УДК 378.14

Салыков С., Төлөгожова Н., Салыкова Н.
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ТЕОРЕМАЛАРДЫ КАРАМА- КАРШЫСЫНАН ДАЛИЛДӨӨ МЕТОДУН ОКУТУУНУН НЕГИЗДЕРИ

Макала мектеп математикасынын негизги сүйлөмүнүн бири болгон теоремаларды карама-каршысынан далилдөө методунун структуралык-мазмундук өзгөчөлүктөрүнө талдоо жүргүзүүгө жана аны окуучуларга үйрөтүүнүн жолдорун иштеп чыгууга арналган.

Мектеп окуучуларынын математика предмети боюнча даярдыктарынын деңгээлин жогорулатууда, ошондой эле өз пикирлерин аргументтүү, негиздеп көрсөтө алуу сыяктуу ой жүгүртүүнүн сапаттарына ээ болууда ар түрдүү математикалык ырастоолордун далилдөөлөрүн аң-сезимдүү жана бекем өздөштүрүүсүнө жетишүүнүн мааниси чоң. Анткени аксиомалар, түшүнүктөр жана алардын аныктамалары менен катар эле, негизги математикалык сүйлөмдөрдүн бири катарында теоремаларды жана алардын далилдөөлөрүн программа талап кылгандай деңгээлде өздөштүрүү менен гана окуучулар предметтик билимдерге толук кандуу ээ болушту деп ишенимдүү түрдө айтууга болот жана ал окуучулардын акыл сезиминин функционалдык касиеттеринин өсүп-өнүгүшүнүн негизги булагы болуп калмакчы [1; 4].

Илимий-методикалык булактарда көрсөтүлгөндөй, программалык талаптарды иш жүзүнө ашыруу үчүн, айрыкча, ырастоолорду далилдөөнүн методдорунун логикалык математикалык негиздерин окуучулар тарабынан жетиштүү деңгээлде өздөштүрүүсү өзгөчө мааниге ээ болуу менен, алардын жалпы эле интелектуалдык деңгээлинин өсүп-өнүгүшүнө жана калыптанышына оң таасир берет [3; 15].

Көрсөтүлгөн багытта өркүндөтүлгөн жана өркүндөтүлбөгөн анализ, синтез, вектордук, координаттык ж.б. методдору менен бирге эле, теоремаларды далилдөөдө кеңири колдонулушка ээ болгон, бирок теориялык негиздери өтө бүдөмүк абалда кала берген (албетте, окуучулар үчүн) карама- каршысынан далилдөө методуна өзгөчө орун таандык. Анткени бул метод менен далилдөө процесси формалдуу логиканын үчүнчү мүмкүнчүлүктү төгүнгө чыгаруу жана карама-каршылык закондорун, жок дегенде көмүскө түрдө, колдонууну талап кылып, ошондой эле логикалык төгүндөө операциясын пайдалануу аркылуу аткарыла турган, берилген сүйлөмгө карама-каршы сүйлөмдү түзүү менен коштолуп, натыйжада, далилдөөнү өздөштүрүү окуучулардан тапкычтыкты, аналитикалык ой жүгүртө билүүнү жана корутунду жасоо ыкмаларын тиешелүү деңгээлде өздөштүрүүнү талап кылат. Карама-каршысынан далилдөө методун колдонуу окуучулар үчүн бир катар бүдөмүк жооптор менен коштолгон суроолорду пайда кылат: “Эмне үчүн далилдөө процесси $\forall x)(Px) \Rightarrow Q(x))$ сыяктуу үч (мында кванторлук операция теореманын түшүндүрүүчү бөлүгүн көрсөтүп турса, P(x), Q(x) предикаттары, тиешелүү түрдө, анын шарты жана корутундусу деп аталары белгилүү) элементтүү структуранын ичинен теореманын корутундусу орун албасын деген болжолдоодон башталат”, “Карама–каршылыкка алып келүүнүн негизин кандайча түшүнсө болот”, “Эмне үчүн алынган карама-каршылык теореманы корутундусу анын шартынан логикалык натыйжасы экендиги, б.а., теорема далилденгендиги жөнүндөгү корутундуну чыгарууга негиз болот” ж.б. Бул сыяктуу суроолорго окуучулар ынангандай, демек, түшүнүү менен кабыл алышкандай деңгээлде жооп берүү үчүн сөз болуп жаткан методдун логикалык-математикалык негизин мугалим өзү терең түшүнүү аркылуу, аны дидактикалык жактан иштеп чыгуу менен жеткиликтүүлүк принциптин талабына ылайык окуучуларга сунуштоосу абзел.

