

Министерство образования, науки и молодежной политики
Кыргызской Республики
Ысыккульский государственный университет им.
К.Тыныстанова

На правах рукописи

УДК 532. 546

Мурзакматов Мукай Усупович

**ПРОГНОЗИРОВАНИЕ ЭКОЛОГИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ
ПОДЗЕМНЫХ ВОД С ИДЕНТИФИКАЦИЕЙ
ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ**

01.02.05 – Механика жидкости, газа и плазмы

Диссертация на соискание ученой степени доктора
физико–математических наук

Научный консультант: д.т.н.,
профессор, засл. деятель науки
Кыргызской Республики
Джаныбеков Ч.Дж.

Оглавление

Введение	5
----------------	---

Глава 1

Краткий обзор методов решения задач идентификации гидрогеофизических параметров

§1.1. Краткая историческая справка	9
§1.2. Краткая характеристика методов решения задач идентификации.....	14
§1.3. Математические модели исследуемых проблем	19
§1.4. О решении тестовых задач.	26

Глава 2

Приближенное решение плановых задач фильтрации и массопереноса

§2.1. Решение двумерного уравнения напорной фильтрации	30
§2.2. Решение двумерного уравнения массопереноса	36
§2.3. Решение задач фильтрации подземных вод методом фрагментов	47
§2.4. Об идентификации параметров планового фильтрационного потока	59
§2.5. Идентификация водопроницаемости пласта методом регуляризации	67

§2.6. Идентификация водопроницаемости водоносных пластов на наблюдательных участках	73
Выводы	87

Глава 3

Приближенное решение пространственных задач фильтрации и массопереноса

§3.1. Краевая задача для пространственной стационарной фильтрации	91
§3.2. Нестационарное пространственное течение подземных вод	96
§3.3. Решение краевой задачи для пространственной нестационарной фильтрации с использованием метода фрагментов	102
§3.4. Приближенное решение стационарного уравнения массопереноса	111
§3.5. Математическая модель переноса загрязнителей в подземных водах в нестационарном режиме	117
Выводы	123

Глава 4

Применение теории возмущений к идентификации гидрогеофизических параметров пористых сред

§4.1. Идентификация коэффициента фильтрации пористой среды методом теории возмущений	124
§4.2. Идентификация гидрогеологических параметров среды в	

нестационарных течениях подземных вод	140
§4.3. Идентификация параметров в задаче о переносе загрязнителей в пористой среде	161
§4.4. Алгоритмы для определения коэффициента диффузии и пористости грунта	184
Выводы	199

Глава 5

Вычислительные эксперименты по идентификации гидрогеофизических параметров с применением теории возмущений

§ 5.1. Идентификация водопроводимости в стационарном напорном потоке	200
§ 5.2. Идентификация коэффициента диффузии в плановом напорном потоке	208
§ 5.3. Идентификация водопроводимости в пористых сред в плановом нестационарном потоке	216
§ 5.4. Идентификация коэффициента фильтрации в стационарном пространственном потоке	225
Выводы	234
Заключение	235
Литература	237

Введение

Актуальность темы диссертации. В Кыргызской Республике в последние годы масштабы гидротехнического и гидромелиоративного строительства сокращаются, а инфраструктура названных объектов стареет, выходит из строя. Интенсивный рост больших городов приводит к нехватке питьевой воды, загрязнению их территорий отходами хозяйственной деятельности предприятий и жителей, в результате чего загрязняются не только поверхностные стоки, но и пресные подземные воды. Поэтому исследование процессов переноса загрязнителей подземными водами и прогнозирование возможных последствий таких процессов является одной из важных проблем охраны окружающей среды.

Применение к региональным задачам гидрогеодинамики различных прямых и идентификационных методов приводит к увеличению размерности и плохой обусловленности алгебраических систем. Для уменьшения их размерности в работе используется модификация метода конечных элементов (МКЭ), в которой область фильтрации разбивается на крупные фрагменты, а потеря точности компенсируется использованием квадратичных базисных функций. Эта модификация условно названа методом фрагментов (МФ).

При решении идентификационных задач гидрогеологии основная трудность состоит в восстановлении оператора уравнений по заданному набору некоторых функционалов задач. В качестве функционалов обычно принимаются показания измерительных приборов. Наиболее доступным и экономичным методом идентификации гидрогеофизических параметров является приближенное решение обратных задач для дифференциальных уравнений теории фильтрации. Основной проблемой в работе является

разработка и апробация алгоритмов идентификации гидрогеофизических параметров, основанных на методе малых возмущений.

Тема диссертации связана с научной программой “Разработка принципов, методов, технических средств и базовой информационной системы прогнозирования экологического состояния подземной гидросферы”, выполняемой в Институте автоматике НАН КР в 1998-2005гг. (№ госрегистрации 0000903).

Цель диссертации заключается в разработке и реализации экономичных алгоритмов приближенного решения многомерных прогнозных и идентификационных проблем теории фильтрации подземных вод и переноса загрязнителей в пористых средах.

Задачи диссертационной работы состоят: в теоретическом исследовании движения подземных вод и переносимых ими загрязняющих веществ с помощью математического моделирования с применением вычислительной техники в месторождениях подземных вод (МПВ); в применении экономичных методов и алгоритмов решения характерных проблем теории фильтрации, дающих возможность адекватно описывать пространственное движение подземных вод; в анализе и использовании существующих методов решения обратных задач математической физики и разработке нового метода идентификации гидрогеофизических параметров среды.

Научная новизна работы. Разработан метод идентификации гидрогеофизических параметров пористой среды, основанный на методе малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений и проведен сравнительный анализ с известными методами решения обратных задач.

Теоретическая и практическая значимость. Метод идентификации, основанный на теории возмущений, имеет важное теоретическое значение

при решении обратных задач фильтрации жидкости. Он также может применяться при исследовании процессов, описываемых эллиптическими и параболическими уравнениями. Практическая ценность работы заключается в том, что разработанные алгоритмы и программы могут применяться в гидрогеологических расчетах, а также в учебном процессе для чтения спецкурсов и выполнения дипломных работ.

Экономическая значимость полученных результатов. Предлагаемая методика идентификации гидрогеофизических параметров может применяться в водохозяйственных и гидромелиоративных расчетах, частично заменяя дорогостоящие опытно – фильтрационные работы (ОФР).

Основные положения диссертации, выносимые на защиту.

1. Для кусочно–однородных водоносных пластов предлагается использовать модифицированный МКЭ.

2. МКЭ и МФ реализованы трехмерные модели прогнозирования движения подземных вод и переноса загрязняющих веществ с идентификацией гидрогеофизических параметров в стационарном и нестационарном режиме.

3. Исходя из математической модели процесса фильтрации с переносом загрязнителей, удалось идентифицировать неизвестные гидрогеофизические параметры неоднородной среды в двух – и трехмерных задачах. Показаны эффективность и надежность использованных в работе методов идентификации гидрогеофизических параметров пористой среды.

4. Рекомендуется ввести в практику изучения экологического состояния МПВ методику идентификации гидрогеофизических параметров с помощью метода малых возмущений, имеющую широкий диапазон применения.

5. На основе предложенных алгоритмов созданы комплексы программ, экономичные по отношению затрат машинного времени и легко реализуемые другими пользователями для исследования гидрогеофизических процессов.

Личный вклад соискателя. Анализ и разработка математических методов и алгоритмов расчета движения подземных вод и переноса загрязнителей и идентификации фильтрационных параметров водоносных пластов; составление программ для прогнозных и идентификационных задач гидрогеодинамики; количественный и качественный анализ результатов и обсуждение итогов проведенных вычислительных экспериментов.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты исследований диссертационной работы обсуждались: на ряде международных, всесоюзных и республиканских научно–технических конференций по математическому моделированию гидрогеологических процессов и автоматизации гидромелиоративных систем, на съездах и совещаниях по теоретической и прикладной механике в 1974–1990 гг., на Международной научной конференции в Каз ГНУ им. Аль–Фараби (Алматы, 1997г.), на республиканских научно – практических конференциях (Бишкек, Каракол, Нарын, Жалалабат, 1999-2004гг.), на Международном научно-техническом симпозиуме в КТУ им. И. Раззакова (Бишкек, 2004г.), на второй Международной конференции по электронике и компьютерным технологиям ИКЕССО' 2005 (Бишкек, 2005г.).

Опубликованность результатов. Содержание диссертационной работы изложено в одной научной монографии и свыше 25 научных статьях, которые опубликованы в рецензируемых научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, пяти глав и заключения, изложенных на 235 страницах машинописного текста, содержит 25 таблиц, 9 рисунков и список использованной литературы из 194 наименований.

ГЛАВА 1

КРАТКИЙ ОБЗОР МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

§1.1. Краткая историческая справка

При проведении гидрогеологических исследований на достаточно крупных МПВ, особенно при обосновании проектов водозаборных и дренажных сооружений или крупных оросительных и осушительных систем, применение математического моделирования с использованием вычислительной техники считается обязательным [33]. Это требование объясняется экономичностью и быстротой реализации проекта в жизнь [1,4,44,47,48,58,75,96,101].

Основным методом решения указанных проблем в настоящее время является математическое моделирование гидрогеологических процессов с применением ЭВМ. В гидрогеологии математическое моделирование как метод расчета берет начало с разработки Н.Н.Павловским теории электрогидродинамических аналогий (ЭГДА). Дальнейшее развитие этот метод получил в работах Н.И.Дружинина [158], В.И. Аравина и С.М. Нумерова [158], В.М. Шестакова [70,88,159,188], П.Ф. Фильчакова и В.И. Панчишина [158], А.Г. Тарапона [158] и других [14,20,69,70,88,97, 105,154,156,158,159,178]. С.Н.Нумеровым был разработан метод, основанный на приведении плоской задачи теории установившейся фильтрации к граничным задачам Римана–Гильберта в теории аналитических функций, который получил применение при решении ряда задач фильтрации в земляных плотинах.

П.Я. Полубариновой–Кочиной разработан метод решения задач теории установившейся фильтрации, основанный на аналитической теории дифференциальных уравнений [153,155].

С возросшим объемом по гидротехническому строительству возникла необходимость иметь более достоверные количественные характеристики физических параметров подземного потока, что привело к бурному развитию фильтрационных расчетов, основанных на различных приближенных методах. Развитие современных вычислительных методов математики совместно с усовершенствованием быстродействующих ЭВМ привели к созданию эффективных приближенных методов для решения многих практических задач фильтрации, встречающихся в гидрогеологических изысканиях. К ним относятся метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Метод конечных разностей при фильтрационных расчетах был применен в работах Г.Н. Каменского, П.Ф. Фильчакова, В.С. Козлова, А.В. Лебедева, А.П. Киселева, А.И. Михальцевич, Ф.Б. Абуталиева и др. авторов.

За последние три десятилетия одним из приближенных методов решения задач теории фильтрации является МКЭ, который оказался удобным при изучении движения подземных вод в областях со сложной геометрией и с неизвестной свободной поверхностью. В настоящее время на ЭВМ решаются задачи региональной оценки ресурсов и эксплуатационных запасов подземных вод [32,95,97,157,159,178], составления различных прогнозов на орошаемых территориях с учетом работы дренажей [4,14,47,48,95,97,185], рассматриваются задачи оптимального выбора условий эксплуатации водозаборов, дренажей [34,95], решаются обратные задачи [5,14, 44,45,46,48, 50,51,58,59, 101,114–117, 124,129–137, 154,155].

Известно, что решение обратных задач базируется на широком использовании данных наблюдений за режимом подземных вод.

Теоретическое обоснование использования режимно – балансовых наблюдений для определения инфильтрационного питания и водоотдачи пласта впервые было дано Г.Н. Каменским (1933–1947гг.), развито М.А. Вевиоровской (1936–1950гг.) и Н.Н. Биндеманом (1957г.), а затем получило дальнейшее развитие применительно к более широкому кругу параметров в ряде работ [16,37,88,101]. По результатам этих работ, кстати, очень дорогостоящих, за фильтрационные параметры среды принимаются величины, «осредненно» характеризующие эти параметры. Эти значения фактически значительно отличаются от истинных значений, что далеко не удовлетворяет запросам практики. Поэтому задачи идентификации, связанные с определением фильтрационных параметров среды, все больше привлекают внимание практиков.

Обратные задачи гидрогеологии часто решаются совместно с прямыми задачами, так как приходится параллельно уточнять как значения динамических функций, так и значения гидрогеологических параметров. Ясно, что в практической ситуации задача должна быть хорошо поставлена в физическом смысле, но в обычной математической формулировке обратная задача является плохо обусловленной. Это происходит главным образом из-за недостающих или неточных данных, а также из-за того, что различные комбинации искомых параметров могут привести к одинаковым результатам, что означает не единственность. Недостаток информации делает исследуемую модель недоопределенной, которую можно улучшать по мере получения новых данных путем решения обратных задач.

Основные трудности в решении обратных гидрогеологических задач связаны с тем, что они относятся к классу некорректных задач. Математически это выражается в отсутствии непрерывной зависимости решения от входных данных, означая, что небольшие погрешности в измерении расходов или отметок уровней воды, на основе анализа

которых ведется решение обратной задачи (входные данные), могут обуславливать весьма большой разброс в величине оцениваемых параметров. Таким образом, возникает неоднозначность в результатах подбора параметров. Такое предположение может быть обосновано на общем геолого-структурном и гидрогеологическом анализе, а также на результатах изучения пространственной изменчивости фильтрационных свойств исследуемого горизонта.

Идентификацией гидрогеологических параметров в такой постановке с использованием различных математических моделей занимались Ф.Б.Абуталиев [3], Н.Н. Веригин [24], В.В. Веселов [30], И.К. Гавич [32,33], Ч.Джаныбеков [48,52], М.Дж. Джаманбаев [44-46], И.Е. Жернов [69,70], В.А.Мироненко [100,101], Н.А.Огильви [149,150], В.М.Шестаков [88,101], R.W.Nelson [142,143], S. Neuman [142], V. Vemuri, W.J. Karplus [186], Emsellem Y., G. De Marsily [63], Capilla J. E., J. J. Gomez-Hernandez, A. Sahuquillo [166,65], Lavenue A. M., B. S. RamaRao, G. de Marsily, M. G. Marietta [82,83,163], Sun N. Z. [169] и др.

Вемури и Карплюс [186] рассмотрели задачу оценки параметров для свободного горизонта как задачу управления для систем с распределенными параметрами и использовали для ее решения гибридную ЭВМ.

Емселлем и де Марсили [63] разработали «автоматический» метод и применили его к вычислению параметра T для установившегося потока в неоднородных водоносных горизонтах. Считая водоносный горизонт однородным, из условия минимума целевой функции находится значение T . Затем площадь разбивается на части и при той же целевой функции значение T вычисляется для каждой части. Процесс продолжается до установления целевой функции.

Методы и приемы приведения некорректных задач к условно корректным задачам в математическом плане изложены в работах

[6,38,39,80,90,106-110,146,147,161,172-176,179]. Задачам гидрогеологии посвящены работы [3,5,14,30,33,44-46,48,59,63,101,116,117,142,147,186], в которых показано, что обоснование однозначности решения обратных задач проводится путем введения критерия физического правдоподобия или геологической регуляризации, представляющей балансовую проверку соответствия объекта и модели.

В работах А.Н.Тихонова для решения некорректно поставленных задач предлагается привлечь дополнительную информацию, которая может быть: а) количественного характера, позволяющей выделить компактное множество, на котором ищется решение задачи [171,172]; б) качественного характера, например, о гладкости искомой функции, принадлежности ее к некоторому гильбертову пространству и применить затем метод регуляризации [173,175,176]. Необходим принцип отбора решений, позволяющий уменьшить неопределенность в подборе того или иного параметра, ограничивающий возможный диапазон их изменения. Такой отбор можно осуществлять с помощью специально задаваемого функционала, называемого стабилизатором, за который обычно принимается величина расхождения натуральных и теоретически полученных результатов.

В случае одномерной фильтрации в неоднородной пористой среде показано, что методом регуляризации А.Н. Тихонова можно адекватно идентифицировать отдельные гидрогеологические параметры среды (коэффициенты фильтрации, водопроницаемости пласта) при заданных уровнях грунтовых вод в нескольких точках [114-116]. Определена величина притока воды к горизонтальной дрене при заданном уровне грунтовых вод в одной точке. С помощью численных экспериментов показана слабая зависимость изменения уровня грунтовых вод от коэффициента фильтрации, что обнаруживается при наблюдении над реальными объектами. Применение

метода регуляризации к идентификации гидрогеофизических параметров рассмотрено в главе 5.

