УДК: 551.46.02

Тыныбеков А.К., Атанаев Т.Б., Джусупов К.К.
КГУ им. И.Арабаева

УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ВОДНОЙ ЭКОСИСТЕМЫ

В статье рассматривается модель простейшей водной экосистемы, в которой процессы взаимодействия живых объектов описываются методом адаптивного баланса влияний, учитывающим явление реакции, а динамика среды представлена классической задачей диффузии. Данная модель демонстрирует нелинейную динамику моделируемых параметров природной среды.

***Ключевые слова**: водная экосистема, антропогенные нагрузки, фитопланктон, зоопланктон, биоресурс и биогены.*

Бул макалада жөнөкөй суу экосистемаларынын модели каралган. Анда жандуу объектилердин аракеттешүү процесси реакция кубулушун эске алуу менен, адаптивдүү баланс таасири методу менен баяндалат. Ал эми чөйрөнүн динамикасы диффузиянын классикалык маселелери менен көрсөтүлгөн. Берилген модель жаратылыш чөйрөлөрүнүн моделдештирүү параметрлеринин сызыктуу эмес динамикасын демонстрациялайт.

***Негизги сөздөр**. Суу экосистемасы, антропогендик жүктөр, фитопланктон, зоопланктон, биоресурс жана биогендер.*

A model of a simple aquatic ecosystem in which the processes of interaction of living objects are described by the adaptive balance of influences, taking into account the phenomenon of reaction, and the dynamics of the environment is represented by classical diffusion task. This model demonstrates the nonlinear dynamics of the simulated environment settings.

***Key words:** water ecosystem, anthropogenic pressures, phytoplankton, zooplankton, bioresource and biogens.*

Водная среда является источником разнообразных природных ресурсов, которые потребляются в процессе хозяйственной деятельности. Математические модели морских экосистем создаются для решения разнообразных задач, среди которых одна из наиболее важных – изучение динамики популяций морских организмов. Особую актуальность это направление исследований принимает вследствие увеличения антропогенной нагрузки на водные экосистемы/2-3/. Большинство моделей водных экосистем содержит интегральное описание процессов, при котором пространственная динамика отсутствует [3]. Такое положение дел объясняется большими сложностями моделирования распределенных систем, так как в пространственно-временных моделях подобных систем приходится решать задачи переноса неконсервативных параметров, взаимодействующих между собой и подверженных влиянию окружающей среды.

Вместе с тем именно подобные задачи представляют большой научный и практический для анализа антропогенного воздействия на водные экосистемы, например озера Иссык Куль [2,3].

В данной статье рассматривается модель простейшей водной экосистемы, в которой процессы взаимодействия живых объектов описываются методом адаптивного баланса влияний (ABC-методом) [1], учитывающим явление реакции, а динамика среды представлена классической задачей диффузии. Концепция адаптации сложной системы к внешним влияниям является общей для моделей реакции-диффузии и для ABC-метода, который неоднократно применялся для моделирования интегральных процессов в экосистемах. Отмечена быстрая сходимость к устойчивым решениям уравнений ABC-моделей, а также возможность объективной оценки коэффициентов этих моделей по данным наблюдений. Этим объясняется интерес к постановке вычислительного

эксперимента с моделью простейшей морской экосистемы

Рассмотрим уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u) + D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1)$$

где x – вектор обобщенных координат; $f(u)$ – функционал от концентраций реагентов u; D – диагональная матрица с коэффициентами диффузии и t – время. Уравнения такого типа называются уравнениями «реакции-диффузии».

В линейных системах диффузия приводит к выравниванию концентраций во всем объеме среды, содержащем реагенты. В случае нелинейного взаимодействия переменных в системе может возникать неустойчивость гомогенного стационарного состояния и образуются сложные пространственно-временные режимы типа волн или диссипативных структур. Они являются стационарными во времени и неоднородными по пространству распределениями концентраций, поддержание которых происходит за счет поступления энергии в систему. Условием возникновения структур в таких системах является различие коэффициентов диффузии реагентов, а именно, наличие близкодействующего «активатора» с малым коэффициентом диффузии и дальнодействующего «ингибитора» с большим коэффициентом диффузии.