Илимий–методикалык булактарда төмөнкү класстардан эле баштап (жок дегенде предметтик окутуу башталган 5- класстан) ырастоолорду карама-каршысынан далилдөө методун өздөштүрүүнүн сапаты аң-сезимдүүлүк, оперативдүүлүк жана ийкемдүүлүк сыяктуу көрсөткүчтүктөргө ээ болуусуна жетиштүү үчүн даярдоо этабын ишке ашыруу сунушталат [3, 18; 1, 29].

Албетте, бул сыяктуу сунушту ишке ашыруу үчүн даярдоо этабынын мазмунун, ыкмалардын жана каражаттарын мазмундук-методикалык жана дидактикалык–логикалык багыта негиздүү деңгээлде иштеп чыгуу зарыл боло турганы талашсыз. Маслен, окуучуларга сунуш кылынуучу айрым окуу материалдарын эффективдүү пайдалануу менен айтылыштардын төгүндөөсүн туура таба билүү ыкмаларына ээ кылууга болот: а саны нөлдөн чоң (кичине) эмес деген сүйлөмдү жазып, ага карама-каршы айтылышты атагыла. (Окуучулар: $a \leq 0$ (же $a \geq 0$ айтылышы) деген сүйлөмдөрдүн төгүндөөсү катарында а>0 (же а<0) деген сүйлөм экенин айтышат. (Мында биринчи сүйлөм, маселен, чын болсо, анын төгүндөөсү калп боло турганы көмүскө түрдө колдонулуп жатканын байкайбыз); ошондой эле, “а =в болот деген сүйлөм калп болсо, ал сандардын ортосунда кандай катыш орун алышы мүмкүн деген” суроону да берүүгө болот (окуучулар : же а >в же а<в деген жооптун бериши күтүлөт). [3; 5, 41-42].

Жогоруда көрсөтүлгөндөй даярдоо иштеринин мазмунун өздөштүргөндөн кийин, планиметрия курсунда карама-каршысынан далилдөө методу менен берилген теоремаларга кездешишет.[2, 12],[4, 17]. Карама–каршысынан далилдөө методунун логикалык негизин төмөнкүдөй логикалык закон ченемдүүлүктөр түзө турганын белгилейли. $A \Rightarrow B$ (1) деген формула “А айтылышынан В айтылышы келип чыгат” дегенди билдирип, шарттуу түрдө кыскалык үчүн, далилдөөнү талап кылган ырастоону билдирсин дейли. Анда бул формула-теореманы төмөндөгүчө теңдеш өзгөртүп түзүүгө мүмкүн:

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B \equiv \overline{A \& \overline{B}} \equiv \overline{A \& \overline{B}} \vee (C \& \overline{C}) \equiv A \& \overline{B} \Rightarrow C \& C \qquad (2)$$

(1) Формулага тең күчтүү болгон жана карама- каршысынан далилдөөдө кеңири колдонулуучу төмөнкүдөй логиканын закон ченемдүүлүктөрү бар экенин белгилеп кетели:

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee B \equiv (\overline{A} \vee B) \vee \overline{A} \equiv \overline{A \& \overline{B}} \vee \overline{A} \equiv$$

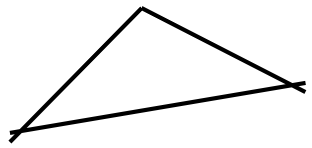
$$\equiv A \& \overline{B} \Rightarrow \overline{A} (3)$$

$$A \Rightarrow B \equiv \overline{A} \vee R \equiv (\overline{A} \vee B) \vee B \equiv \overline{A \& \overline{B}} \vee B \equiv A \& \overline{B} \Rightarrow B (4)$$

Бул формулаларды далилдөөдө логикалык операциялардын касиеттерин жана алардын арасындагы байланыштарды көрсөткөн логикалык теңдештиктер, ошондой эле де-Моргандын тең күчтүүлүгү колдонулганын белгилеп кетели.

(2) натыйжаны, мазмунду окусак: $A \Rightarrow B$ деген теореманын ордуна А айтылышы менен В айтылышынын (демек, корутундунун) төгүндөөсүнүн коньюнкциясынан бири-бирин төгүнгө чыгара турган эки сүйлөм (С жана С) келип чыгат, деген ырастоо далилденип жатканын көрөбүз. Мисал катарында, “Ар кандай үч бурчтукта чоң бурчтун каршысында чоң жак жатат (жана тескерисинче)“ деген теореманын далилдөөсүнө талдоо жүргүзөлү. (Албетте, окуучулар менен бирдикте теореманын түшүндүрүү бөлүгүндө каалагандай үч бурчтук жөнүндө сөз болуп жатканын, шарты болсо чийме боюнча $\alpha > \beta$, ал эми корутундуну н а>в деген катыштар аркылуу бериле турганын тактоо менен анын структурасына анализ жүргүзүп алабыз).