§1.2. Краткая характеристика методов решения задач идентификации

Теоретическая оценка ресурсов МПВ и прогнозирование их режима с учетом работы вертикальных водозаборов, инфильтрации и других естественных и искусственных факторов с помощью математического моделирования является сложной, далеко еще не решенной проблемой. Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо не только решать нелинейные дифференциальные уравнения и их системы совместно с начально-краевыми условиями в области со сложной геометрией, но и приближенно образовывать соответствующие начальные и граничные условия, однозначно описывающие процесс фильтрации на конкретных локальных подобластях изучаемого района, а также следует приводить в соответствие модели к изучаемому объекту с помощью идентификации отдельных гидрогеологических параметров среды.

Накопление значительного объема данных о различных типах водоносных горизонтов привело к критической переоценке теоретических решений и к осознанию важности обратной задачи. Использование численных методов в значительной мере способствовало объединению гидравлических и химических моделей водоносных горизонтов.

Под обратными задачами гидрогеологии подразумеваются задачи, целью которых является доопределение либо гидрогеологических параметров, либо граничных условий, либо дифференциального оператора задачи. Путем решения обратных задач исследователь должен доопределить некорректную задачу и идентифицировать математическую модель процесса

фильтрации, т.е. установить соответствие исследуемого гидрогеологического объекта своему образу, выраженному в математической модели. В таком понимании содержание обратных задач и задач идентификации совпадают.

Все методы решения обратных задач можно условно подразделить на две группы: аналитические и приближенные. В первой группе искомые параметры определяются непосредственным расчетом по известным зависимостям, полученным для соответствующей прямой задачи.

Преимуществом аналитических методов является получение решения в виде выражений, содержащих все параметры модели и характеризующих вид функциональной зависимости параметров. К недостаткам аналитических методов относится требование аналитически непрерывной информации об опытных функциях и о параметрах модели. На практике получить такую информацию в зависимости от масштабности и характера изучаемой задачи затруднительно. Кроме того, нелинейность уравнений и сложная геометрия области усложняют нахождение точных аналитических решений модели.

Приближенные методы идентификации основаны на требованиях дискретной информации об искомым функциях и параметрах модели и в применении численных методов. Эти методы используют сложные итерационные процессы для целенаправленного поиска параметров, т.е. параметры последовательно уточняются от одного приближения к другому в процессе решения прямой задачи. В эту группу входят многие численные методы, отличающиеся своими подходами при решении этой проблемы (например, метод регуляризации, метод малых возмущений и т.д.).

Для решения обратных задач может быть использован метод подбора, где не используется жесткая априорная информация об

искомом решении. Этот метод состоит в том, что мы не решаем обратную задачу, а много раз решаем прямую задачу, подставляя в исходное уравнение различные функции и выбираем ту из них, которая дает невязку, не превышающую погрешности входных данных. Поскольку среди возможных решений могут встречаться сильно различающиеся функции, руководствуясь физической интуицией, выбираем решение, наиболее соответствующее «здравому смыслу».

Поскольку используемая при этом априорная информация, как правило, не формализована в виде обоснованных количественных критериев отбора решения, и компакт, на котором ищется решение, не выделен, метод подбора дает результаты, в конечном счете зависящие от субъективных вкусов вычислителя. При этом нет гарантии, что приближенные решения сходятся к точному. Кроме того, этот метод тем труднее реализовать, чем выше точность входных данных. Если же подбор решения производится из выделенного компакта, то ясно, что этот метод является неэффективным по сравнению с регулярными методами решения некорректных задач на компакте.

Часто используются приближенные приемы решения задач идентификации, основанные на методах конечных разностей, конечных элементов, граничных элементов, сопряженных и случайных функций и на градиентных методах [3,14,23,33,63,88,100,179,186]. Основным недостатком таких методов является отсутствие явной зависимости решения от параметров математической модели, что затрудняет достижение критерия физического правдоподобия модели с натурой. В таких случаях применяются итерационные процедуры, использующие целенаправленный поиск или метод проб и ошибок, когда искомые параметры последовательно уточняются от одного приближения к другому в процессе решения прямой задачи.

В работах [44,48] разработаны новые методики идентификации математической модели, позволяющие построить адекватную модель объекта и дополняющие изъяны в проблеме идентификации, созданы аналитические и приближенные методы решения задач фильтрации, обоснованы достоверность и точность разработанных методик идентификации теоретически и численно. В [48] разработан ряд алгоритмов, идентифицирующих коэффициент водопроницаемости неоднородного пласта, основанные на вариационном принципе или на аппарате нелинейного программирования, использующие линейные и квадратичные базисы конечных элементов. Характер конструкции каждого алгоритма связан с условием задания внутренних условий, точность их согласована с точностью входных данных, хотя отдельные из них являются адаптирующимися и само исправляющимися в процессе итерации.

В указанных работах разработан приближенно–аналитический метод решения задач идентификации с использованием аппарата группового анализа дифференциальных уравнений, развитого Л.В. Овсянниковым [148] и его учениками. Метод позволяет параметрически представлять функциональную зависимость искомого коэффициента и определить соответствующие им классы линейно–независимых частных инвариантных решений основного уравнения. Приближенное решение модели строится через линейно–независимые инвариантные решения основного уравнения, в котором в явном виде содержатся все параметры модели. Это позволяет определять параметры модели непосредственно из какого – либо дополнительного критерия или условия без итерационной процедуры, как решение трансцендентного уравнения с заданной точностью.

В последнее время для нахождения класса решений задачи по идентификации водопроницаемости применяются два связанных между собой

метода [73]: параметризация и стохастическое моделирование. Параметризация состоит в сокращении количества идентифицируемых параметров, которое достигается интерполяцией локальных значений или зонированием [67,111,193]. В стохастических методах идентификация производится последовательно на n равновероятных начальных решениях. В результате получается множество m возможных окончательных решений ($m < n$), поскольку некоторые начальные решения не могут обеспечить корректную сходимость задачи [65,166].

На основе этих методов разработаны так называемые генетические алгоритмы. Генетические алгоритмы были изобретены в 1970г. Дж. Холландом и его сотрудниками [68]. Они относятся к группе методов искусственного интеллекта и по определению З. Михалевича [103], являются вероятностными алгоритмами, имитирующими функционирование естественных явлений и применяются во многих областях прикладных наук [192,152,112,115,166]. Хорошие результаты дает совмещение генетических алгоритмов с методом «Экспериментальных точек» [82,194] и с традиционными методами оптимизации. Достаточно широкий обзор методов решения идентификационных задач гидрогеологии дан в работах [42,61,169].

Некоторые обратные задачи математической физики успешно решаются на основе методов теории малых возмущений и теории сопряженных функций [90–93]. В последнее время на основе этих теорий разработаны алгоритмы для идентификационных задач теории фильтрации [54–57].

§1.3. Математические модели исследуемых проблем

1.3.1. Уравнения фильтрации подземных вод

При выводе уравнений движения подземных вод будем исходить из следующих упрощающих допущений: жидкость, полностью заполняющая поры грунта в области течения, однородна и несжимаема; под водоносной средой понимается грунт, отдельные частицы которого неподвижны и устойчивы в своем взаимном расположении, при этом грунт считаем несжимаемым; капиллярные силы вдоль свободной поверхности не учитываются; физические параметры водоносного пласта (пористость, водопроницаемость, коэффициент фильтрации и др.) считаем неизменяющимися с течением времени; силы сопротивления зависят только от трения частиц жидкости о частицы грунта; и, наконец, допускается, что скорости фильтрации невелики, силы инерции пренебрежимо малы по сравнению с силой тяжести и силами трения [20,71,153,154].

При этих предположениях гидродинамические уравнения Эйлера имеют вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_{x,c}}{\partial t} &= -\frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + F_x + R_x, \\ \frac{\partial v_{y,c}}{\partial t} &= -\frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + F_y + R_y, \\ \frac{\partial v_{z,c}}{\partial t} &= -\frac{l}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + F_z + R_z,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где (x,y,z) – декартовы координаты точек области; t – время; p – давление жидкости; ρ – плотность; $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)^T$ – вектор массовых сил; $\vec{R} = (R_x, R_y, R_z)^T$ – вектор силы сопротивления, которое испытывает частицы

жидкости в порах; $\vec{V}_c = (V_{x,c}, V_{y,c}, V_{z,c})^T$ – вектор средней скорости частиц некоторого элементарного объема. Обозначив через $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)^T$ вектор скорости фильтрации, а через n – пористость грунта, можно написать

$$\vec{v} = n\vec{V}_c. \quad (1.2)$$

Считая, что ось Oz направлена вертикально вверх, имеем

$$\vec{F} = (0, 0, -g)^T. \quad (1.3)$$

Здесь g – ускорение силы тяжести.

Используя закон Дарси как линейный закон сопротивления, где последнее считается пропорциональным первой степени скорости фильтрации, П.Я. Полубаринова–Кочина [71,154] предложила зависимость

$$R_x = -\frac{gV_x}{k}, \quad R_y = -\frac{gV_y}{k}, \quad R_z = -\frac{gV_z}{k}, \quad (1.4)$$

где k – коэффициент фильтрации. Тогда из системы (1.1) с учетом (1.2), (1.3) и (1.4), на основании вышеперечисленных допущений получим линеаризованные и осредненные уравнения вида [154]

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \frac{\partial v_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{gV_x}{k}, \\ \frac{1}{n} \frac{\partial v_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{gV_y}{k}, \\ \frac{1}{n} \frac{\partial v_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{gV_z}{k} - g. \end{aligned} \quad (1.5)$$

П.Я. Полубариновой–Кочиной [153] показано, что при значении коэффициента фильтрации $k=1 \div 100$ (м/сут) членами, содержащими дифференцирование по времени, можно пренебречь и тогда из системы (1.5) вытекает, что

$$\vec{v} = -k \operatorname{grad} H, \quad H = \frac{p}{\rho g} + z. \quad (1.6)$$

Здесь z – геометрическая высота, H – пьезометрический напор. Следовательно, при перечисленных допущениях из системы уравнений Эйлера вытекает линейный закон Дарси (1.6).

Уравнения движения (1.5) содержат четыре неизвестные функции: v_x, v_y, v_z и p . Присоединяя к этим уравнениям уравнение неразрывности с учетом несжимаемости жидкости и скелета грунта

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0, \quad (1.7)$$

приходим к замкнутой системе (1.6), (1.7). Подставляя в (1.7) выражения для составляющих скорости фильтрации согласно (1.6)

$$v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_z = -k \frac{\partial H}{\partial z}, \quad (1.8)$$

приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = 0. \quad (1.9)$$

Решая уравнение (1.9) при определенных краевых условиях, можно определить H , тем самым, согласно (1.8) и (1.6), и неизвестные функции v_x, v_y, v_z и p .

Если в пласте существуют источники и стоки подземных вод, то для неустановившегося режима фильтрации получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = F. \quad (1.10)$$

Здесь μ – упругая водоотдача, F - функция источников и стоков.

Единственность решений дифференциальных уравнений фильтрации обеспечивается наличием начальных и граничных условий.

1. За начальное условие принимается положение напоров в определенный момент времени t_0 :

$$H = H(x, y, z, t_0) = H_0(x, y, z). \quad (1.11)$$

При проведении расчетов обычно полагают $t_0 = 0$.

2. На непроницаемых границах (на твердых стенках) должно выполняться условие $\partial H / \partial n = 0$. Эти границы представляют собой поверхность тока. Такими границами являются подземные контуры гидротехнических сооружений и поверхности непроницаемого или слабопроницаемого грунта (водоупора).

3. Водные границы или границы раздела насыщенный грунт – открытый водоем представляют собой эквипотенциальную поверхность при горизонтальном положении воды в водотоке. При стационарном потоке напор на границе $H = \text{const}$, при нестационарном – $H = f(t)$. Если напор изменяется вдоль границы, то граница не эквипотенциальная и задается условием $H = f(x, y, z)$ при стационарном и $H = f(x, y, z, t)$ – при нестационарном режиме.

Если существует гидравлическая связь между фильтрационным потоком и несовершенным водоемом (дрена, река, озеро), то расход подземных вод пропорционален разности между напорами подземных вод H и уровнем воды в водоеме H_0 :

$$k \frac{\partial H}{\partial n} = \chi (H - H_0), \quad (1.12)$$

где χ – параметр, характеризующий несовершенство водоема.

1.3.2. Уравнения диффузии и массообмена

При изучении фильтрации смешивающихся жидкостей в условиях их физико-химического взаимодействия с пористой средой рассматриваются совместно уравнения фильтрации (1.9), (1.10) и уравнения диффузии и массообмена. Баланс массы вещества для произвольного элемента области фильтрации в пористой среде без учета изменения плотности и вязкости потока приводит к уравнениям [25,29]:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial N}{\partial t} = - \frac{\partial (n_0 C)}{\partial t} \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \varphi(C, N), \quad (1.14)$$

где u_x, u_y, u_z - компоненты массовой скорости ассоциированного с жидкостью вещества; C и N -массовые концентрации вещества в жидкой (на единицу объема раствора) и твердой (на единицу объема пористой среды) фазах; n_0 - пористость среды. Уравнение (1.14) является уравнением кинетики. Если концентрация твердой фазы не учитывается, то уравнение (1.14) не рассматривается, а слагаемое $\partial N / \partial t$ в уравнении (1.13) отсутствует.

Основным законом диффузии в неподвижной среде является закон Фика (точнее его первый закон), согласно которому диффузионный поток пропорционален градиенту концентрации

$$q = -D \frac{\partial C}{\partial n}$$

где C -концентрация диффундирующего вещества; q -диффузионный поток, т.е. количество вещества, переносимое через единицу поверхности за

единицу времени; D – коэффициент конвективной диффузии. Для динамических условий в связи с наличием дополнительного механизма переноса вещества фильтрующимся потоком первый закон Фика для полного потока вещества записывается в виде [36]:

$$u = vC - q,$$

или в покомпонентной форме

$$u_x = v_x C - D_x \frac{\partial C}{\partial x}, \quad u_y = v_y C - D_y \frac{\partial C}{\partial y}, \quad u_z = v_z C - D_z \frac{\partial C}{\partial z}, \quad (1.15)$$

т.е. складывается из конвективного переноса вещества со средней скоростью фильтрации v и диффузионного переноса с коэффициентом конвективной диффузии D .

Здесь D_x, D_y, D_z – компоненты коэффициента конвективной диффузии; v_x, v_y, v_z – компоненты вектора скорости фильтрации, определяемые формулами (1.8).

Подставляя выражения (1.15) в уравнение (1.13) и полагая пористость среды постоянной, получаем уравнение (без учета кинетики)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(D_x \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_y \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_z \frac{\partial C}{\partial z} - v_z C \right) + \\ & + g(x, y, z, t) = n_0 \frac{\partial C}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где $g(x, y, z, t)$ – возможный источник растворимого вещества в области фильтрации.

Для решения конкретных задач о переносе загрязняющих растворов, кроме поля скоростей $v = (v_x, v_y, v_z)$, должны быть заданы начальные и граничные условия. Это означает, что естественным образом

рассматривается сперва уравнение фильтрации, а затем, во вторую очередь, уравнение солепереноса.

1. В качестве начального условия принимается естественное распределение концентрации вещества в определенный момент времени $t=0$ в области фильтрации V

$$C = C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V. \quad (1.17)$$

Граничные условия могут принимать различные формы. На границе Σ области фильтрации или на ее части задается одно из следующих условий [20,33]:

2. Задается концентрация загрязняющего вещества

$$C = C_p(x, y, z, t) \quad \text{или} \quad C = C_p(x, y, z), \quad (1.18)$$

где C_p —концентрация вещества в растворе.

3. Задается поток вещества через границу

$$-D \frac{\partial C}{\partial n} = q(x, y, z, t). \quad (1.19)$$

Если граница или ее часть непроницаема для диффузии, то

$$q = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial C}{\partial n} = 0. \quad (1.20)$$

4. Если фильтрационный поток граничит с жидкой непрерывной средой (морем, озером, рекой, бассейном), где распределение концентрации растворенного вещества равно C_p то задается поток вещества с учетом конвективного отвода и дисперсии

$$-D \frac{\partial C}{\partial n} + vC = q(x, y, z, t). \quad (1.21)$$

Поскольку $q = vC_p$, из (1.21) получаем

$$D \frac{\partial C}{\partial n} = v(C - C_p). \quad (1.22)$$

Это условие является обобщением условий (1.18) и (1.20): при большой скорости фильтрации, когда $v \gg D$, получается условие $C = C_p$; при относительно высоком значении коэффициента дисперсии и малой скорости фильтрации, когда $v \ll D$, – условие $\frac{\partial C}{\partial n} = 0$.