В целях упрощения задачи будем рассматривать четыре взаимодействующих между собой реагента – одномерные по пространству процессы, формирующие структуру простейшей модели морской экосистемы: фитопланктон (*FP*), зоопланктон (*ZP*), биоресурс (*BR*) и биогены (*BG*), влияние которых будем учитывать только для фитопланктона. Концептуальная модель экосистемы представлена на рис. 1.

В качестве внешних воздействий на экосистему будем учитывать солнечную радиацию (*SR*), участвующую в образовании фитопланктона, и модуль скорости приводного ветра (*WF*), поставляющий кислород в верхний слой моря, необходимый для зоопланктона и рыб.

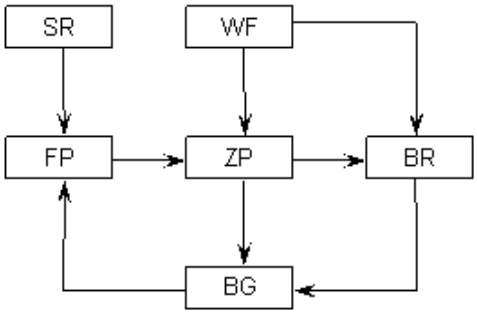

Рис. 1 – Концептуальная модель экосистемы

Введем вектор состояния экосистемы с элементами $T_i(x\ t)$: $T_1(x, t)$ – концентрация фитопланктона (*FP*), $T_2(x\ t)$ – концентрация зоопланктона (*ZP*), $T_3(x\ t)$ – концентрация биоресурса (*BR*), $T_4(x\ t)$ – концентрация биогенов (*BG*). Вектор внешних воздействий обозначим $F_i(x, t)$: $F_1(x, t) = (SR)$,$F_2(x, t) = =F_3(x, t) = (WF)$, $F_4(x, t) = 0$.

Используя общее уравнение *ABC*-метода [1] с базовой функцией влияния $F^{(+)}(\mathrm{T}_i)$ в форме

$$F^{(+)}(\mathrm{T}_i) = \mathrm{T}_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}\mathrm{T}_j - F_i(x,t), \quad (2)$$

выпишем систему уравнений, представляющих процессы реакции в модели экосистемы

$$\frac{d\mathrm{T}_i}{dt} = \mathrm{T}_i\{1 - 2[\mathrm{T}_i - \sum_{j \neq i} a_{ij}\mathrm{T}_j - F_i(x,t)]\} \quad (3)$$

Теперь система уравнений реакции-диффузии модели экосистемы принимает окончательный вид:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{T}_i(x,t) = D\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{T}_i(x,t) + \mathrm{T}_i(x,t)\{1 - 2[\mathrm{T}_i(x,t) - \sum_{j\neq i} a_{ij}\mathrm{T}_j(x,t) - F_i(x,t)]\} \quad . \qquad (4)$$

Граничные условия запишем в виде:

$$\frac{\partial}{\partial n}T_i(x\in\Gamma,t) = -Kb_i(x\in\Gamma,t)\left(T_i(x\in\Omega,t) - T_i^{ext}(x\in\Omega^{ext},t)\right), \qquad (5)$$

где Ω – замкнутая моделируемая область с границей Γ; n – нормаль к этой границе; T_i – концентрация *FP, ZP, BR, BG* внутри области Ω; T_i^{ext} – концентрация *FP, ZP, BR, BG* вне области Ω (Ω_{ext}); Kb_i – функция, описывающая поток i-го ресурса через границу Γ в момент времени t.

Для проведения имитационных экспериментов модель эколого-экономической системы была представлена в форме конечно-разностных уравнений /1/. Все моделируемые процессы путем линейных преобразований были приведены к безразмерной форме и к общему интервалу изменчивости от 0 до 1, а коэффициенты влияния в уравнениях выбирались в диапазоне значений от 0,01 до 0,5. После этого вычисления производились на 365 шагов по времени с интервалом в одни сутки. Во всех экспериментах, в соответствии с выбранными масштабами изменчивости, в качестве внешних влияний на экосистему были заданы годовой ход солнечной радиации *SR* и ветра *WF*.