C
b
a
A
α
c
B



Теореманы далилдөөгө киришүүнүн астында мугалим карама-каршысынан далилдөө методунун өзгөчөлүгүнө окуучулардын көңүлүн дагы бир жолу бурат: бул жол менен аткарылган бардык далилдөөлөрдө, далилдеенүүчү сүйлөмгө карама-каршы сүйлөм орун алат деп болжолдоо менен, аны теореманын шарты менен бириктирүү аркылуу жүргүзүлгөн талкуулоо туура эмес корутундуга алып келе турганын негиздеп көрсөтүү ишке ашырылат. Андан ары далилдөө процессин сүйлөмдөрдүн негизделген төмөнкүдөй удаалаштыгы түрүндө сунуштоого болот.

1. а жана в кесиндилеринин ортосундагы а >в катышына карама-каршы сүйлөмдү изилдеп көрсөтүүнү тапшырма катарында окуучуларга беребиз. Окуучулар мурунку темаларда өздөштүргөн билимдерин эстерине түшүрүшөт да, эки кесинди узундуктары боюнча a>b, a<b жана а=в сыяктуу үч ар түрдүү гана катышта боло турганын белгилешип, далилденип жаткан теореманын корутундусуна a$\leq$ в деген катыш карама- каршы сүйлөм болот деген жыйынтыкка келишет.

2. а<в болсун деп болжолдойлу .

3. Анда $\alpha < \beta$, анткени бул теореманын астында: “Ар кандай үч бурчтукта чоң жактын каршысында чоң бурч жатат деген” ырастоо далилденген.

Бирок шарт боюнча $\alpha > \beta$, анда алынган карама- каршылык а< в шарты орун албай турганын негиздейт.

4. а=в шарты да аткарылбай турганын негиздеп көрсөтүүнү сунуштайбыз.

Чынында эле а= в болсо, анда АВС үч бурчтугу тең капталдуу болуп калаар эле, да, анын негиздери α жана β бурчтары барабар болмок. Биз кайрадан 3-кадамда көрсөтүлгөндөй а = в катышы орун албайт деген жыйынтыкка келебиз. Ошентип, а $\leq$ в катышы орун албай турганы көрсөтүлдү, анда а>в деген сүйлөмдүн чын экендиги келип чыгат. Бул теореманы далилдөөдө (3) тең күчтүүлүк колдонулганын белгилеп кетели.

Толуктук үчүн тескери теореманын далилдөөсүн кыскача келтирели. Мейли, а>в болсун, анда $\alpha > \beta$ чын айтылыш болорун далилдейбиз. Карама-каршысынан далилдөө методунун өзгөчөлүгүнө ылайык, окуучулар $\alpha > \beta \equiv \alpha \leq \beta$ деген катышты өз сөздөрү менен түшүндүрүшөт.

1. Эгерде $\alpha = \beta$ болсо, анда тең капталдуу үч бурчтуктун касиетин эстерине түшүрүү менен, а = в барабардыгы орун алат деген корутундуга келишет да, бирок бул катыш теореманын шартына карама- каршы экендигин белгилешет.

2. Эгерде $\alpha < \beta$ катышы аткарылат деп болжолдосок, анда далилденген боюнча а< в деген, теореманын шартына карама- каршы келген корутунду келип чыгат.

Албетте, теореманы далилдөөдө тавтологияга жол бербөө үчүн, маселен, а> в болсо, анда $\alpha > \beta$ шарты аткарыла турганын кесиндилердин барабардык түшүнүгүнө жана өлчөп коюунун аксиомаларына таянуу менен далилдөөгө болот [2; 68]. Анда $\alpha > \beta \Rightarrow a > в$ тескери теорема болуп калат.

Ошондой эле адегенде $\alpha > \beta \Rightarrow a > в$ логикалык натыйжасын түз теорема катары, синустардын теоремасына жана бөлчөктөрдү салыштыруу эрежелерине таянуу менен негиздеп көрсөтүп, андан ары а> в $\Rightarrow \alpha > \beta$ импликациясын тескери теорема катарында далилдөөгө болоор эле [4, 195].