§1.4. О решении тестовых задач

Метод математического моделирования дает возможность получить количественное описание. Однако для построения математической модели, которая адекватно описывала бы натуру, требуется детальное знание физического механизма явления, что в реальных условиях в виду сложности объекта исследования не всегда выполнимо. Кроме этого, при моделировании возникает необходимость определения параметров системы (коэффициентов фильтрации, водопроницаемости, коэффициентов растворения, диффузии, сорбций и т.д.), которые сами являются функциями процесса и непосредственное измерение которых чрезвычайно затруднительно и дорого. Наиболее доступным, экономичным и надежным методом определения гидрогеофизических параметров пористых сред является приближенное решение коэффициентных обратных задач для дифференциальных уравнений фильтрации подземных вод и солепереноса.

В одномерных задачах для определения коэффициента фильтрации покровного слоя, притока грунтовых вод к горизонтальной дрене и фильтрационного сопротивления дрены разработаны эффективные алгоритмы, основанные на методе регуляризации А.Н. Тихонова [114-116].

Но для многомерных задач применение метода регуляризации затруднительно, так как в этих случаях процедуры решения прямых задач приходится применять в каждом узле сеточной области при большом количестве итераций. Тем не менее в работе рассматривается решение задач идентификации водопроводимости и коэффициента фильтрации водоносных пластов в двумерных и трехмерных случаях методом регуляризации и проведено сравнение с результатами, полученными другими методами.

Некоторые обратные задачи математической физики успешно решаются на основе метода теории малых возмущений, сопряженных дифференциальных уравнений [89-93]. В последнее время на основе этих теории разработаны алгоритмы для решения идентификационных задач теории фильтрации [54-57]. Они дают возможность снимать недоопределенность существующей математической модели, существенно ослабить некорректность постановки и дает возможность построить приближенное обобщенное решение.

Рассмотрим применение теории малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений к проблеме идентификации водопроводимости, коэффициента фильтрации и коэффициента диффузии пористой среды на примерах решения тестовых задач для двумерных и трехмерных уравнений. Алгоритмы идентификации указанных параметров подробно изложены в работах [54-57]. Отметим лишь, что эти алгоритмы являются высокотехнологическими и простыми в пользовании. Они состоят из двух блоков, в первом из них по одной и той же процедуре решаются прямые (прогнозные) и ретроспективные (сопряженные) задачи для функций $H(x, y, t)$, $C(x, y, t)$, $H^*(x, y, t)$, $C^*(x, y, t)$ и их вариаций, а во втором – решаются СЛАУ относительно вариаций искомых функций δT , δk и δD . Последняя система является плохо обусловленной, поэтому для ее решения применяется метод сингулярного разложения матрицы (SVD-метод) [183] и используется

количественная и качественная информация об искомых функциях, служащая в качестве регуляризирующих факторов. Таковыми являются значения искомых функций в некоторых точках области фильтрации, полученные в результате наблюдений, измерений и экспериментов и дифференциальные свойства их вариаций (например, свойство гладкости). С помощью этих факторов удастся свести некорректные задачи к последовательности устойчивых алгоритмов и получить вполне достоверные значения искомых параметров.

Эксперименты проводились на основе методов теории малых возмущений и теории сопряженных функций [91-93], отдельные задачи решались также методом регуляризации и с использованием итерационной процедуры, предложенной в [48]. Во всех случаях используется количественная информация об искомых функциях. В силу некорректности обратной задачи получаемые СЛАУ относительно искомых функций или их вариаций оказываются плохо обусловленными. Для ослабления некорректности использовалась также качественная информация об искомых функциях (например, гладкость и нормальность). Но и при любой дополнительной информации значения искомых функций изменяются в довольно широких интервалах, поскольку динамические функции (напоры и концентрации загрязнителей) малочувствительны к изменениям коэффициента фильтрации, водопроницаемости и коэффициента диффузии.

Теперь несколько слов о тестовых задачах. Решение прикладных задач осуществляется путем разработки алгоритма и составления программы для ЭВМ с последующим проведением вычислительных экспериментов, результаты которых служат доказательством адекватности рассматриваемых или создаваемых математических моделей, эффективности разрабатываемых алгоритмов и работоспособности программ.

В задачах фильтрации в качестве параметров математических моделей берутся безразмерные переменные и функции, при этом область фильтрации и искомые функции должны обладать свойством осевой и центральной симметрии, необходимым для контроля работы алгоритма и программы. Из этих соображений в рассмотренных тестовых задачах в главах 2, 3, и 5, в качестве области фильтрации берутся круг (в двумерных задачах) и круговой цилиндр (в трехмерных задачах), а параметрами математических моделей являются функции, симметричные относительно своих аргументов. Такой подход применяется исключительно ради упрощения вычислений, удобства обработки результатов, выявления характерных особенностей рассматриваемых задач и степени влияния регуляризирующих факторов на устойчивость и достоверность значений идентифицируемых параметров. При проведении расчетов в уравнениях (1.10), (1.11), (1.16), (1.17) и краевых условиях (1.12), (1.22) необходимо перейти к безразмерным переменным, которые обеспечивают необходимую точность вычислений. Такой переход можно осуществить по формулам

$$x^* = \frac{x}{l}, \quad y^* = \frac{y}{l}, \quad z^* = \frac{z}{l}, \quad t^* = \frac{t}{t_{хар}}, \quad H^* = \frac{H}{H_{хар}}, \quad k^* = \frac{k}{k_{хар}}, \quad C^* = \frac{C}{C_{хар}},$$

$$D^* = \frac{D}{k_{хар}H_{хар}}, \quad \mu^* = \frac{l^2\mu}{k_{хар}t_{хар}}, \quad n_0^* = \frac{l^2n_0}{t_{хар}k_{хар}H_{хар}}, \quad F^* = \frac{l^2F}{k_{хар}H_{хар}},$$

$$g^* = \frac{l^2g}{k_{хар}H_{хар}C_{хар}}, \quad \chi^* = \frac{l\chi}{k_{хар}}, \quad v^* = \frac{lv}{k_{хар}H_{хар}},$$

где l - диаметр области фильтрации V ; $t_{хар}$, $H_{хар}$, $C_{хар}$, $k_{хар}$ - характерные (максимальные) значения величин t, H, C, k .

При переходе к безразмерным переменным уравнения (1.10)-(1.12), (1.16), (1.17), (1.22) сохраняют свой вид. Опуская звездочки, в дальнейшем имеем дело с теми же уравнениями.

ГЛАВА 2

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛАНОВЫХ ЗАДАЧ

ФИЛЬТРАЦИИ И МАССОПЕРЕНОСА

§2.1. Решение двумерного уравнения напорной фильтрации

Стационарная фильтрация подземных вод моделируется дифференциальным уравнением эллиптического типа [154]

$$LH = -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (2.1)$$

с краевым условием

$$\gamma H = T \frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha, \quad (x, y) \in \partial D, \quad (2.2)$$

где $H = H(x, y) = \frac{p}{\rho g} + z$ - напор, ρ - плотность жидкости, p - давление, g - ускорение свободного падения, z - геометрическая высота; $T = T(x, y) = m(x, y)k(x, y)$ - водопропроводимость, $m(x, y)$ - мощность, $k(x, y)$ - коэффициент фильтрации пласта; $f(x, y)$ - функция источников и стоков; $Q = Q(x, y) > 0$ - функция, учитывающая водообмен с выше - и нижележащими пластами; $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ - заданные функции; D - область фильтрации, ∂D - ее граница; γ - постоянная, равная нулю или единице в зависимости от того, какое из смешанных граничных условий задается на данном участке контура.

Предположим, что решение задачи (2.1), (2.2) существует и единственно; оно является классическим и принадлежит пространству

Соболева $W_2^{(l)}$, которое состоит из функций $L_2(D)$, имеющих в D суммируемые с квадратом обобщенные производные. Приближенное решения задач (2.1), (2.2) ищем с помощью метода Галеркина [167], согласно которому невязки уравнений (2.1) и (2.2) должны быть ортогональны функциям, используемым при аппроксимации.

Если функции $N_1, N_2, \dots, N_j, \dots$ образуют базис в рассматриваемом пространстве и для всех $j=1, 2, \dots$ выполняются равенства

$$\iint_D N_j(LH - f)d\sigma + \int_{\partial D} N_j(LH - \alpha)ds = 0, \quad (2.3)$$

то невязки уравнений (2.1) и (2.2) обращаются в нуль. Поскольку в практических задачах множество базисных функций конечно, равенства (2.3) выполняются приближенно и мы обычно добиваемся минимизации функционала, стоящего в левой части равенств (2.3). Минимум этого функционала находится с помощью метода конечных элементов (МКЭ).

Сущность МКЭ заключается в том, что плоская область D произвольным образом разбивается на треугольные (или четырехугольные) элементы (рис. 2.1). Из-за гибкости треугольных элементов аппроксимация области D с помощью треугольников более удобна, чем аппроксимация ее четырехугольниками (или теми и другими одновременно). Поэтому изложение проведем для треугольных элементов, а процедуру разбиения области на треугольные элементы назовем триангуляцией.

Пусть треугольник Δ_e имеет своими вершинами точки i, j, k с координатами $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ (рис. 2.2). Здесь и дальше в этом пункте для простоты записи пользуемся одинарными индексами.

Внутри элементарного треугольника Δ_e решение задачи ищется в виде линейной функции

$$H^e(x, y) = N_i(x, y)H_i + N_j(x, y)H_j + N_k(x, y)H_k, \quad (2.4)$$

где

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y, \quad N_j = a_j + b_j x + c_j y, \quad N_k = a_k + b_k x + c_k y,$$

$$a_i = \frac{x_j y_k - x_k y_j}{2\Delta_e}, \quad b_i = \frac{y_j - y_k}{2\Delta_e}, \quad c_i = \frac{x_k - x_j}{2\Delta_e} \quad (2.5)$$

и т.д.; остальные коэффициенты выписываются с помощью круговой подстановки i, j, k ;

$$2\Delta_e = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

Δ_e - площадь треугольника Δ_e ; H_i, H_j, H_k - искомые значения функции $H^e(x, y)$ в точках i, j и k соответственно.

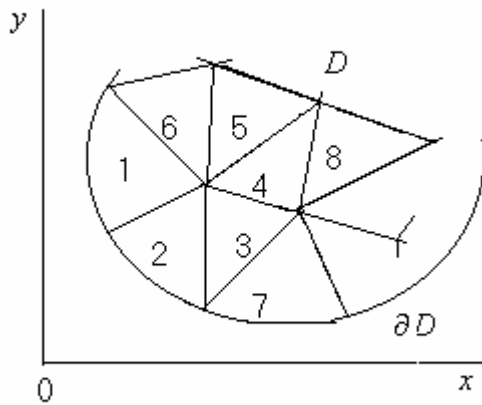


Рис. 2.1

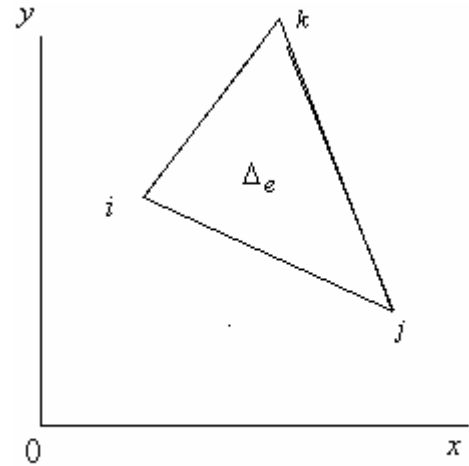


Рис. 2.2

Составляя для каждого элемента (рис. 2.2) выражение вида (2.4) и суммируя их по всем элементам, получаем разложение для искомой функции

$$H(x, y) = \sum_{e=1}^m H^e(x, y) = \sum_{i=1}^n H_i N_i(x, y), \quad (2.7)$$

где m -число элементов, n -число всех узлов сетки. В первом слагаемом в левой части равенства (2.3) применяем формулу Грина и после упрощения получаем равенства

$$\iint_D T \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_j Q H d\sigma + \int_{\partial D} N_j \beta H ds = \iint_D N_j f d\sigma + \int_{\partial D} N_j \alpha ds, \quad (2.8)$$

$$j=1, 2, \dots, n.$$

В равенствах (2.8) вместо функции $H(x, y)$ подставим ее разложение (2.7) и приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно H_i :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_j N_i Q d\sigma + \int_{\partial D} N_j N_i \beta ds \right\} H_i = \iint_D N_j f d\sigma + \int_{\partial D} N_j \alpha ds,$$

$$j=1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} H_i = b_j, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.9)$$

где

$$a_{ji} = \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_j N_i Q d\sigma + \int_{\partial D} N_j N_i \beta ds,$$

$$b_j = \iint_D f N_j d\sigma + \int_{\partial D} \alpha N_j ds. \quad (2.10)$$

Для вычисления коэффициентов и правых частей системы (2.9) интегралы по области разбиваются на m интегралов по треугольникам и вычисляются лишь по элементам, номера вершин которых соответствуют индексам коэффициентов. То же самое можно сказать о контурных интегралах.

Во всех алгебраических уравнениях коэффициенты зависят от координат вершин треугольников, что дает возможность не только автоматизировать построение расчетной сетки, необходимой для составления алгебраических уравнений.

Вдоль отрезка прямой, соединяющего узловые точки, базисная функция изменяется линейно и поэтому она однозначно определяется двумя узловыми значениями независимо от элемента, в котором она рассматривается. Такая непрерывность является необходимым условием минимизации функционала, так как при невыполнении этого условия подынтегральное выражение из (2.2) на некоторых линиях могло бы терпеть разрыв.

Вычислив коэффициенты a_{ij} и b_j , получим замкнутую систему алгебраических уравнений, матрица которой имеет ленточную структуру и является симметричной. Такое свойство матрицы значительно экономит память ЭВМ, так как в памяти вычислительного устройства вместо полной матрицы записываются только ленточные ненулевые коэффициенты. Таким образом, вместо $n \times n$ коэффициентов запоминается не более $4n$ элементов квадратичной матрицы, где n - порядок матрицы. Следовательно, решаемая система уравнений - разреженная.

Каждый узел сетки является общей вершиной нескольких элементов (от 2 до 6 и более), поэтому матрица системы (2.9) не только симметрична, но и имеет диагональное преобладание, что позволяет применять для ее решения точные методы (например метод Гаусса).

Приближенные расчеты по изложенному алгоритму показали эффективность МКЭ при решении краевых задач фильтрации со сколь угодно сложной геометрией области.

Алгоритм и программа отлажены на ряде тестовых задач. Рассмотрим одну из них. В круговой в плане области происходит приток к центральной

откачивающей скважине с постоянным дебитом, пробуренной в напорный водоносный пласт мощностью $m = 100$ м. На границе области, удаленной от центра на $R = 3000$ м, поддерживается постоянный напор $H_0 = 1000$ м. Коэффициент фильтрации пласта изменяется по закону $K(x, y) = 30 + \delta_0 (R - x - y)$, функция источника – по закону $f(x, y) = -200 \varepsilon_0 [60 + 2 \delta_0 R - 3\delta_0 (x + y)] + QH$, а функция $\beta(x, y)$ в краевом условии (2.2) определяется по формуле

$$\beta(x, y) = (\alpha - 2\varepsilon_0 RT) / H_0, \quad (x, y) \in \partial D,$$

где $Q(x, y) = I$, α - произвольная величина, $\varepsilon_0 = 5 \cdot 10^{-6}$, $\delta_0 = 10^{-2}$.

Точным решением задачи является функция $H(x, y) = H_0 - \varepsilon_0 (R^2 - x^2 - y^2)$.

Таблица 2.1

Точные и приближенные значения напоров

Точные значения	Расстояние от центра			
	Приближенные значения функции			
	Относительная погрешность			
1000.00	$l = 3000$ м			
	1012.42	1000.88	1011.46	1010.63
	1.2%	0.0%	1.1%	1.0%
975.00	$l = 2000$ м			
	974.36	975.59	974.13	975.37
	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
960.00	$l = 1000$ м			
	961.78	961.88	961.75	961.94
	0.1%	0.1%	0.1%	0.2%
955.00	$l = 0$ м			
	954.96			
	0.0%			

В таблице 2.1 показаны точные и приближенные значения напоров на различных расстояниях l от центра области.