Рис. 3 демонстрирует формирование диссипативных структур в зависимости от коэффициентов диффузии фито и зоопланктона. На приведенных графиках ось абсцисс есть координата, а ордината – безразмерная величина с интервалом изменчивости от 0 до 1, к которому приведены концентрации взаимодействующих веществ.

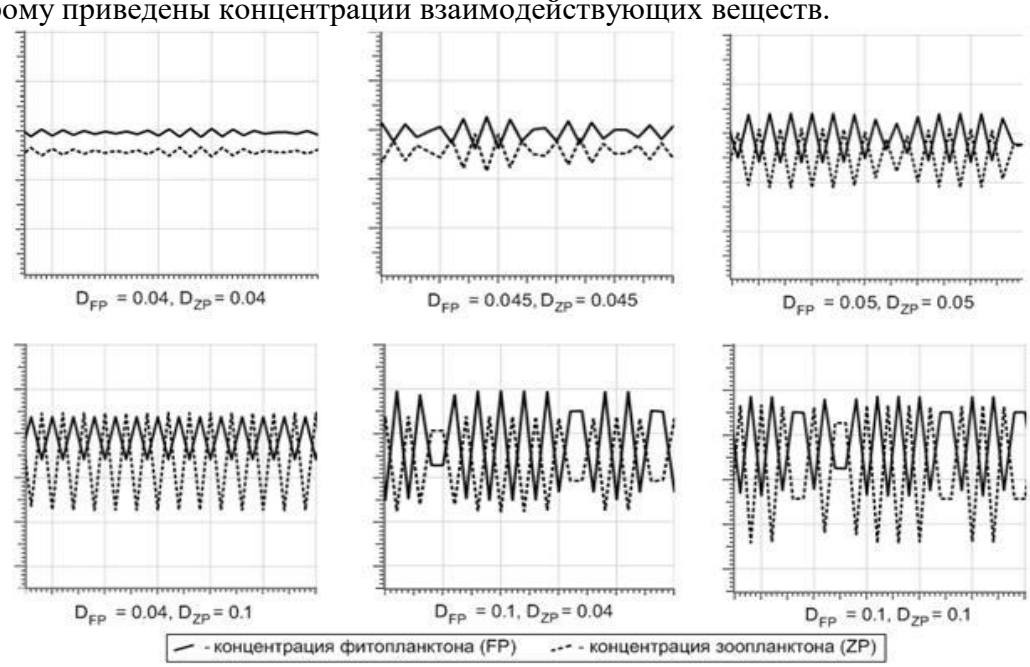

Рис. 2 – Концентрации фитопланктона (FP) и зоопланктона (ZP) в зависимости от коэффициентов

В статье приведено описание модели, построенной методом адаптивного баланса влияний для пространственно-временной распределенной экосистемы из трех трофических уровней. Проведенные вычислительные эксперименты с моделью озерной экосистемой,

описываемой уравнениями реакции-диффузии, показали, что даже весьма упрощенная система уравнений демонстрирует сложные сценарии развития, весьма чувствительные к изменениям входных воздействий на систему и к выбору параметров модели. Полученные результаты применения *ABC*-метода для представления функций источника в системе уравнений диффузии показывает целесообразность использования этого приема при разработке более сложных моделей озерных экосистем, описывающих процессы в двух и трех пространственных измерениях.

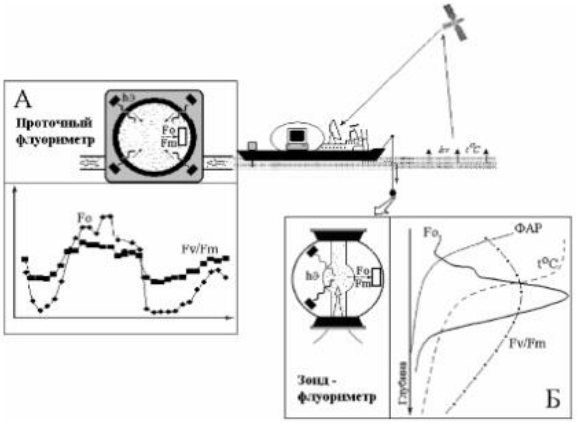

Рис.3 - Схема регистрации зондирования морского фитопланктона с использованием проточной (А) и зондовой (Б) флуориметров. А - схема проточного флуориметра и его регистрируемые параметры Fo (обилие фитопланктона отн.ед.), Fv/Fm (фотосинтетическая активность), с параллельным снятием координат (JPS) и времени суток; Б - схема зондирования погружным флуориметром с регистрацией параметров флуоресценции Fo, Fv/Fm, температуры (T^0C), фотосинтетически активной радиации (ФАР)/2,3/.

