, & x = a \\ ш'(x), & a < x \le 3 \end{cases}$$

Здесь:

$$\lim_{\substack{л_1 \to 0 \\ л_2 \to 0}} \frac{л_2}{л_1 + л_2} = A \quad (A \in [0,1])$$

$$|\ 0 \quad \bullet\, 1 - л_1| \quad 1 \quad \bullet\ 1 - л_1| \quad 3 \qquad x$$

Пример. Дано функция

$$c(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 \le x \le 3 \end{cases}$$

найти ее исправленную производную, и рассмотрим частный случай для $A = 0{,}54$.
Решение.

$$ц'(1-0) = 2, \quad ш'(1+0) = -1$$

$$isc_1'(A;1;x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2 - 3A, & x = 1 \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

Теперь посмотрим случай для $A = 0{,}54$

$$isc_1'(0{,}54;1;x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 0{,}38, & x = 1. \\ -1, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

Итак отметим, что С.Шариповым построено дифференциальное и интегральное исчисление урчуктной функций, где рассмотрены проведение касательной к урчуктной линий, также основные теоремы урчуктной функций с исправленной производной и т.д.

Таким образом разработанная, С.Шариповым исправленная производная является развитием производных Ньютона-Лейбница и Шварца.

Литература:

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциальных и интегральных уравнений. -Вестник ИГУ, 2004, № 12.

2. Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Движение и динамика дохода инвестиции, потребление, скорости экономика. –Бишкек, 2014. Сборник статей Междун. конфер., посвещен. 90-лет. Мин. Фин. КР.

3. Шарипов С., Шарипов К.С., Шарипов К.С. Экзогенные и эндогенные объекты в плановой экономике дохода равного сумме расходов. –Бишкек, 2014. Материалы Междун. конф. «Экон. наука: вчера, сегодня, завтра», посвящ. 60-лет экон. факультета КГНУ.