§2.2. Решение двумерного уравнения массопереноса

Процесс изменения содержания загрязняющего вещества в водоносном пласте во времени, обусловленного конвективным переносом с учетом дисперсии при отсутствии сорбции и кинетики химической реакции, описывается уравнением [11,40]

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla^2 (D C) - \operatorname{div} (v C) + g, \quad (2.11)$$

где C – концентрация загрязняющего вещества в жидкости; D - обобщенный коэффициент диффузии или коэффициент гидродисперсии $D=D_k+D_m$; D_k - коэффициент конвективной диффузии; D_m - коэффициент молекулярной диффузии; $v=v(x,y,t)$ - скорость фильтрации подземных вод; n_0 - активная пористость пласта, которая характеризует активный объем порового пространства, принимающего участие в формировании фильтрационного потока; $g=g(x,y,t)$ -функция источников и стоков загрязняющего вещества.

Загрязняющие вещества переносятся подземными водами, поэтому необходимо определить вектор скорости фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y)$, фигурирующий в уравнении (2.11). Следовательно, задача солепереноса должна быть решена совместно с уравнением фильтрации

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f(x, y, t), \quad (2.12)$$

$$(x, y) \in G, \quad t > 0$$

с начально-краевыми условиями

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (2.13)$$

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = \alpha + \beta H, \quad (x, y) \in S, \quad t > 0, \quad (2.14)$$

где $\mu = \mu(x, y)$ - коэффициент упругой водоотдачи; $H_0(x, y)$ -начальное распределение напоров; $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по направлению внешней нормали к границе области фильтрации.

Если фильтрационный поток считать плановым (т.е. осредненным по высоте), то уравнение (2.11) запишется в следующем виде

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) = g(x, y, t), \quad (2.15)$$

$$(x, y) \in G, \quad t > 0$$

с начально-краевыми условиями

$$C(x, y, 0) = C_0(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (2.16)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial n} = \alpha_c + \beta_c C, \quad (x, y) \in S = \partial G, \quad t > 0. \quad (2.17)$$

Здесь G – область фильтрации, в которой происходит процесс загрязнения, $S = \partial G$ – ее граница; $\alpha_c = \alpha_c(x, y, t)$, $\beta_c = \beta_c(x, y, t)$ – заданные функции; $C_0(x, y)$ -начальное распределение концентрации загрязнителя.

Уравнения (2.12) и (2.15) слабосвязаны, т.к. в уравнении (2.15) присутствует функция $H(x, y, t)$ (через v), но функция $C(x, y, t)$ в уравнении (2.12) не участвует, поэтому следует сначала решить задачу (2.12)-(2.14), вычислить компоненты v_x и v_y вектора $v(x, y)$, а затем решить задачу (2.15)-(2.17).

Задачи (2.12)-(2.14) и (2.15)-(2.17) решаем методом конечных элементов [17-19,68]. Разобьем область G на m треугольных элементов и функции $H(x, y, t)$ и $C(x, y, t)$ в элементе (e) представим в виде линейной комбинации значений этих функций в вершинах треугольника:

$$H^{(e)}(x, y, t) = H_i(t) N_i(x, y) + H_j(t) N_j(x, y) + H_k(t) N_k(x, y), \quad (2.18)$$

$$C^{(e)}(x, y, t) = C_i(t) N_i(x, y) + C_j(t) N_j(x, y) + C_k(t) N_k(x, y), \quad (2.19)$$

где i, j, k - вершины элемента (e);

$$H_i(t)=H(x_i,y_i,t), \quad C_i(t)=C(x_i,y_i,t), \dots; \quad N_s(x,y)=a_s+b_sx+c_sy, \quad s=i, j, k$$

- линейные базисные функции, которые в вершинах i, j, k соответственно равны единице, в других вершинах равны нулю, а в произвольной точке элемента их сумма равна единице [68].

Приближенное решение задач (2.12)-(2.14) и (2.15)-(2.17) ищем в виде

$$H_n(x, y, t) = \sum_{e=1}^m \sum_{(e)} H^{(e)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n H_i(t) N_i(x, y), \quad (2.20)$$

$$C_n(x, y, t) = \sum_{e=1}^m \sum_{(e)} C^{(e)}(x, y, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) N_i(x, y). \quad (2.21)$$

Для приближенного решения поставленной задачи используем обобщенный метод Галеркина. Предварительно временной отрезок (t_0, t_1) разобьем на q элементарных отрезков

$$\Delta t_s = t_s - t_{s-1}, \quad s=1, 2, \dots, q.$$

Подставляя в задаче (2.12)- (2.14) вместо $H(x, y, t)$ функцию $H_n(x, y, t)$ из формулы (2.20), проведя интегрирование на отрезке (t_{s-1}, t_s) и используя обобщенный принцип Галеркина, получаем

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_D N_j (LH_n - f) d\sigma = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_{\Gamma} N_j (lH_n - \alpha) ds, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.22)$$

где

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial}{\partial y} \right) + Q,$$

$$l = T \frac{\partial}{\partial n} - \beta = T \left[\frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) \right] - \beta(x, y, t).$$

Распишем формулу (2.22) более подробно. Имеем

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_D N_j \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_D \mu N_j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t} [H_i(t) N_i(x, y)] dt d\sigma =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \iint_D \mu(x, y) N_j(x, y) N_i(x, y) d\sigma \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial H_i(t)}{\partial t} dt = \\
&= \sum_{i=1}^n M_{ij} H_i^s - \sum_{i=1}^n M_{ij} H_i^{(s-1)},
\end{aligned}$$

где

$$M_{ij} = \iint_D \mu(x, y) N_i(x, y) N_j(x, y) d\sigma,$$

$$H_i^{(s)} = H_i(t_s), \quad H_i^{(s-1)} = H_i(t_{s-1}).$$

Используя первую формулу Грина, получаем:

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_D N_j \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) - Q H_n \right] d\sigma = \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} H_i(t) dt \iint_D N_j(x, y) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial N_i}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) - Q N_i \right] = \\
&= \sum_{i=1}^n [\gamma H_i(t_s) + (1-\gamma) H_i(t_{s-1})] \Delta t_s \iint_D \left[T \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) + Q N_i N_j \right] d\sigma - \\
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_{\Gamma} N_j T \frac{\partial H_n}{\partial n} ds = \sum_{i=1}^n \gamma H_i(t_s) A_{ij} \Delta t_s + \sum_{i=1}^n (1-\gamma) H_i(t_{s-1}) A_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \beta_j dt.
\end{aligned}$$

Здесь

$$A_{ij} = \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D Q N_i(x, y) N_j(x, y) d\sigma,$$

$$B_j = \int_{\Gamma} N_j T \frac{\partial H_n}{\partial n} ds.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_{\Gamma} N_j (l H_n - \alpha) ds = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{\Gamma} N_j \left(T \frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha \right) ds dt = \\
&= -B_j + \sum_{i=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{\Gamma} N_j (\beta H_n N_i + \alpha) ds dt.
\end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в формулу (2.22), имеем j -ое уравнение системы относительно неизвестной $H_i^{(s)}$;

$$\sum_{i=1}^n R_{ij}^{(\gamma)} H_i^{(s)} = F_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2.23)$$

где

$$R_{ij}^{(\gamma)} = M_{ij} + \gamma(A_{ij} - B_{ij})\Delta t_s, \quad 0 \leq \gamma \leq 1,$$

$$F_j = \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_D N_j f(x, y, t) d\sigma dt + \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_{\Gamma} N_j \alpha(x, y, t) ds dt + \sum_{i=1}^n R_{ij}^{(1-\gamma)} H_i^{(s-1)},$$

$$B_{ij} = \int_{\Gamma} \beta N_j N_i ds.$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений (2.23), получаем искомую функцию $H(x, y, t)$. Используя найденные значения функции $H(x, y, t)$ на s -м временном слое в качестве начального условия, решаем задачу для $(s+1)$ -го слоя, и т.д.

Теперь займемся решением задачи (2.15) - (2.17). Подставляя в задаче (2.15)-(2.17) вместо $C(x, y, t)$ функцию $C_n(x, y, t)$ из формулы (2.21) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G N_j (LC_n - g) d\sigma = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_S N_j (lC_n - \alpha_c) ds, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (2.24)$$

где

$$L = n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} - v_x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial}{\partial y} - v_y \right),$$

$$l = D \frac{\partial}{\partial n} - \beta_c = D \left[\frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) \right] - \beta_c(x, y, t).$$

Для первого слагаемого оператора L имеем

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G N_j n_0 \frac{\partial C_n}{\partial t} d\sigma = \sum_{i=1}^n \iint_G n_0 N_j \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t} [C_i(t) N_i(x, y)] dt d\sigma = \\
& = \sum_{i=1}^n \iint_G n_0(x, y) N_j(x, y) N_i(x, y) d\sigma \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial C_i(t)}{\partial t} dt = \\
& = \sum_{i=1}^n S_{ij} C_i^{(s)} - \sum_{i=1}^n S_{ij} C_i^{(s-1)}. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

Здесь

$$C_i^{(s)} = C_i(t_s), \quad C_i^{(s-1)} = C_i(t_{s-1}), \quad S_{ij} = \iint_G n_0(x, y) N_i(x, y) N_j(x, y) d\sigma.$$

Используя формулу Грина для двух следующих слагаемых оператора L , получаем

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G N_j \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C_n}{\partial y} \right) \right] d\sigma = \\
& = \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G D \left(\frac{\partial C_n}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial C_n}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_S N_j D \frac{\partial C_n}{\partial n} ds = \\
& = \sum_{i=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} C_i(t) dt \iint_G D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma - \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \int_S N_j D \frac{\partial C_n}{\partial x} ds = \\
& = \sum_{i=1}^n \gamma D_{ij} C_i^{(s)} \Delta t_s + \sum_{i=1}^n (1-\gamma) D_{ij} C_i^{(s-1)} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} D_j dt, \quad 0 < \gamma \leq 1, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

где

$$D_{ij} = \iint_G D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma, \quad D_j = \int_S N_j D \frac{\partial C_n}{\partial n} ds.$$

Для остальных слагаемых оператора L получаем выражение

$$\begin{aligned}
& \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G N_j \left[\frac{\partial (v_x C_n)}{\partial x} + \frac{\partial (v_y C_n)}{\partial y} - g \right] d\sigma = \\
& = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G C_n \left(v_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_S N_j C_n k \frac{\partial H}{\partial n} ds - \\
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G N_j g d\sigma = - \sum_{i=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} C_i(t) \iint_G N_i \left(v_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma - \\
& - \sum_{i=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} C_i(t) \int_S \frac{1}{m} N_i N_j (\beta H + \alpha) ds - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_G N_j g d\sigma = \\
& = - \sum_{i=1}^n \gamma (V_{ij}^{(s)} + H_{ij}^{(s)}) C_i^{(s)} \Delta t_s - \sum_{i=1}^n (1-\gamma) (V_{ij}^{(s-1)} + H_{ij}^{(s-1)}) C_i^{(s-1)} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} G_j dt.
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
V_{ij}^{(s)} &= \iint_G N_i \left(v_x^{(s)} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_y^{(s)} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma, \\
H_{ij}^{(s)} &= \int_S \frac{1}{m} N_i N_j (\beta^{(s)} H^{(s)} + \alpha^{(s)}) ds, \\
G_j &= \iint_G N_j(x, y) g(x, y, t) d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Теперь преобразуем правую часть равенства (2.24):

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \int_S N_j (l C_n - \alpha_c) ds = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \int_S N_j \left(D \frac{\partial C_n}{\partial n} - \beta_c C_n - \alpha_c \right) ds dt = \\
& = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} D_j dt + \sum_{i=1}^n \gamma B_{ij}^{(s)} C_i^{(s)} \Delta t_s + \sum_{i=1}^n (1-\gamma) B_{ij}^{(s-1)} C_i^{(s-1)} \Delta t_s + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A_j dt.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

В формуле (2.28) использованы следующие обозначения:

$$B_{ij}^{(s)} = \int_S N_i(x, y) N_j(x, y) \beta_c(x, y, t_s) ds, \quad A_j = \int_S N_j(x, y) \alpha_c(x, y, t) ds.$$

Подставляя выражения (2.25), (2.26), (2.27) и (2.28) в формулу (2.24), получаем j -ое уравнение системы относительно неизвестной $C_i^{(s)}$:

$$\sum_{i=1}^n R_{ij} C_i^{(s)} = F_j, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (2.29)$$

где

$$R_{ij} = S_{ij} + \gamma(D_{ij} - V_{ij}^{(s)} - H_{ij}^{(s)} - B_{ij}^{(s)})\Delta t_s,$$

$$F_j = \sum_{i=1}^n \left[S_{ij} + (1-\gamma)(D_{ij} - V_{ij}^{(s-1)} - H_{ij}^{(s-1)} + B_{ij}^{(s-1)})\Delta t_s \right] C_i^{(s-1)} + \int_{t_{s-1}}^{t_s} G_j dt + \int_{t_{s-1}}^{t_s} A_j dt.$$

Скорость фильтрации v находится из уравнения фильтрации по формуле

$$\vec{v} = -k \operatorname{grad} H, \quad \left(v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

В уравнении фильтрации вместо коэффициента фильтрации $\kappa(x,y)$ фигурирует водопроницаемость. Поэтому мы будем считать мощность пласта $m(x,y)$ (или $m=\text{const}$) и коэффициент фильтрации $\kappa(x,y)$ известными. Тогда компоненты скорости фильтрации определяются без труда. Так как в элементе (e) напор представляется в виде (2.18), то в этом элементе

$$\frac{\partial H^{(e)}}{\partial x} = H_i b_i + H_j b_j + H_s b_s, \quad \frac{\partial H^{(e)}}{\partial y} = H_i c_i + H_j c_j + H_s c_s,$$

$$v_x = -k(H_i b_i + H_j b_j + H_s b_s), \quad v_y = -k(H_i c_i + H_j c_j + H_s c_s). \quad (2.30)$$

В элементе (e) для интегралов получаем следующие приближенные формулы:

$$S_{ij} = \frac{n_0}{\tau} \frac{S_e}{12}, \quad D_{ij} = D_{cp}^{(e)} (b_i b_j + c_i c_j) S_e,$$

$$V_{ij} = -k_{cp}^{(e)} [b_j (H_i b_i^{(h)} + H_j b_j^{(h)}) + H_s b_s^{(h)} + c_j (H_i c_i^{(h)} + H_j c_j^{(h)}) + H_s c_s^{(h)}] S_e / 3, \quad (2.31)$$

$$B_{ij} = (\beta_{c,i} + \beta_{c,j}) l_{ij} / 12, \quad G_j = g_{cp}^{(e)} S_e / 3,$$

$$A_j = (\alpha_{c,i} + \alpha_{c,j})l_{ij}/4, \quad H_{ij} = \left(\frac{\beta H + \alpha}{m} \right)_{cp}^{(ij)} l_{ij}/6.$$

В формулах (2.31) $D_{cp}^{(e)}$, $k_{cp}^{(e)}$, $g_{cp}^{(e)}$ означают средние значения соответствующих величин в элементе (e); $\tau = \Delta t_s$; S_e -площадь элемента (e); l_{ij} - длина дуги ij ; верхний индекс (h) означает, что эта величина относится к напору H .