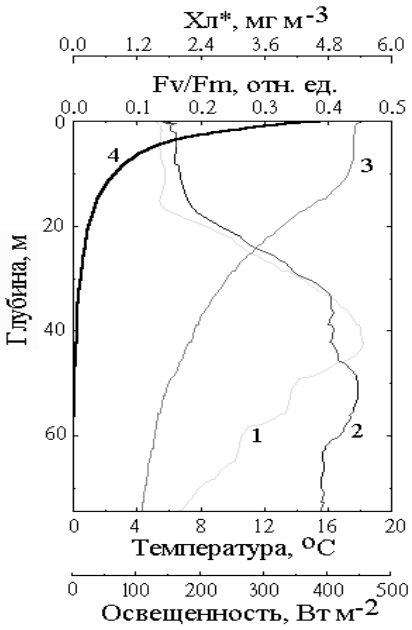

Рис. 4

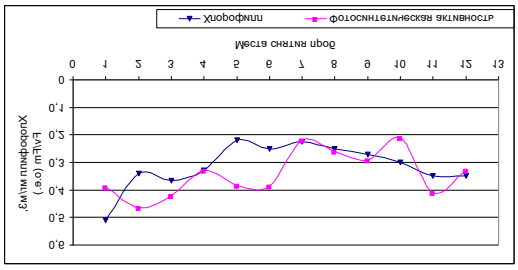

Рис. 5 – Показания хлорофилла и фотосинтетической активности на разрезе Каракол-Тамга

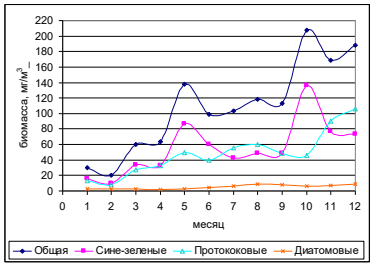

Рис.6 - Изменение биомассы фитопланктона

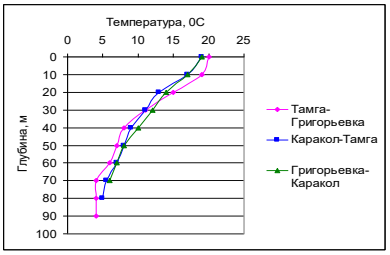

Рис. 7 - Распределение по глубине температуры в трех разрезах оз. Иссык-Куль.

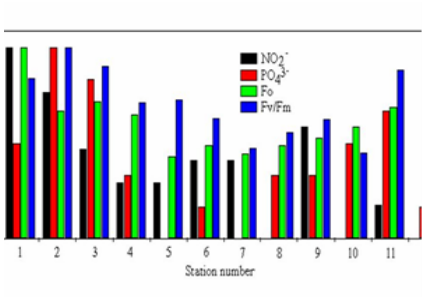

Рис. 8 - Распределение параметров флуоресценции Fo (Хл*) и Fv/Fm, концентрации неорганического азота и фосфатов вдоль побережья Каракол-Тамга озера Иссык-Куль

Литература:

1. Романовский Е.В., Тимченко И.Е. Адаптивные процессы в модели морской экосистемы, основанный на уравнениях «Реакции-Диффузии» ISSN 0233-7584. Мор. гидрофиз. журн., 2013, № 2.

2. Tynybekov A.K., Azamatov N.A. Model calculation of ecological risk. The Second International Symposium on Earth Observation for Arid and Semi-Arid Environments (ISEO 2014), Central Asia: Looking from Space, 10-12 September 2014, Issyk-Kul, Kyrgyzstan, p. 119-125.

3. Tynybekov A.K. Experimental measurements of phytoplankton Lake Issyk-Kul, News of KGUSTA, vol.3. -Bishkek. 2006, p. 89-93.