УДК 517.2; 518.2

Мурзакматов М. У., Султанбаев Э.А.

ЫГУ им.К.Тыныстанова

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ДЛЯ ЗАДАЧ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

Рассматривается применение метода регуляризации А.Н.Тихонова для задач сглаживания информации и численного дифференцирования функции, заданной приближенно.

Функции, получаемые из эксперимента или путем измерений и наблюдений, неизбежно содержат погрешности. Для использования их в расчетах необходимо сначала «сглаживать» их значения. Во многих задачах требуется находить их производные.

Пусть функция $\overline{f}(x)$ непрерывно дифференцируема на $x \in [c, d]$. Предположим, что из эксперимента известно ее приближение $f_\delta(x)$, такое, что $\| f_\delta(x) - \overline{f}(x) \|_{L_2} \le \delta$. Ясно, что $f_\delta(x)$ может вовсе не иметь производной, но даже если она имеет ее в каждой точке, это производная может сколь угодно сильно отличаться от $\overline{f'}(x)$. Требуется найти приближенное значение для производной функции $\overline{f}(x)$ на $x \in [c, d]$ по заданной входной информации $f_\delta(x)$ и δ.

Задача нахождения производной *n*-го порядка $u(x)$ от функции $f(x)$ такой, что $f(0) = f^{/}(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, сводится к решению интегрального уравнения первого рода [1]

$$\int_o^x \frac{1}{(n-1)!}(x-s)^{n-1} u(s) ds = f_\delta(x). \qquad (1)$$

Таким образом, это задача не обладает свойством устойчивости, что приводит к большим затруднениям при приближенном вычислении производных.

Решение уравнения (1) сводится к нахождению функции $u(s)$, сообщающей минимум следующему сглаживающему функционалу [1]

$$M^\alpha[u, f_\delta] = \int_c^d \left\{ \int_o^x K(x,s) u(s) ds - f_\delta(x) \right\}^2 dx +$$

$$+ \alpha \int_0^x \left\{ u^2(s) + \left(\frac{du}{ds} \right)^2 \right\} ds. \qquad (2)$$

Здесь

$$K(x,s) = \frac{1}{(n-1)!}(x-s)^{n-1};$$

n означает порядок производной функции $f_\delta(x)$; α – параметр регуляризации.

Составим для функционала (2) уравнение Эйлера

$$\int_0^x \overline{K}(s,t) u(t) dt + \alpha(u(s) - u''(s)) = g(s), \qquad (3)$$

где

$$\overline{K}(s,t)=\int_c^d K(x,s)K(x,t)dx,$$

$$g(s)=\int_c^d K(x,s)f_\delta(x)dx.$$

Дискретизируем задачу (3) на равномерной сетке. Отрезок $[c,d]$ разобьем на n равных частей точками

$$x_j=c+jl,\ \ j=0,1,\ldots,n;\quad x_n=d,\ l=(d-c)/n.$$

Интегралы в уравнении (3) заменим интегральными суммами по формуле трапеций, а $u''(s)$ – разностным отношением:

$$\frac{l}{2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\overline{K}(s_i,t_{j-1})u_{j-1}+\overline{K}(s_i,t_j)u_j\right\}+\alpha u_i-\frac{\alpha}{l^2}(u_{i-1}-2u_i+u_{i+1})=g_i, \tag{4}$$

где

$$g_i=\int_c^d K(x,s_i)f_\delta(x)dx,\qquad i=0,1,\ldots n.$$

Производные $u''(s)$ на концах отрезка $[c,d]$ вычисляются по формулам

$$u_o''\approx\frac{u_o-2u_1+u_2}{l^2},\qquad u_n''\approx\frac{u_{n-2}-2u_{n-1}+u_n}{l^2}. \tag{5}$$

Значения $\overline{K}(s_i,t_j)$ и g_i вычисляются также по формуле трапеций:

$$\overline{K}(s_i,t_j)=\int_c^d K(x,s_i)K(x,t_j)dx\approx$$

$$\approx\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{K(x_{k-1},s_i)K(x_{k-1},t_j)+K(x_k,s_i)K(x_k,t_j)\right\}, \tag{6}$$

$$g_i=\int_c^d K(x,s_i)f_\delta(x)\,dx\approx\frac{l}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{K(x_{k-1},s_i)f_\delta^{\,k-1}+K(x_k,s_i)f_\delta^{\,k}\right\}. \tag{7}$$