Подставляя выражения для интегралов в систему (2.29), имеем расчетные формулы:

$$R_{ij}^{(e)} = n_0 S_e / (12\tau) + \gamma \{ D_{cp}^{(e)} (b_i b_j + c_i c_j) S_e - k_{cp}^{(e)} [b_j (H_i^{(s)} b_i^{(h)} + H_j^{(s)} b_j^{(h)} + H_s^{(s)} b_s^{(h)}) + c_j (H_i^{(s)} c_i^{(h)} + H_j^{(s)} c_j^{(h)} + H_s^{(s)} c_s^{(h)})] S_e / 3 - \left(\frac{\beta H^{(s)} + \alpha}{m} \right)_{cp}^{ij} l_{ij} / 6 - (\beta_{c,i}^{(s)} + \beta_{c,j}^{(s)}) l_{ij} / 12 \},$$

$$F_j^{(e)} = \sum_{i=1}^n (n_0 S_e / (12\tau) + (1-\gamma) \{ D_{cp}^{(e)} (b_i b_j + c_i c_j) S_e - k_{cp}^{(e)} [b_i (H_i^{(s-1)} b_i^{(h)} + H_j^{(s-1)} b_j^{(h)} + H_s^{(s-1)} b_s^{(h)}) + c_i (H_i^{(s-1)} c_i^{(h)} + H_j^{(s-1)} c_j^{(h)} + H_s^{(s-1)} c_s^{(h)})] S_e / 3 + \left(\frac{\beta H^{(s-1)} + \alpha}{m} \right)_{cp}^{(ij)} l_{ij} / 6 + (\beta_{c,i}^{(s-1)} + \beta_{c,j}^{(s-1)}) l_{ij} / 12 \} C_i^{(s-1)} + \gamma (G_j^{(s)} + A_j^{(s)}) + (1-\gamma) (G_j^{(s-1)} + A_j^{(s-1)}). \quad (2.32)$$

В общем случае матрица системы (2.29) не является симметричной. Решая эту систему при начальном условии (2.3) одним из точных или приближенных методов, находим приближенные значения функции $C(x, y, t)$ на первом временном слое ($s=1$). Используя полученные значения в качестве начального условия, вычисляем значения на следующем временном слое ($s=2, 3, \dots$) и т.д.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий работу алгоритма решения задачи. (Описание области фильтрации дано в § 2.1). В круговой области происходит нестационарный приток к центральной откачивающей скважине. Упругая водоотдача пласта $\mu = 0,1$, мощность пласта $m = 100$ м, коэффициент фильтрации $k(x, y) = 30 + v_0 (R - x - y)$, радиус области фильтрации $R = 3000$ м. Точным решением задачи (2.2) - (2.4) является функция $H(x, y, t) = H_0 - \varepsilon_0 (R^2 - x^2 - y^2) \cdot t$, где t измеряется в сутках, $H_0 = 1000$ м, $\varepsilon_0 = 10^{-6} / 73$, $v_0 = 10^{-2}$.

В фильтрационном потоке происходит диффузия растворенных солей, концентрация которых изменяется по закону $C(x, y, t) = C_0 + \delta_0 (R - x - y) \cdot t$, а коэффициент диффузии предполагается постоянным: $D(x, y) = D_0$, где $C_0 = 10$ г/л, $D_0 = 5 \cdot 10^{-3}$ м²/сут, пористость пласта $n_0 = 0,1$, $\delta_0 = 10^{-3} / 73$.

Результаты решения задач (2.2)-(2.4) и (2.5)-(2.7) даны в таблицах 2.2 и 2.3.

Таблица 2.2

Точные и приближенные значения напоров

t	Точные значения	Расстояние от центра Приближенные значения функции Относительная погрешность			
30 сут	1000.00	$l = 3000$ м			
		1007.87	999.31	1007.02	1006.39
		0.7%	0.0%	0.7%	0.6%
	979.45	$l = 2000$ м			
		979.37	980.59	979.06	980.43
		0.0%	0.1%	0.0%	0.0%
	967.12	$l = 1000$ м			
		968.26	968.34	968.27	968.41
		0.1%	0.1%	0.1%	0.1%
	963.00	$l = 0$ м			
		963.05			
		0.0%			

Продолжение таблицы 2.2					
180 сут	1000.00	$l = 3000 м$			
		997.49	966.18	991.24	988.61
		0.2%	3.3%	0.8%	1.1%
	876.71	$l = 2000 м$			
		887.28	898.98	883.09	898.38
		1.2%	2.5%	0.7%	2.4%
	802.74	$l = 1000 м$			
		805.74	805.85	806.33	806.71
		0.3%	0.3%	0.4%	0.4%
	778.08	$l = 0 м$			
		782.84			
		0.6%			
360 сут	1000.00	$l = 3000 м$			
		985.11	926.50	972.38	967.36
		1.4%	7.3%	2.7%	3.2%
	753.42	$l = 2000 м$			
		776.74	801.04	767.91	799.88
		3.0%	6.3%	1.9%	6.1%
	605.48	$l = 1000 м$			
		610.47	610.87	612.03	612.69
		0.8%	0.8%	1.0%	1.1%
	556.16	$l = 0 м$			
		566.56			
		1.8%			

Таблица 2.3

Точные и приближенные значения концентрации солей

t сут	Расстояние от центра l	Точные значения концентрации			
		Приближенные значения концентрации			
		Относительная погрешность			
30	3000 м	10.00	9.70	9.54	10.00
		9.94	9.69	9.48	9.95
		0.6%	0.6%	0.1%	0.5%
	2000 м	10.41	10.11	10.11	10.41
		10.40	10.12	10.12	10.40
		0.1%	0.1%	0.1%	0.1%

Продолжение таблицы 2.3

	1000 м	11.08	10.67	11.64	10.82
		11.09	10.68	11.65	10.83
		0.1%	0.1%	0.1%	0.1%
	0 м	11.23			
		11.22			
		0.0%			
180	3000 м	10.00	8.22	7.29	10.00
		9.99	7.95	7.23	9.9
		0.1%	3.2%	0.7%	1.0%
	2000 м	12.46	10.66	10.66	12.46
		12.32	10.40	10.59	12.17
		1.1%	2.4%	0.6%	2.3%
	1000 м	16.49	14.02	19.86	14.43
		16.46	13.99	19.80	14.88
		0.2%	0.2%	0.3%	0.3%
	0 м	17.39			
		17.30			
		0.5%			
360	3000 м	10.00	6.44	4.58	1.00
		9.87	5.98	4.46	9.69
		1.3%	7.1%	2.5%	3.1%
	2000 м	14.93	11.32	11.32	14.93
		14.50	10.63	11.12	14.05
		2.9%	6.1%	1.8%	5.9%
	1000 м	22.98	18.05	29.72	19.86
		22.82	17.94	29.45	19.66
		0.7%	0.6%	0.9%	1.0%
	0 м	24.79			
		24.37			
		1.7%			

§2.3. Решение задач фильтрации подземных вод методом фрагментов

При исследовании задач фильтрации численными методами, особенно при идентификации параметров среды, одной из основных трудностей

является решение системы, состоящей из большого количества уравнений. Поэтому создание экономического метода приближенного решения начально-краевой задачи представляет собой актуальную проблему. Для решения этой проблемы целесообразно использовать естественную фрагментность исследуемой области фильтрации. Знание фрагментности области [44,118] позволяет выделить участки, в пределах которых гидрогеологические параметры имеют постоянные значения или их значения изменяются незначительно. В таких случаях вместо относительно малых элементов можно использовать фрагменты для уменьшения количества уравнений, а для компенсации возросшей погрешности из-за увеличения шага сетки следует применять нелинейные, в общем случае произвольные, базисные функции.

Впервые идея метода фрагментов была выдвинута в [9]. В работе [44] предлагается в каждом фрагменте моделировать фильтрационный процесс дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами и в результате вместо одного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами получается система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, количество которых совпадает с количеством фрагментов. В качестве базисных функций используются частные решения уравнений с постоянными коэффициентами.

Неустановившееся движение грунтовых вод в неоднородной среде описывается уравнением

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) - QH + f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t \in (t_0, t_1) \quad (2.33)$$

с начальным

$$H(x, y, t_0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (2.34)$$

и краевым

$$T \frac{\partial H}{\partial n} = \alpha(x,y,t) + \beta(x,y,t)H(x,y,t), \quad (x,y) \in \partial D = \Gamma \quad (2.35)$$

условиями. Здесь обозначения те же, что и в §2.2.

Область течения подземных вод D разбиваем на m фрагментов треугольной формы, так что область D заменяется на многоугольник, состоящий из m треугольников. На рис.2.3 показан типичный фрагмент S с вершинами i, j и k , которые имеют координаты (x_i, y_i) , (x_j, y_j) и (x_k, y_k) .

Введем произвольные линейно -независимые функции $N_1(x,y)$, $N_2(x,y)$ в области D и искомую функцию $H(x,y,t)$ внутри фрагмента S аппроксимируем функцией .

$$H^s(x,y,t) = a_0^s(t) + a_1^s(t)N_1(x,y) + a_2^s(t)N_2(x,y), \quad (2.36)$$

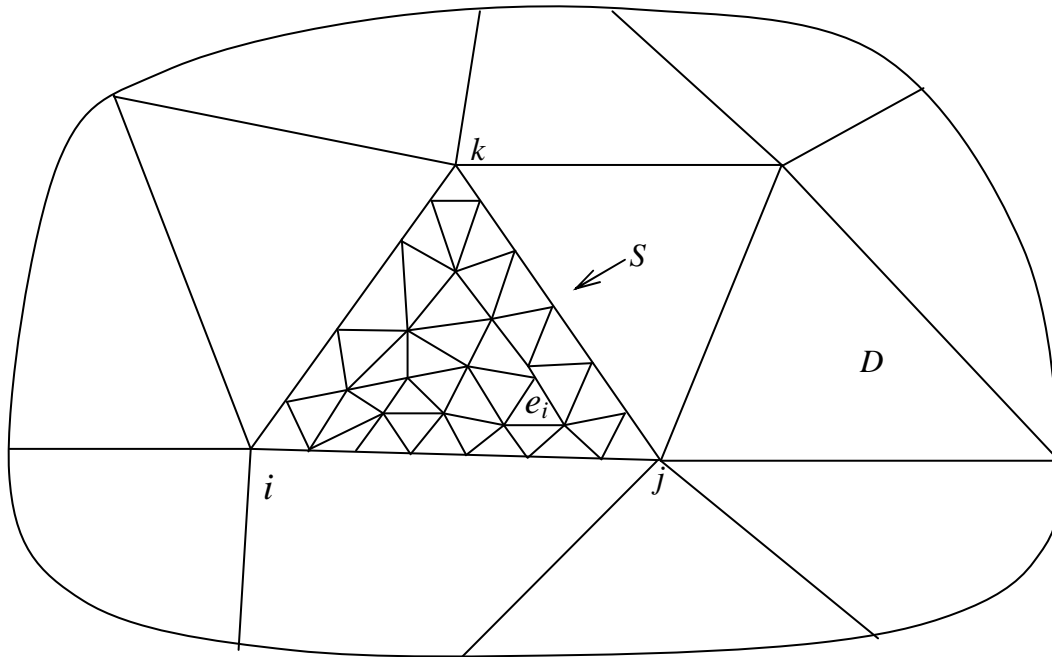


Рис. 2.3. Разбиение области фильтрации на фрагменты

где $a_0^s(t), a_1^s(t)$ и $a_2^s(t)$ - неизвестные коэффициенты при любой фиксированной переменной $t \in (t_0, t_1)$. Эти коэффициенты определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} a_0^s(t) + a_1^s(t)N_1(x_i, y_i) + a_2^s(t)N_2(x_i, y_i) = H(x_i, y_i, t), \\ a_0^s(t) + a_1^s(t)N_1(x_j, y_j) + a_2^s(t)N_2(x_j, y_j) = H(x_j, y_j, t), \\ a_0^s(t) + a_1^s(t)N_1(x_k, y_k) + a_2^s(t)N_2(x_k, y_k) = H(x_k, y_k, t). \end{cases} \quad (2.37)$$

В дальнейшем для краткости записи используем обозначения $N_{1i} = N_1(x_i, y_i)$, $N_{2j} = N_2(x_j, y_j)$ и т.д. Из системы (2.37) находим, что

$$\begin{aligned} a_0^s(t) &= [H_i(N_{1j}N_{2k} - N_{1k}N_{2j}) + H_j(N_{1k}N_{2i} - N_{1i}N_{2k}) + H_k(N_{1i}N_{2j} - N_{1j}N_{2i})] / \Delta^s, \\ a_1^s(t) &= [H_i(N_{2j} - N_{2k}) + H_j(N_{2k} - N_{2i}) + H_k(N_{2i} - N_{2j})] / \Delta^s, \\ a_2^s(t) &= [H_i(N_{1k} - N_{1j}) + H_j(N_{1i} - N_{1k}) + H_k(N_{1j} - N_{1i})] / \Delta^s, \end{aligned} \quad (2.38)$$

где

$$H_i = H(x_i, y_i, t), \quad H_j = H(x_j, y_j, t), \quad H_k = H(x_k, y_k, t),$$

$$\Delta^s = N_{1i}(N_{2j} - N_{2k}) + N_{1j}(N_{2k} - N_{2i}) + N_{1k}(N_{2i} - N_{2j}).$$

Подставляя выражения для a_0, a_1 и a_2 из формул (2.38) в равенство (2.36), имеем

$$\begin{aligned} H^s(x, y, t) &= \{ [H_i(N_{1j}N_{2k} - N_{1k}N_{2j}) + H_j(N_{1k}N_{2i} - N_{1i}N_{2k}) + H_k(N_{1i}N_{2j} - \\ &N_{1j}N_{2i})] + N_1(x, y) [H_i(N_{2j} - N_{2k}) + H_j(N_{2k} - N_{2i}) + H_k(N_{2i} - N_{2j})] + N_2(x, y) [H_i(N_{1k} - \\ &N_{1j}) + H_j(N_{1i} - N_{1k}) + H_k(N_{1j} - N_{1i})] \} / \Delta^s, \end{aligned}$$

или окончательно

$$H^s(x, y, t) = H(x_i, y_i, t)N_i^s(x, y) + H(x_j, y_j, t)N_j^s(x, y) + H(x_k, y_k, t)N_k^s(x, y), \quad (2.39)$$

где

$$N_i^s(x, y) = [(N_{1j}N_{2k} - N_{1k}N_{2j}) + (N_{2j} - N_{2k})N_1(x, y) + (N_{1k} - N_{1j})N_2(x, y)] / \Delta^s,$$

$$N_j^s(x, y) = [(N_{1k}N_{2i} - N_{1i}N_{2k}) + (N_{2k} - N_{2i})N_1(x, y) + (N_{1i} - N_{1k})N_2(x, y)] / \Delta^s,$$

$$N_k^s(x,y) = [(N_{1i}N_{2j} - N_{1j}N_{2i}) + (N_{2i} - N_{2j})N_1(x,y) + (N_{1j} - N_{1i})N_2(x,y)] / \Delta^s,$$

откуда следует, что при линейно-независимых в области D функциях $N_1(x,y)$ и $N_2(x,y)$ число Δ^s в нуль не обращается.

Функции $N_i^s(x,y)$, $N_j^s(x,y)$ и $N_k^s(x,y)$ в формуле (2.39) зависят как от координат, так и от номера фрагмента. Например, если к i -му узлу примыкают несколько фрагментов, функции $N_i^s(x,y)$ для этих фрагментов разные. Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции $N_i^s(x,y)$, $N_j^s(x,y)$ и $N_k^s(x,y)$ обладают теми же свойствами, что и функции формы в классическом методе конечных элементов.

Допустим, что при разбиении области D на m фрагментов число узлов, где необходимо определить значения искомой функции $H(x,y,t)$, равно n . Тогда приближенное решение начально-краевой задачи можно представить в виде

$$H(x,y,t) \approx \sum_{S=1}^m \sum_{i=1}^3 H_i N_i^s(x,y),$$

или после перенумеровки узлов в виде (как и в МКЭ)

$$H_n(x,y,t) = \sum_{r=1}^n H_r(t) N_r(x,y), \quad (2.40)$$

где $N_r(x,y) = \sum_{s=1}^{s_r} N_r^s(x,y)$, s_r - число фрагментов, примыкающих к r -ой вершине. Дальнейшее продолжение алгоритма полностью совпадает с §2.2, с той лишь разницей, что в данном случае функции $N_r(x,y)$ являются нелинейными.

Практика показывает, что при удачном подборе таких базисных функций можно существенно повысить точность приближенного решения [44]. В частном случае мы рассмотрим применение МКЭ с квадратичными

базисами для приближенного решения задачи напорной фильтрации подземных вод:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)+QH=f, \quad (x,y)\in D, \quad (2.41)$$

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=\beta H+\alpha, \quad (x,y)\in\Gamma=\partial D. \quad (2.42)$$

Используя разбиение области фильтрации D на фрагменты, функцию $H(x,y)$ ищем в виде

$$H(x,y)\approx H_n(x,y)=\sum_{i=1}^n H_i N_i(x,y). \quad (2.43)$$

Здесь $H_i=H(x_i,y_i)$, $N_i(x,y)$ – базисные функции, n – количество узлов области D , где определяются значения искомой функции.

Мы рассмотрим два алгоритма, основанные на квадратичных базисных функциях.