Карама-каршысынан далилдөө методу стереометрия курсунда аксиомалардын натыйжаларын, ошондой эле фигуралардын ортосундагы негизги катыштардын (сөз түз сызыкардын жана тегиздиктердин параллелдик жана перпендикулярдык катышы жөнүндө бара жатат) жалгыздыгын далилдөөдө колдонулса, алгебра курсунда $\sqrt{2}$ түрүндөгү, квадраттык тамыр так чыгарылбай турган сандардын иррационалдуу сандар боло турганын, ошондой эле кандайдыр бир аралыкта монотондуу болгон функция берилсе, f (x)=a (a саны f-тин бул аралыктагы маанилеринин бири) теңдемесинин жалгыз тамыры жашай тургандыгы жөнүндөгү теореманын далилдөөсүнүн бир бөлүгү карама-каршысынан далилдөө методун колдонуу менен жүргүзүлгөнүн белгилейли.

Андан ары, карама-каршысынан далилдөө методу менен түздөн-түз тааныштыруу үчүн окуучуларга төмөнкүдөй тапшырманы аткарууну сунуштайбыз.

Маселе: x жана y сандары, x + y = 75 шарты аткарылгандай берилген x саны y тен 35 ке чоң белгилүү болсо, y = 20 га барабар экендиги далилдегиле.

Чыгаруу, мейли, y+20 болсун. Анда сандардын ортосундагы мүмкүн болуучу катыштарга ылайык, же y >20, же y < 20 аткарылат. Эгерде y > 20 десек, анда x >55 болмок. Натыйжада, x+y > 75, б.а., шартка карама-каршы корутунду алынат.

Эгерде y < 20 десек, x $\neq$ 75 болуп, x + y < 75, б.а., бул учурда да шарт аткарылбайт.

Эми x+y >75, x + y <75 деген туура эмес натыйжаларды алышыбыздын себеби, y > 20, y < 20 деген туура эмес алгачкы сүйлөмдөргө таяндык. Ошентип, y = 20 чын болот

Эми теоремаларды карама-каршысынан далилдөө методунун структурасын окуучулар тарабынан аң-сезимдүү кабыл алуусуна жана өздөштүрүүсүнө жетишүү үчүн даярдоо этабында, 5-6-класстарда, математика сабагында ылайыктуу темаларда төмөнкүдөй көнүгүүлөрдүн системасын мугалим өзү конструкциялоо менен сунуш кыла алат.

1. Төмөнкү айтылыштардын төгүндөй турган сүйлөмдөрдү жазгыла.

а) натуралдык а саны так сан,

б) натуралдык а саны жуп сан,

в) а,в,с сандарынын бардыгы оң белгиге ээ,

г) а,в,с сандарынын айрымдары терс белгиге ээ,

окуучу, маселен, так сан деген айтылыштын төгүндөөсү жуп сан деген сүйлөм болот деп көрсөтүшөт.

2. Төмөнкү ой пикирлерден бири-бирин төгүндөй турган сүйлөмдөрдү тапкыла:

а) биздин класстын бардык окуучулары маселени чыгарышты,

б) биздин класстын айрым окуучулары маселени чыгарышты,

в) биздин класстын айрым окуучулары маселени чыгара алышкан жок.

г) биздин класстын кээ бир окуучулары гана маселени чыгарышты.

Жыйынтыктап айтканда, теоремаларды карама-каршысынан далилдөө методунун негиздери менен дидактикалык закон ченемдүүлүктөрдү эске алуу аркылуу, окуучулардын таанып-билүү ишмедүүлүгүн уюштуруу жана ишке ашыруу алардын математика боюнча билимдеринин аң-сезимдүү жана бекем болушуна алып келээрин мугалим эске алууга тийиш.

Адабияттар:

1. Бекбоев И.Б. Инсанга багыттап окутуунун технологиясынын теориялык жана практикалык маселелери. - Б.: Педагогика, 2003.

2. Бекбоев И.Б. Геометрия: Орто мектептин 7-9-кл. үчүн окуу китеби. - Б.: Педагогика, 2000.

3. Бекбоев И.Б. Геометрия 7-9-кл. окутуу: мугалим үчүн методикалык колдонмо. - Б.: Педагогика, 2003.
4. Погорелов А.В. Геометрия: 7-11-кл. үчүн окуу китеби. - М.:Просвещение, 1993.
5. Салыков С.С. Теоремалар жана алардын далилдөөлөрүн окутуу методикасы. – Каракол, 2009.