Подставляя формулы (5), (6), (7) в (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$B_\alpha u\equiv Bu+\frac{\alpha}{l^2}Cu=g. \tag{8}$$

Здесь $B=(b_{ij})$ $(i,j=0,1,\ldots,n)$ – матрица с элементами

$$b_{ij}=\beta_i\left\{K(x_0,s_i)K(x_o,t_j)+2\sum_{k=1}^{n-1}K(x_k,s_i)K(x_k,t_j)+K(x_n,s_i)K(x_n,t_j)\right\},$$

где

$$\beta_o=\beta_n=l^2/4,\quad \beta_i=l^2/2,\qquad i=1,2,\ldots,n-1;$$

C – матрица вида

$$C = \begin{pmatrix} l^2-1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & l^2+2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & l^2+2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & l^2+2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & l^2-1 \end{pmatrix};$$

g – вектор с компонентами $(g_0, \ g_1, \dots, g_m)^T$,
где

$$g_i \approx \frac{l}{2}\{K(x_o, \ s_i) f_\delta{}^o + 2\sum_{k=1}^{n-1} K(x_k, \ s_i) f_\delta{}^k +$$
$$+ K(x_m, \ s_i) f_\delta{}^m \ \}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Пусть вместо $f(x)$ мы имеем $f_\delta(x_i) = f(x_i)[1 + \varepsilon(v_i - 0{,}5)]$, где ε – уровень погрешности, v_i – случайные числа на отрезке $[0, 1]$.

В случае первой производной, т. е. при $n=1$ имеем $K(x,s) = 1$, поэтому $\overline{K}(s,t) = \xi$, а матрица B имеет элементы $b_{i\,j} = \beta_i\left(\xi_o + 2\sum_{k=1}^{n-1}\xi_k + \xi_n\right)$.

Для нахождения первой производной можно составить другой функционал Тихонова [2]

$$M^\alpha[u, f_\delta] = \| u - f_\delta \|^2_{L_2} + \alpha \| u \|^2_{W_2^1}, \tag{9}$$

соответствующий задаче

$$Eu = f, \quad u \in W_2^1, \quad f \in L_2, \tag{10}$$

где E – оператор вложения из W_2^1 в L_2. Из общей теории следует, что если u_δ^α - экстремаль функционала (9), а значение параметра $\alpha\,(\delta)$ выбрано по критерию невязки

$$\rho(\alpha) = \| u_\delta^\alpha - f_\delta \|^2_{L_2} = \delta^2,$$

$$\lim_{\delta \to 0} \| u_\delta^\alpha - \overline{u} \|_{W_2^1} = \lim_{\delta \to 0} \| u_\delta^\alpha - \overline{f} \|_{W_2^1} = 0.$$

Таким образом, функция $u_\delta^\alpha(x)$ дифференцируема почти всюду и ее производная $\frac{d}{dx}u_\delta^\alpha(x)$ при $\delta \to 0$ стремится к $\frac{d}{dx}\overline{f}(x)$ в норме L_2.

Если задача решается со свободными концами, т.е. $\overline{f'}(c) = \overline{f'}(d) = 0$, то, приравнивая к нулю первую вариацию функционала (9), получим уравнение для экстремали функционала:

$$u - f_\delta + \alpha u - \alpha u'' = 0, \quad u'(c) = u'(d) = 0. \tag{11}$$

Выберем по x равномерную сетку с шагом $l = (d-c)/n: \quad x_i = c + i\,l, \quad i = 0, 1, \dots, n$. Тогда для внутренних точек сетки

$$u_i + \alpha u_i - \frac{\alpha}{l^2}\left(u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}\right) = f_i\,, \qquad i = 1,\ldots, n-1,$$

или

$$-\frac{\alpha}{l^2}u_{i-1} + \left(1 + \alpha + \frac{2\alpha}{l^2}\right)u_i - \frac{\alpha}{l^2}u_{i+1} = f_i\,, \tag{12}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Так как

$$u_0'' \approx \frac{u_0 - 2u_1 + u_2}{l^2}\,, \qquad u_n'' \approx \frac{u_{n-2} - 2u_{n-1} + u_n}{l^2}\,,$$

то для $i = 0$ и $i = n$ получаем уравнения

$$\left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{l^2}\right)u_0 + \frac{2\alpha}{l^2}u_1 - \frac{\alpha}{l^2}u_2 = f_0 \tag{13}$$

и

$$-\frac{\alpha}{l^2}u_{n-2} + \frac{2\alpha}{l^2}u_{n-1} + \left(1 + \alpha - \frac{\alpha}{l^2}\right)u_n = f_n \tag{14}$$

соответственно.