Алгоритм 1 [167]. При использовании квадратичных интерполяционных полиномов каждый треугольный элемент (e) содержит 6 узлов (рис.2.4) и искомая функция в нем представляется в виде

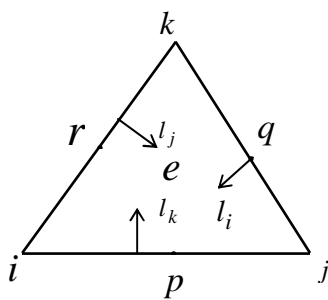


Рис.2.4

$$H^{(e)}=\sum_{s=1}^6 H_s N_s(x,y), \quad (2.44)$$

где $N_1=l_i(2l_i-1)$, $N_2=4l_i l_j$, $N_3=l_j(2l_j-1)$,

$N_4=4l_j l_k$, $N_5=l_k(2l_k-1)$, $N_6=4l_i l_k$;

$$l_s=\frac{1}{\Delta_e}(a_s+b_s x+c_s y), \quad s=i,j,k,$$

$l_i+l_j+l_k=1$; l_s – так называемые l – координаты, представляющие отношения площадей элементарных треугольников; Δ_e – площадь элемента e .

Схема применения квадратичных базисов, выраженных через l -координаты,

представляет собой обычную процедуру МКЭ. Интегралы по площади элементов в полученных СЛАУ вычисляются в квадратурах [167].

Алгоритм 2. Суть этого алгоритма состоит в том, что вместо уравнения (1) рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$-T_0 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) = f_0 \quad (2.45)$$

и его частные решения

$$H_1(x) = \alpha x^2 + p_1 x + q_1, \quad H_2(y) = \alpha y^2 + p_2 y + q_2, \quad (2.46)$$

используем в качестве базисных функций для решения задачи (2.33), (2.34),

где $\alpha = -f_0 / (2T_0)$. Образует функции формы по формулам

$$N_s(x, y) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y), \quad s = i, j, k, \quad (2.47)$$

где

$$a_i = (H_{1j} H_{2k} - H_{1k} H_{2j}) / \Delta, \quad b_i = (H_{2j} - H_{2k}) / \Delta, \quad c_i = (H_{1k} - H_{1j}) / \Delta,$$

$$a_j = (H_{1k} H_{2i} - H_{1i} H_{2k}) / \Delta, \quad b_j = (H_{2k} - H_{2i}) / \Delta, \quad c_j = (H_{1i} - H_{1k}) / \Delta,$$

$$a_k = (H_{1i} H_{2j} - H_{1j} H_{2i}) / \Delta, \quad b_k = (H_{2i} - H_{2j}) / \Delta, \quad c_k = (H_{1j} - H_{1i}) / \Delta,$$

$$\Delta = (H_{1j} - H_{1i})(H_{2k} - H_{2i}) - (H_{1k} - H_{1i})(H_{2j} - H_{2i}),$$

$$H_{1s} = \alpha x_s^2 + p_1 x_s + q_1, \quad H_{2s} = \alpha y_s^2 + p_2 y_s + q_2, \quad s = i, j, k$$

и искомую функцию $H(x, y)$ в области D представим в виде разложения (2.43). Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции N_i , N_j , и N_k играют роль функций формы в классическом МКЭ.

Подставляя вместо $N_i(x, y)$ ее выражение из (2.47) и применяя к задаче (2.41), (2.42) обычную схему минимизации невязок уравнений (2.41) и (2.42) с помощью принципа Галеркина приходим к СЛАУ

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.48)$$

где

$$a_{ij} = \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_j N_i q d\sigma + \int_{\partial D} N_j N_i \beta ds,$$

$$b_i = \iint_D f N_i d\sigma + \int_{\partial D} \alpha N_i ds. \quad (2.49)$$

В данном случае в подынтегральных выражениях в формулах (2.49) появляются многочлены второй и четвертой степеней, поэтому к вычислению интегралов привлечение известных квадратурных формул [167] невозможно. В методе фрагментов в каждом фрагменте коэффициенты уравнений (2.33) и (2.34) постоянны, интегралы в формулах вычисляются точно, поэтому алгоритм 2 дает более точные результаты по сравнению с другими алгоритмами, где для вычисления интегралов применяются квадратурные формулы.

Система (2.48) является хорошо обусловленной с симметричной разреженной матрицей и она легко решается одним из точных методов.

Работа алгоритмов отлажена на решении ряда тестовых примеров. Приведем здесь три из них.

Пример 1. В круге $x^2 + y^2 \leq 0.25$ решается задача (2.41), (2.42) с линейными и квадратичными базисами при следующих данных: $T(x,y)=1$, $Q(x,y)=0$, $f(x,y)=-4$. Искомой функцией является $H(x,y)=x^2+y^2+1$. Круг разделен на 6 равных частей, так что элементами являются равносторонние треугольники со стороной, равной, 0.5 (т.е. шаг сетки $h=0.5$). В табл.2.4 приведены точные и приближенные значения искомой функции в узлах одного элемента (рис.2.4), при этом узел i расположен в центре круга, а узлы j и k – на окружности. Относительно невысокая точность результатов объясняется величиной шага сетки и тем, что узел q лежит не на самой границе, а на хорде, соединяющей граничные узлы j и k .

Таблица 2.4

Результаты применения линейных и квадратичных базисов

Узлы сетки		i	p	j	q	k	r
Точное решение		1.000	1.062	1.250	1.187	1.250	1.062
Приблизж. Решения	Лин. Базисы	0.833	0.901	1.083	1.104	1.083	0.901
	Отн.погр.	17%	15%	13%	7%	13%	15%
	Алгоритм 1.	0.872	0.936	1.128	1.060	1.128	0.936
	Отн.погр.	13%	12%	10%	11%	10%	12%
	Алгоритм 2.	0.933	0.994	1.183	1.119	1.183	0.994
	Отн.погр.	7%	6%	5%	6%	5%	6%

Пример 2. Область D представляет собой квадрат $\{-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, который путем проведения диагоналей последовательно разбивается на 2, 4, 8, 16, 32, 64 элемента. Следовательно, шаг сетки уменьшается от $2\sqrt{2}$ до 0.5. В каждом из шести случаев задача (2.33), (2.34) решается МКЭ с линейными и квадратичными базисами при следующих данных: $H(x,y)=2(x^2+y^2)+1$, $T(x,y)=1$, $Q(x,y)=0$, $f(x,y)=-8$. Результаты счета приведены в табл.2.5. Поскольку искомая функция и область D обладают центральной и осевой симметрией, в таблице даны результаты, относящиеся к первой четверти координатной плоскости.

Пример 3. Задача (2.41), (2.42) решается с данными примера 2 в круге с единичным радиусом ($x^2+y^2 \leq 1$), который последовательно разбивается на 6, 24 и 96 элементов. В первом случае круг разбивается на 6 равных частей. Элементами являются равносторонние треугольники со сторонами, равными 1 (т.е. шаг сетки $h=1$). Во втором случае проводится окружность радиуса $r=0.5$. Внутренний круг состоит из 6 равносторонних треугольников (сторона равна 0.5), а круговой пояс разбивается на 18 элементов. В третьем случае

проводятся еще две концентрические окружности с радиусами $r=0.25$ и $r=0.75$. Внутренний (малый) круг разбивается на 6 треугольников, а три круговые пояса разбиваются соответственно на 18, 30 и 42 треугольников. В табл.2.6 приведены результаты, относящиеся к первому квадранту.

В рассмотренных примерах задача (2.41), (2.42) решается при постоянных коэффициентах T , Q , f , α и β . Это сделано для выяснения влияния базисных функций на точность приближенного решения, так как в таких случаях погрешность осреднения значений указанных функций по элементу отсутствует. В реальных условиях область фильтрации разбивается на крупные фрагменты, в пределах каждого из которых значения гидрогеологических параметров можно считать постоянными. Именно в таких условиях заметно преимущество алгоритма 2 перед линейными базисами, это особенно заметно в примере 1. При уменьшении размеров элементов, как видно из примера 2, результаты применения линейных и квадратичных базисов нивелируются, а интересы дела, наоборот, требуют применения в гидрогеологических расчетах крупных фрагментов.

Квадратичные базисы в алгоритме 2 дают более точные результаты в примере 3. Это объясняется тем, что в этом примере элементами являются равносторонние треугольники, а в примере 2 – прямоугольные.

Алгоритм 1 в случае крупной сетки в смысле точности решения занимает среднее положение между другими алгоритмами, а при измельчении сетки теряет преимущество в точности перед линейными базисами (это, по-видимому, связано с увеличением погрешности округления в вычислениях и с аппроксимацией области D многоугольником). С точки зрения практического применения этот алгоритм явно проигрывает другим, поскольку он требует вдвое больше информации, а размерность матрицы СЛАУ (2.48) увеличивается четыре раза. Алгоритм 2 требует для своей работы минимальное количество информации, т.е. столько, сколько

для линейных базисов и в сочетании с методом фрагментов является наиболее предпочтительным перед другими алгоритмами.

§2.4. Об идентификации параметров планового фильтрационного потока

Для решения задач фильтрации подземных вод (как прогнозных, так и идентификационных) необходимо располагать определенным объемом информации о гидрогеологических параметрах. В зависимости от степени изученности области фильтрации в некоторых дискретных множествах точек могут задаваться значения напорной функции $H(x,y)$, коэффициента фильтрации $k(x,y)$, водопроницаемости $T(x,y)$, упругой водоотдачи $\mu(x,y)$ и инфильтрации $f(x,y)$. По этим неполным данным необходимо восстановить картину течения жидкости, т.е. идентифицировать фильтрационный поток.

Пусть в области фильтрации заданы значения напора и водопроницаемости

$$H(x_i, y_i) = H_i^0, \quad (x_i, y_i) \in R_q, \quad i=1,2,\dots,q, \quad (2.50)$$

$$T(x_i, y_i) = T_i^0, \quad (x_i, y_i) \in S_p, \quad i=1,2,\dots,p, \quad (2.51)$$

где H_i^0, T_i^0 – значения указанных величин, полученные из эксперимента или путем наблюдений; R_q и S_p – некоторые дискретные множества, состоящие из q и p точек соответственно. Требуется доопределить значения напоров и водопроницаемости в области D , где заданы множества R_q и S_p , считая остальные параметры потока известными. Такая задача рассматривалась в работах [48,117]. Здесь мы приводим результаты численных экспериментов.

В стационарном случае плановый фильтрационный поток описывается уравнением

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial H}{\partial y} \right) + QH = f, \quad (x, y) \in D \quad (2.52)$$

с краевым условием

$$T \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial D. \quad (2.53)$$

Используем алгоритм решения задачи, предложенный в [48], который состоит в последовательном решении задачи (2.52), (2.53) относительно $H(x,y)$ и $T(x,y)$ с использованием условий (2.50) и (2.51). Задача (2.52), (2.53) решается методом конечных элементов. Разбивая область D на m треугольников (элементов), решение этой задачи ищем в пространстве $W_2^{(1)}$ в виде

$$H_n(x,y) = \sum_{(e)} (H_i^e N_i^e + H_j^e N_j^e + H_k^e N_k^e) = \sum_{s=1}^n H_s N_s(x,y), \quad (2.54)$$

$$T_n(x,y) = \sum_{(e)} (T_i^e N_i^e + T_j^e N_j^e + T_k^e N_k^e) = \sum_{s=1}^n T_s N_s(x,y), \quad (2.55)$$

где $H_s = H(x_s, y_s)$, $T_s = T(x_s, y_s)$ – значения искомых функций в точке (x_s, y_s) ; $N_s(x,y) = a_s + b_s x + c_s y$, $(s=i, j, k)$ – базисные функции [167]; n – число узлов сетки; e – элемент (треугольник) с вершинами i, j, k . Вершины элементов располагаются таким образом, чтобы точки множеств R_q и S_p совпадали с ними.

Алгоритм решения задачи строится следующим образом. В первом приближении задаем значения функции $T(x,y)$ произвольным образом из интервала $[T^{\circ}_{min}, T^{\circ}_{max}]$, а в узлах, совпадающих с точками множества S_p , задаем значения T_i° . Применяя к задаче (2.52), (2.53) с условием (2.50) обобщенный принцип Галеркина, получаем систему уравнений

$$\iint_D N_i (LH_n - f) d\sigma + \delta \sum_{s=1}^q (H_s - H_s^{\circ}) + \int_{\Gamma} N_i (lH_n - \alpha) ds = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (2.56)$$

Здесь L и l – операторы уравнений (2.52) и (2.53) соответственно:

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial}{\partial y} \right) + Q, \quad l = T \frac{\partial}{\partial n} - \beta,$$

δ – положительное число (штраф).

С учетом формулы Грина из системы уравнений (2.56) приходим к системе

$$\iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_i Q H_n d\sigma + \delta \sum_{s=1}^q H_s - \int_{\Gamma} N_i \beta H_n ds =$$

$$= \iint_D N_i f d\sigma + \delta \sum_{s=1}^{q_i} H_s^\vartheta + \int_\Gamma N_i \alpha ds, \quad i=1,2, \dots, n.$$

После подстановки вместо H_n ее разложения (2.54) получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = g_i, \quad i=1,2, \dots, n, \quad (2.57)$$

где

$$a_{ij} = \iint_D T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_i N_j Q d\sigma - \int_\Gamma N_i N_j \beta ds + \delta_j,$$

$$g_i = \iint_D N_i f d\sigma + \int_\Gamma N_i \alpha ds + \sum_{s=1}^{q_i} \delta_s H_s^\vartheta.$$

Здесь q_i – число узлов шаблона, центром которого является узел i (включая сам узел i);

$$\delta_s = \begin{cases} \delta, & \text{если значение } H_s^\vartheta \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } H_s^\vartheta \text{ не задано,} \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, n.$$

Решение $H^{(1)}(x,y)$ системы (2.57) является первым приближением напорной функции $H(x,y)$.

Используя полученные значения $H_i^{(1)}$ ($i=1,2,\dots,n$) и условие (2.51), решаем задачу (2.52), (2.53)

относительно водопроводимости $T(x,y)$. Здесь, кроме выполнения внутренних условий (2.51), потребуем также, чтобы вариация искомой функции стремилась к нулю. Это требование должно обеспечить требуемую гладкость функции $T(x,y)$. Тогда вместо (2.56) получаем систему

$$\iint_D N_i (LH_n - f) d\sigma + \iint_D N_i \delta T d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^p (T_s - T_s^\vartheta) + \int_\Gamma N_i (lH_n - \alpha) ds = 0,$$

$$i=1,2,\dots,n,$$

где $\delta T = T - \tilde{T}$, \tilde{T} – значения функции T , полученные из предыдущей итерации; $\gamma > 0$. Применяя формулу Грина и подставляя вместо T_n ее разложение (2.55), приходим к системе

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} T_j = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.58)$$

где

$$c_{ij} = \iint_D N_j \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) d\sigma + \iint_D N_i N_j d\sigma + \gamma_j, \quad (2.59)$$

$$d_i = \iint_D N_i f d\sigma - \iint_D N_i H_n Q d\sigma + \iint_D N_i \tilde{T}_n d\sigma + \gamma_i T_i^{\circ} + \int_{\Gamma} N_i (\beta H_n + \alpha) ds,$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \gamma, & \text{если значение } T_s^{\circ} \text{ задано,} \\ 0, & \text{если значение } T_s^{\circ} \text{ не задано,} \end{cases} \quad s = 1, 2, \dots, p.$$

Решив систему (2.58), получаем второе приближение $T^{(2)}(x, y)$ и подставляя его вместо T , снова приходим к системе (2.56). Решение этой системы, т.е. второе приближение функции $H(x, y)$ используем для нахождения $T^{(3)}(x, y)$ из системы (2.58) и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условий

$$\max_i |H_i^{(v)} - H_i^{(v-1)}| < \varepsilon_1 \quad \text{или} \quad \max_i |T_i^{(v)} - T_i^{(v-1)}| < \varepsilon_2,$$

где v – номер итерации; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – заданные малые положительные числа; $i = 1, 2, \dots, n$.

Наибольшую трудность в этой задаче представляет решение системы (2.58). Как видно из формул (2.59), коэффициенты этой системы мало отличаются друг от друга, вследствие чего ее матрица является почти вырожденной. Для решения такой плохо обусловленной системы необходимо применять метод сингулярного разложения матрицы (или SVD – метод) [183].

Работа алгоритма проверена на следующем тестовом примере. В круге $x^2 + y^2 \leq 0.25$ решается задача (2.52), (2.53) с внутренними условиями (2.50), (2.51). Круг разделен на 54 элемента, число узлов сетки – 37, из них 18 – граничных. Элементами являются равносторонние треугольники со стороной, равной 0.2. Искомыми функциями являются $H(x, y) = 20(x^2 + y^2) + 5$, $T(x, y) = 10(x^2 + y^2 + 1)$, а заданными – $Q(x, y) = 0$, $f(x, y) = -800(2x^2 + 2y^2 + 1)$. Числа q и p в условиях (2.50) и (2.51) (т.е. число узлов, в которых задаются экспериментальные (точные) значения функций H и T соответственно) задавались в следующих сочетаниях: вариант I: $q = p = 17$; вариант IIa: $q = 17, p = 13$; вариант IIб: $q = 13, p = 17$; вариант IIIa: $q = 13, p = 7$; вариант IIIб:

$q=7$, $p=13$; вариант IVa: $q=7$, $p=4$; вариант IVb: $q=4$, $p=7$; вариант V: $q=p=4$. В связи с тем, что область фильтрации и искомые функции обладают свойством осевой и центральной симметрии, в таблицах 7–9 приведены значения искомых функций только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2, 4, 9, 15, 22 являются граничными.

В табл.2.7 показаны значения $T(x,y)$, полученные при точном задании функции $H(x,y)$ во всей области. Даже в таком почти идеальном случае получаются довольно грубые приближения искомой функции $T(x,y)$, это происходит из-за некорректности задачи идентификации водопроницаемости.

Таблица 2.7

Значения функции $T(x,y)$, полученные при точном задании функции $H(x,y)$

Узлы	Точные значения	Приближенные значения функции, полученные при различных значениях p			
		$p=17$	$p=13$	$p=7$	$p=4$
2	12.31	11.89	11.84	11.51	13.27
4	12.52	12.41	12.47	11.70	12.69
7	11.23	11.23	11.27	11.25	12.63
8	11.63	11.68	11.92	11.43	12.65
9	12.52	11.94	11.96	11.54	11.74
13	10.41	10.66	10.71	10.80	12.28
14	11.21	11.23	11.25	11.24	11.27
15	12.52	11.98	11.86	11.56	11.06
19	10.00	10.08	10.08	10.09	11.94
20	10.40	10.89	10.70	10.79	12.31
21	11.60	12.02	11.88	11.47	11.03
22	12.50	12.47	12.46	11.78	11.40
Отн. погр.		4.6%	5.3%	7.8%	19.4%

В табл.2.8 даны приближенные значения функции $T(x,y)$, полученные при различных сочетаниях параметров p и q , а в табл.2.9 – соответствующие значения функции $H(x,y)$. В таблицах наблюдается увеличение погрешностей при уменьшении чисел p и q , причем меньшая погрешность у той функции, которая представлена большим числом экспериментальных значений, т.е. подтверждается известная закономерность: чем полнее и достовернее информация об искомых функциях, тем точнее результат.

Изучение таблиц 2.8 и 2.9 подтверждает утверждение о малой чувствительности функции напора к изменениям коэффициента водопроводимости. В графах табл. 2.9, принадлежащих одному и тому же

значению параметра q ($q=17$, $q=13$, $q=7$, $q=4$), значения напоров очень мало отличаются друг от друга, тогда как соответствующие значения водопроницаемости отличаются значительно (на 3,3% при $q=17$, на 7,7% при $q=13$, на 18,5% при $q=7$, на 21,7% при $q=4$). Следовательно, изменения в

значениях $H(x,y)$ в большей степени зависят не от функции $T(x,y)$, а от количества узлов сетки, где заданы экспериментальные значения напоров.

Изложенный алгоритм может применяться для идентификации параметров фильтрационного потока в реальных условиях, при этом точность получаемых результатов будет сопоставима с точностью измерений, поскольку искомые функции обладают необходимой степенью гладкости и являются слабо изменяющимися.

§ 2.5. Идентификация водопроницаемости пласта методом регуляризации

Коэффициент фильтрации является одним из основных гидрогеологических параметров, характеризующих водоносные пласты. Для составления адекватной математической модели процесса фильтрации подземных вод необходимо иметь более или менее полную информацию о пространственном распределении значений искомых параметров. Определение гидрогеологических параметров опытно-фильтрационными методами сопряжено со значительными материальными и временными затратами. В данной работе рассматривается метод идентификации водопроницаемости пласта расчетным путем по некоторым известным значениям напорной функции.

Задача идентификации водопроницаемости в неоднородной пористой среде сводится к решению коэффициентной обратной задачи для уравнения напорной фильтрации. Для обеспечения единственности решения должны быть заданы значения напоров и искомой функции в некотором дискретном множестве точек, полученные наблюдением и/или экспериментом.

Установившееся движение подземных вод в водоносном пласте, ограниченном сверху и снизу непроницаемыми прослойками, описывается уравнением [154]:

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right)=f(x,y), \quad (x,y)\in D \quad (2.60)$$

с граничным условием

$$T\frac{\partial H}{\partial n}=\alpha+\beta H, \quad (x,y)\in\Gamma=\partial D. \quad (2.61)$$

В данной задаче, кроме условия (2.61), задаются так называемые внутренние граничные условия

$$H(x_i, y_i)=H_i^0, \quad i=1,2,\dots,p, \quad (2.62)$$

$$T(x_j, y_j)=T_j^0, \quad j=1,2,\dots,q, \quad (2.63)$$

о которых говорилось выше.

Задача заключается в определении функции $T(x,y)$ из уравнения (2.60) при соблюдении условий (2.61) – (2.63). Поскольку значения напоров задаются с определенной погрешностью и в недостаточном объеме, то задача нахождения коэффициента уравнения (2.60) является некорректной, поэтому для ее решения применяем метод регуляризации А. Н. Тихонова [173]. Задача сводится к нахождению функции $T(x,y)$ из пространства $L_2(T)$, сообщающей в области D минимум функционалу [116]

$$\Phi(T)=\sum_{i=1}^p[H_i(T)-H_i^0]^2+\sum_{j=1}^q(T_j-T_j^0)^2+\gamma|\delta T|^2, \quad (2.64)$$

где δT – вариация функции $T(x,y)$; γ – параметр регуляризации; $H_i(T)$ – расчетные значения напоров, которые находятся как решение задачи (2.60), (2.61).

Задача (2.60), (2.61) решается методом конечных элементов [48]. Область фильтрации D разбивается на треугольные элементы таким образом, чтобы точки, в которых заданы экспериментальные значения H_i° и T_j° , совпали с вершинами элементов. В этих точках используются условия (2.62) и (2.63), а в остальных узлах начальные приближения функций $H(x,y)$ и $T(x,y)$ должны удовлетворять условиям $\min_i H_i^{\circ} \leq H \leq \max_i H_i^{\circ}$ и $\min_j T_j^{\circ} \leq T \leq \max_j T_j^{\circ}$ соответственно. Алгоритм решения задачи (2.60), (2.61) изложен в §2.1, поэтому здесь на нем не останавливаемся.

Для определения поля функции $T(x,y)$ мы, наряду с количественной информацией (условия (2.62) и (2.63)), используем также качественную информацию об искомой функции, т. е. функционал $\Phi(T)$ требует, чтобы функция $T(x,y)$ была гладкой, что соответствует физической природе водопроводимости.

Теперь займемся минимизацией функционала (2.64). При каждом наборе значений функции $T(x,y)$ получаем вполне определенные значения функции $H(x,y)$, т. е. имеем оператор $H(T)$, определенный алгоритмически по формулам МКЭ. Этот оператор в общем случае является нелинейным. Линеаризуем его следующим образом

$$H(T) = H(\tilde{T}) + \sum_{s=1}^n (T_s - \tilde{T}_s) \frac{\partial H}{\partial T_s} + R_2(\Delta T), \quad (2.65)$$

где \tilde{T}_s – значение функции T в точке (x_s, y_s) , полученное в предыдущей итерации; $R_2(\Delta T)$ – остаточный член разложения. Подставляя (2.65) в (2.64) и используя необходимое условие минимума функции многих переменных, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi(T)}{\partial T_k} = \sum_{i=1}^p \left[\tilde{H}_i + \sum_{s=1}^n (T_s - \tilde{T}_s) \frac{\partial H_i}{\partial T_s} - H_i^{\circ} \right] \frac{\partial H_i}{\partial T_k} + \mu_k (T_k - T_k^{\circ}) + \gamma (T_k - \tilde{T}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{s=1}^n c_{ks} T_s = d_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (2.66)$$

с коэффициентами

$$c_{ks} = \sum_{i=1}^p \frac{\partial H_i}{\partial T_s} \frac{\partial H_i}{\partial T_k}, \quad k \neq s, \quad c_{kk} = \sum_{i=1}^p \left(\frac{\partial H_i}{\partial T_k} \right)^2 + \gamma + \mu_k$$

и с правыми частями

$$d_k = \sum_{i=1}^p \left(H_i^{\gamma} - \tilde{H}_i + \sum_{s=1}^n \frac{\partial H_i}{\partial T_s} \tilde{T}_s \right) \frac{\partial H_i}{\partial T_k} + \mu_k T_k^{\gamma} + \gamma \tilde{T}_k.$$

Здесь

$$\mu_k = \begin{cases} 1, & \text{если } T^{\gamma} \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } T^{\gamma} \text{ не задано.} \end{cases}$$

Матрица системы (2.66) является симметричной и имеет диагональное преобладание и она легко решается методом Гаусса. Производная $\partial H / \partial T$ является операторной, т. е.

$$\frac{\partial H}{\partial T} = \left(\frac{\partial H_i}{\partial T_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

а частные производные аппроксимируются разностными отношениями

$$\frac{\partial H_i}{\partial T_j} \approx \frac{\Delta H_i}{\Delta T_j} = \frac{H_i^{(v+1)} - H_i^{(v)}}{T_j^{(v+1)} - T_j^{(v)}},$$

где V —номер итерации.

Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке. Используя начальные значения H и T в качестве нулевого приближения, решается задача (2.60), (2.61) и определяется первое приближение $H^{(1)}$.

Затем, придавая приращение ΔT функции $T(x,y)$, находим второе приближение $H^{(2)}$. Это дает возможность приближенно определить производную $\partial H/\partial T$ и решить систему (2.66) при некотором значении параметра регуляризации γ . Итерация по V проводится до установления фильтрационного процесса. Если при этом полученные значения напоров в пределах ошибок не совпадут с данными экспериментальными значениями H^s , то итерация проводится по параметру γ , выбор которого может быть осуществлен методом невязок [173].

Работа алгоритма проверена на решении следующей тестовой задачи, рассмотренной в работах [130, 117]. Областью фильтрации D является круг $x^2 + y^2 \leq 0.25$, который разбит на 54 треугольника (элемента) с максимальной длиной сторон $\Delta x = \Delta y = 0.2$. Число узлов сетки (вершин треугольников)–37, из них 18 – граничных. В этой области заданы функции $H(x,y)=x^2+y^2 +5$, $Q(x,y)=0$, $f(x,y)=-40(2x^2+2y^2+1)$. Искомой функцией является $T(x,y)=10(x^2+y^2+1)$. Число узлов, в которых задаются экспериментальные (точные) значения функций $H(x,y)$, равно: $p= 37, 22, 5$. В каждом из этих случаев задаются точные значения искомой функции в $q=17, 9, 5$ точках.

Область фильтрации и все функции, входящие в задачу, специально подобраны так, чтобы они обладали центральной и осевой симметрией и следовательно, искомое решение имело такие же свойства. Поэтому в табл. 2.10 приведены значения искомой функции только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2 и 9 являются граничными.

Таблица 2.10

Приближенные значения функции $T(x,y)$, полученные методом регуляризации

Узлы	Точные	Приближенные значения $T(x,y)$
------	--------	--------------------------------

	значения $T(x,y)$	$p=22$			$p=5$		
		$q=17$	$q=9$	$q=5$	$q=17$	$q=9$	$q=5$
2	12,309	12,100	11,663	10,957	12,100	11,663	11,980
7	11,225	11,270	11,271	10,915	11,270	11,271	11,833
8	11,625	11,580	11,723	10963	11,580	11,723	11,960
9	12,521	12,258	12,297	10,987	12,258	12,297	12,388
13	10,406	10,519	11,371	10,858	10,519	11,377	11,706
14	11,206	11,784	11,645	11,114	11,784	11,645	11,935
19	10,000	10,136	10,313	10,325	10,136	10,313	10,337
21	11,600	11,839	11,644	11,001	11,839	11,644	12,035
<i>max</i> отн. погреш.		5,2	9,2	12,3	5,2	9,3	12,5

В табл. 2.11 решение данной задачи сравнивается с соответствующими результатами, полученными другими методами [130,117]. Следует отметить, что идентификация параметров водоносных горизонтов с использованием методов малых возмущений [130,117] и регуляризации является устойчивой процедурой, что очень важно при проведении гидрогеологических расчетов в реальных условиях

Таблица 2.11

Сравнение с результатами, полученными другими методами

Погрешности	$q=17$			$q=9$			$q=5$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
Абсолютная	0,86	1,22	0,58	0,85	1,17	0,97	1,0	1,23	1,30
Относительная в %	7,4	11,5	5,2	7,6	11,0	9,3	8,7	11,7	12,5

Примечание: a –погрешности метода малых возмущений [130];

b –погрешности, полученные в работе [117];

c –погрешности метода регуляризации, полученные при $p=5$.

§2.6. Идентификация водопроводимости водоносных пластов на наблюдательных участках

Использование квадратичных базисов и фрагментности исследуемой области фильтрации позволяет существенно сократить объем работ по моделированию гидрогеодинамических процессов. В задачах, рассмотренных в этом параграфе, в отличие от [48], использованы методика моделирования с применением фрагментности области. В гидродинамической постановке условия на скважинах аппроксимированы δ - функцией Дирака.

Алгоритм идентификации коэффициента водопроводимости неоднородного пласта, изложенный в §2.4, дает возможность приближенно вычислить этот коэффициент. Здесь мы используем его для восстановления коэффициента водопроводимости пласта с точностью наблюдений для конкретных гидрогеологических объектов МПВ на участках «Чонкойсуу» и «Красная речка».

Прежде чем приступить к идентификации водопроводимости пласта для конкретных объектов, изложим способ моделирования отбора подземных вод эксплуатационными скважинами и инфильтрационных потерь из рек в грунт, которые учитываются функцией f в правой части уравнения, описывающего фильтрационный процесс.

В плановых задачах вертикальные дрены, выкачивающие воду из водоносного слоя, рассматриваются как точечные источники, так как по сравнению с площадью рассматриваемого района площадь поперечного

сечения вертикальной дрены ничтожна мала. Аналогично горизонтальная дрена рассматривается как линейный источник.

В рассматриваемой плановой задаче в точке с координатами (x_0, y_0) расположена вертикальная дрена с дебитом q_0 , который моделируется δ -функцией Дирака [31,167]:

$$q = q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0). \quad (2.67)$$

Функция, определенная уравнением (2.67), зависит от декартовых координат точек, откуда видно, что с помощью δ -функции мощность точечного источника «размазывается» на некоторую ε – окрестность точки (x_0, y_0) . Однако такое «размазывание» не нарушает величину общего дебита.

Действительно, рассмотрим выражение

$$\iint_{\varepsilon} q(x, y) \Phi_0(x, y) dx dy. \quad (2.68)$$

Поскольку узел сетки и месторасположение дрены совпадают, учитывая равенство (2.67) и свойство δ -функции Дирака из (2.68), приходим к равенству

$$\iint_{\varepsilon} q(x, y) \Phi_0(x, y) dx dy = q(x_0, y_0) \Phi_0(x_0, y_0) = q_0,$$

так как $\Phi_0(x_0, y_0) = 1$, т.е. значения базисной функции в соответствующем узле равны единице. Таким образом, мы пришли к выводу, что величина интеграла (2.68) равна мощности источника [31,167].

Если (x_0, y_0) является внутренней точкой треугольного элемента e , то величина дебита вертикальной дрены распределяется по вершинам e таким образом, что суммарная величина дебита остается без изменений [167], т.е. дебит вертикальной дрены «размазывается» по элементу.

При наличии в области неэкранированных водотоков инфильтрация из них в грунт также учитывается с помощью δ -функции Дирака [31,167]. В этом случае суммарное количество просачивающейся жидкости в грунт на рассматриваемом участке водотока распределяется по узлам с таким расчетом, что суммарное количество воды совпадало с фактическим расходом. При этом триангуляция области рассматривается так, что линия водотока разбивается на части, которые рассматриваются как стороны прилежащих к водотоку треугольных элементов.