Полученная система уравнений (12) – (14) легко решается для фиксированного α методом прогонки [3]. Пусть $\alpha > 0$ фиксировано. Запишем систему уравнений (12) – (14) в виде

$$a_i u_{i-1} - b_i u_i + c_i u_{i+1} = -f_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{15}$$

$$-a_0 u_0 - b_0 u_1 + c_0 u_2 = -f_0\,, \tag{16}$$

$$a_n u_{n-2} - b_n u_{n-1} - c_n u_n = -f_n\,, \tag{17}$$

Здесь

$$a_i = c_i = \frac{\alpha}{l^2}\,, \qquad b_i = 1 + \alpha + \frac{2\alpha}{l^2}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n-1\,,$$

$$a_0 = 1 + \alpha - \frac{\alpha}{l^2}\,, \qquad b_0 = \frac{2\alpha}{l^2}\,, \qquad c_0 = \frac{\alpha}{l^2}\,,$$

$$a_n = \frac{\alpha}{l^2}\,, \qquad b_n = \frac{2\alpha}{l^2}\,, \qquad c_n = 1 + \alpha - \frac{\alpha}{l^2}\,.$$

Решение этой системы ищется в виде

$$u_i = \alpha_i\, u_{i+1} + \beta_i\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{18}$$

Отсюда получаем, что

$$u_{i-1} = \alpha_{i-1}\,\alpha_i\, u_{i+1} + \alpha_{i-1}\beta_i + \beta_{i-1}\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,. \tag{19}$$

Подставляя (18) и (19) в (15) и приравнивая коэффициенты при u_{i+1}, получим, что

$$\alpha_i = \frac{c_i}{b_i - a_i\,\alpha_{i-1}}\,, \qquad \beta_i = \frac{a_i\,\beta_{i-1} + f_i}{b_i - a_i\,\alpha_{i-1}}\,, \quad i = 1, \ldots, n-1\,. \tag{20}$$

Для пользования формулами (20) необходимо определить α_0 и β_0. Они находятся из уравнений (15) при $i = 1$, (16) и (18) при $i = 0$:

$$\alpha_0 = \frac{b_1 c_0 - b_0 c_1}{a_0 c_1 - a_1 c_0}\,, \qquad \beta_0 = \frac{c_1\, f_0 - c_0\, f_1}{a_0 c_1 + a_1 c_0}\,. \tag{21}$$

Используя формулы (21), по формулам (20) вычисляются все

α_i, β_i $(i = 1, 2, ..., n-1)$. Из уравнений (15) при $i = n-1$, (17) и (18) при $i = n-1$ находим

$$u_n = \frac{b_n\left(f_{n-1} + a_{n-1}\gamma\right) - b_{n-1}\left(f_n + a_n\gamma\right)}{-b_n\left(a_{n-1}\alpha_{n-2}\alpha_{n-1} + c_{n-1}\right) + b_{n-1}\left(a_n\alpha_{n-2}\alpha_{n-1} - c_n\right)},$$

где

$$\gamma = \alpha_{n-2}\beta_{n-1} + \beta_{n-2}.$$

Затем по формуле (18) последовательно определяем u_{n-1}, u_{n-2},...., u_0.

Устойчивость метода прогонки при наших значениях коэффициентов гарантируется [3]. Значение параметра регуляризации α может быть выбрано по критерию невязки.

Рассмотрим примеры приближенного вычисления производных 1 – го порядка [1]. Пусть:

1) $f_1(x) = \int\limits_0^{x-2} e^{-t^4} dt$. Тогда $u'(x) = e^{-\xi^4}$, $\xi = x - 2$.

2) $f_2(x) = \int\limits_0^{x} \sin\xi \, d\xi$. Тогда $u'(x) = \sin x$.

Графики точных и приближенных производных функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ показаны соответственно на рис. 1 и 2. Уровень погрешности правой части в обоих случаях равен $\varepsilon = 20\%$.

Литература

1. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
2. Гончарский А. В., Черепащук А. М., Ягола А. Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики. – М.: Наука, 1978. – 336 с.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.