Итак, функция f , являющаяся свободным членом уравнения, описывающего процесс фильтрации, содержит слагаемые, состоящие из δ -функций.

1. Режимно - балансовый участок «Красная речка» расположен в восточной части Чуйской впадины между поселками Чимкоргон и Ивановка ^{*)}

В орографическом отношении территория представляет собой обширную равнину, которая ограничена с юга Киргизским хребтом, а с северо - востока - Чу - Илийскими горами. Равнина делится рекой Чу - главной водной артерией - на две неравные части: обширную левобережную шириной до 20 км и узкую правобережную шириной от одного до трех километров.

В пределах левобережья р. Чу к подножью Киргизского хребта примыкает широкой полосой круто наклонная равнина, образованная слившимися конусами выноса рек Кызылсуу, Шамси, Кегеты и Ысыката, стекающих с северного склона Киргизского хребта (см. рис.2.5). Севернее предгорной равнины до р. Чу расположена слабонаклонная аллювиально-пролювиальная равнина, охватывающая небольшую по площади часть

^{*)} Гидрогеологическое описание участков «Красная речка» и «Чонкойсуу» заимствовано из [48].

левого бережья. Основным аккумулятором подземных вод данного района являются четвертичные отложения, залегающие на породах неогена. Четвертичные отложения представлены рыхлообломочными осадками: валунно - галечниками с примесью щебня и песка. Отложения неогенового возраста представлены глинистыми породами, что позволяет рассматривать их кровлю как водоупор.

В четвертичных отложениях развит единый водоносный горизонт, в пределах которого отсутствуют сколько - нибудь выдержанные в разрезе и по площади водоупорные прослойки. Фильтрационные свойства четвертичных отложений восточной части Чуйской впадины характеризуются достаточно высокими значениями коэффициента водопроницаемости, составляющими на большей части территории порядка $10000 \text{ м}^2/\text{сут}$. Формирование подземных вод в восточной части впадины осуществляется за счет фильтрационных потерь из русел рек Чу, Кегеты, Шамси и Кызылсуу. Основная разгрузка потока подземных вод происходит в виде открытого родникового выклинивания между населенными пунктами Токмок и Ивановка. Таким образом, в восточной части впадины формируется мощный поток подземных вод (до 40% естественных ресурсов Чуйской впадины), имеющий замкнутый цикл геофильтрационного процесса (от формирования до разгрузки).

Анализ режима подземных вод и серии карт гидроизогипс позволяют схематизировать гидрогеологические условия описываемой территории следующим образом (см. рис.2.5): восточная граница Γ_1 принимается по гидроизогипсу с абсолютной отметкой 860 м ($h=860$); южная граница Γ_3 принимается по контуру горного обрамления $Q_1=0$ ($T\partial h / \partial n = 0$); западной границей Γ_3 служит выделенная по карте гидроизогипс линия тока с граничным условием $Q_1=0$ ($T\partial h / \partial n = 0$); северной границей Γ_2 является контур родникового выклинивания с постоянным расходом, равным $25 \text{ м}^3/\text{сут}$, переходящий в восточном направлении в водонепроницаемый контур

Γ_4 . Изучаемый участок, ограниченный контуром $\partial D = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$, обозначим через D (область фильтрации).

Следует заметить, что при составлении уравнения материального баланса учитываются фильтрационные потери из рек Чу, Кегеты, Кызылсуу и Шамси, а также водоотбор подземных вод эксплуатационными скважинами.

В качестве внутренних условий берутся поточечные уровни подземных вод из наблюдательных скважин и значения водопроницаемости четвертичных отложений на отдельных, заранее фиксированных точках.

Изложенную задачу можно рассматривать как плановую стационарную фильтрацию в двумерной области D и моделировать с помощью краевой задачи

$$L(T, h) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) = f(x, y) \quad (2.69)$$

в области D с граничными

$$h(x, y) = h_1, \quad (x, y) \in \Gamma_1,$$

$$T \frac{\partial h}{\partial n} = q, \quad (x, y) \in \Gamma_2,$$

$$T \frac{\partial h}{\partial n} = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_3, \Gamma_4 \quad (2.70)$$

и дополнительными внутренними

$$h(x_r, y_r) = h_r^0, \quad (x_r, y_r) \in \bar{D}, \quad r = 1, 2, \dots, q, \quad (2.71)$$

$$T(x_s, y_s) = T_s^0, \quad (x_s, y_s) \in \bar{D}, \quad s = 1, 2, \dots, p, \quad (2.72)$$

условиями.

Ставится задача - определить коэффициент водопроницаемости четвертичных отложений и построить поле напора по всей области D с

точностью, согласованной с точностью наблюдений и значениями коэффициента водопроводимости пласта, полученной в результате ОФР.

Применение квадратичных базисов позволило значительно уменьшить число элементов. Область фильтрации D было разделено на 29 фрагментов вместо 47 элементов в [48], с числом узлов 20. В табл.2.12 приводятся внутренние условия (2.71), (2.72) относительно h_r^o и T_s^o . В табл.2.13 сопоставлены некоторые вычисленные значения функции напора и водопроводимости с известными данными наблюдений в отдельных узловых точках, где перечисляются их номера. В колонке с заголовками $T_m^{(0)}$ приведены субъективно заданные начальные значения водопроводимости в указанных узлах, с заголовками h^H , T^H - соответствующие значения напора и водопроводимости, известные из наблюдения (и эксперимента), с заголовками $h_n^{(r)}$ и $T_m^{(s)}$ - найденные в результате вычислений значения. По всем перечисленным узлам вычислены относительные ошибки, например для водопроводимости пласта средняя ошибка равна 8,5%, а для функции напора – 4,3%. На рис.2.5 показаны линии равных напоров и равных проводимостей пласта для участка «Красная речка».

Таблица 2.12

Внутренние условия для h и T (участок «Красная речка»)

Номер узла	Координаты узлов		h_r^o	T_s^o
	x	y		
5	1350	17500	789.02	1010
2	4000	24450	-	2520

9	4500	17700	787.54	-
6	5500	14100	804.60	8000
10	9250	14100	817.01	-
17	10900	9600	826.81	5100
11	11075	14625	805.10	6921
19	15000	10900	836.10	-
20	16750	16300	-	11500
12	14800	21350	786.74	-
15	21350	17475	-	9500
4	24200	15850	-	4300
18	23325	19300	832.20	-
13	25425	12600	-	6000

Таблица 2.13

Вычисление поля напорной функции и проводимости пласта

Номер узла	$T_m^{(0)}$	h^H	T^H	$h_n^{(r)}$	$T_m^{(s)}$
1	5000	-	6000	813.05	6391.85
2	5000	-	6000	816.11	6331.31
3	6000	-	6000	813.35	6388.92
4	5000	-	6000	816.40	6322.50
5	7000	800	-	798.45	5922.02
6	7000	810	-	810.14	6941.02
7	6000	-	6000	819.88	6042.91

8	5000	-	6000	822.12	6190.25
9	8000	800	-	806.96	6934.61
10	7000	810	-	808.16	7072.12
11	7000	805	-	809.09	7661.88
12	7000	810	-	810.25	7804.86
13	6000	-	6000	834.13	6966.48
14	7000	810	-	810.41	8336.87
15	5000	-	6000	837.13	7077.26
16	5000	-	6000	838.58	6939.18
17	7000	810	-	809.13	9011.79
18	7000	832	-	832.76	8906.18
19	8000	-	6000	847.81	6970.51
20	9500	832	9500	832.01	9501.16

2. Режимно - балансовый участок «Чонкойсуу» расположен на расстоянии 70 км от г. Балыкчи на северном побережье озера Иссыккуль. Западная и восточная границы участка проходят по межконусным понижениям со смежными конусами выноса рек Ортокойсуу и Чолпоната. Северная граница - горный склон Кунгейалатоо, южная граница - озеро Иссыккуль.

Литологический состав четвертичных отложений участка сложен аллювиально - пролювиальным материалом средне - верхнечетвертичных отложений, представлен валунно - галечниковыми отложениями с гравийно – песчанистыми заполнителями. Средняя мощность четвертичных отложений на участке составляет 250-300 м. Она уменьшается с севера на юг межконусного пространства, где слившиеся конусы выноса рек Чонкойсуу и Ортокойсуу перекрывают друг друга. К основным источникам формирования

подземного стока в Иссыккульской межгорной впадине относятся: фильтрационные потери из русел рек и из оросительной сети; инфильтрация осадков и приток в четвертичные отложения со стороны палеоген - неогеновых палеозойских отложений.

На участке к моменту постановки режимно - балансовых исследований были опробованы 32 скважины. Площадные изменения предельного дебита сложные, что говорит о неоднородности пласта.

На участке имеются два поверхностных водотока - река Чонкойсуу и ручей Карагайбулак. Среднегодовой многолетний доход составляет 2,2 м³/сут. Расход р. Чонкойсуу трансформируется по трем руслам - ирригационным общественным каналам Урукбел, Каирма и Восточный. Река Чонкойсуу до озера не доходит, т.е. её расход идет частично на увеличение подземного стока и испарение.

Как уже отмечалось, северной границей Γ_1 участка является контур горного обрамления, где напор принимался равным 1615 м. Южная граница

Γ_3 участка проводилась по выходам родников на низкой озерной террасе, её абсолютная высота совпадала с уровнем воды в озере Иссыккуль и принималась равной 1606,6 м.

Западная и восточная границы участка проходят по межконусным понижениям. Для расчетов эти боковые границы нулевого перетока (обозначены соответственно через Γ_2 и Γ_4 , где $T \partial h / \partial n = 0$). По имеющимся режимным наблюдениям боковые границы устойчивы в течение сезона. Нижняя граница четвертичных отложений, приуроченная к глинам Иссыккульской и шарпылдакских свит, принимается за нулевой переток - водоупор (см. рис.2.6).

В результате подпора подземного потока озером Иссыккуль и из - за наличия в разрезе суглинистых прослоек на озерной террасе плановый поток подземных вод деформируется. При предварительном моделировании

гидродинамическое несовершенство озера не учитывалось. Водоотбор подземных вод вертикальными скважинами учитывался в правой части уравнения. Учет осадков, испарения и возвратных вод в балансе подземных вод участка затруднителен. Но они частично компенсируются и, кроме того, в балансе их роль незначительна, следовательно, ими можно пренебречь.

Ставилась задача определить поле водопроводимости четвертичных отложений и построить поле напора на участке «Чонкойсуу» с точностью, согласованной с точностью режимных наблюдений и значениями коэффициента водопроводимости, выданными в результате ОФР. Описанную задачу можно рассматривать как плановую стационарную задачу фильтрации в двумерной области D , ограниченной кусочно-гладкой границей $\Gamma = \partial D = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$. Пусть математическая модель задачи адекватно описывается с помощью дифференциального уравнения (2.69) с граничными условиями

$$h(x, y) = h_1 (h_1 = 1615 \text{ м}), (x, y) \in \Gamma_1,$$

$$h(x, y) = h_2 (h_2 = 1606, 6 \text{ м}), (x, y) \in \Gamma_3,$$

$$T \partial h / \partial n = 0, (x, y) \in \Gamma_2, \Gamma_4.$$

В табл.2.14 приведены заданные внутренние условия для h_r^o , T_s^o и место их расположения согласно условиям (2.71) и (2.72).

Таблица 2.14

Внутренние условия для h и T (участок «Чонкойсуу»)

Номера узлов	Координаты узлов		h_r^o	T_s^o
	x	y		

2	390	1100	789.02	2584
13	1185	3890	–	2190
–	–	–	–	920
–	–	–	–	1989
21	2800		1609.9	3388
22	2805	3595	1613.2	3510
27	3180	1045	1608.7	905
33	3580	1070	1608.1	1664
35	3445	4355	1614.0	832
42	4340	1905	1609.7	5100
44	5900	3100	1610.4	3608
46	6550	3720	1611.5	1581
48	6980	3100	1609.2	-
50	7105	4074	1611.2	3510

В табл.2.15 приведены вычисленные значения функции напора и водопроницаемости пласта в отдельных узловых точках, где показаны их координаты. Количество полной итерации равно двум. Максимальная относительная ошибка для величины водопроницаемости пласта составляет 15,7%, а для функции напора - 2,7%.

Таблица 2.15

Вычисленные значения поля напорной функции
и водопроницаемости пласта

Координаты узлов		$T_m^{(0)}$	h_n	T_m
x	y			

595	600	2000	1609.6	2163.6
770	3800	2000	1615.2	2065.4
1600	3980	2000	1615.1	2464.4
2985	2840	3500	1612.4	3035.5
4260	2200	3500	1611.1	4693.5
4420	1610	4000	1608.4	4480.4
5535	3100	3500	1611.5	3406.7
5750	2625	3500	1609.5	3594.5
6225	3100	3000	1610.1	3236.1
7025	2770	3500	1608.1	3442.2
6880	2351	3500	1606.5	3436.1
7210	3770	2000	1610.8	1900.2

Алгоритм реализован на ЭВМ в области D , которая разбивалась на 22 фрагмента, количество узлов 52. На рис.2.6 приведены линии равной проводимости пласта для данного участка.

Выводы

1. Для решения двумерных задач фильтрации (как напорных, так и без напорных) эффективным является метод конечных элементов, который наиболее полно учитывает природные условия (криволинейные границы области, изменчивость гидрогеологических условий, произвольное расположение в области фильтрации источников и стоков и.т.д.)

При моделировании течений подземных вод в пластах большой протяженности область фильтрации рекомендуется разбивать на крупные фрагменты, в пределах которых гидрогеологические параметры можно считать малоизменяющимися. Потерю точности в таких случаях следует компенсировать введением нелинейных базисных функций.

2. Применение метода фрагментов позволяет существенно сократить объем вычислений за счет уменьшения числа узлов сетки. В областях со сложными границами целесообразно совместное использование метода фрагментов и метода конечных элементов.

3. Идентификацию водопроводимости (или коэффициента фильтрации) пласта в двумерном случае рекомендуется проводить как по методике, предложенной в [44,48], так и методом регуляризации. Следует при этом учесть, что в последнем случае требуется большой объем вычислений, пропорциональный количеству узлов сетки.

4. С помощью идентификации гидрогеологических параметров среды показана возможность адекватного моделирования динамики подземных вод в неоднородной среде с точностью, согласованной с точностью входных данных, полученных в результате наблюдений и ОФР.

5. Опыты идентификации фильтрационных характеристик среды на различных объектах показали, что достоверное отражение модели реального гидрогеологического процесса, происходящего в МПВ, следует проверить с привлечением закона сохранения материального баланса.

Экономичность и надежность методики проверена на отдельных МПВ, расположенных в Кыргызстане, путем сопоставления вычисленных значений функции напора с наблюдаемыми. (Методика найдет применение в изыскательных работах гидрогеологов).

ГЛАВА 3

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ И МАССОПЕРЕНОСА

§3.1. Краевая задача для пространственной стационарной фильтрации

Стационарное движение подземных вод в пространственной области V описывается уравнением [154,87,189]

$$LH \equiv -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial H}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial H}{\partial z}\right) = W, \quad (x, y, z) \in V. \quad (3.1)$$

Здесь x, y, z - пространственные координаты; $H=H(x,y,z)$ - функция напора; $k=k(x,y,z)$ - коэффициент фильтрации; $W=W(x,y,z)$ - возмущающая функция, описывающая влияние источников и стоков.

Допустим, что V - цилиндрическая область, ограниченная поверхностью $\partial V = \Sigma = \Sigma_l + \Sigma_n + \Sigma_e + \Sigma_n$ (рис.3.1). Краевые условия на границе области имеют вид:

$$lH \equiv k\frac{\partial H}{\partial n} - \beta_1 H = \alpha_1, \quad (x,y,z) \in \Sigma_l, \quad (3.2)$$

$$-lH \equiv -k\frac{\partial H}{\partial n} + \beta_2 H = \alpha_2, \quad (x,y,z) \in \Sigma_n, \quad (3.3)$$

$$k\frac{\partial H}{\partial n} = 0, \quad (x,y,z) \in \Sigma_n, \quad (3.4)$$

$$H=H_1(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \Sigma_e, \quad (3.5)$$

где $\beta_i = \beta_i(x,y,z), \alpha_i = \alpha_i(x,y,z), i=1,2;$

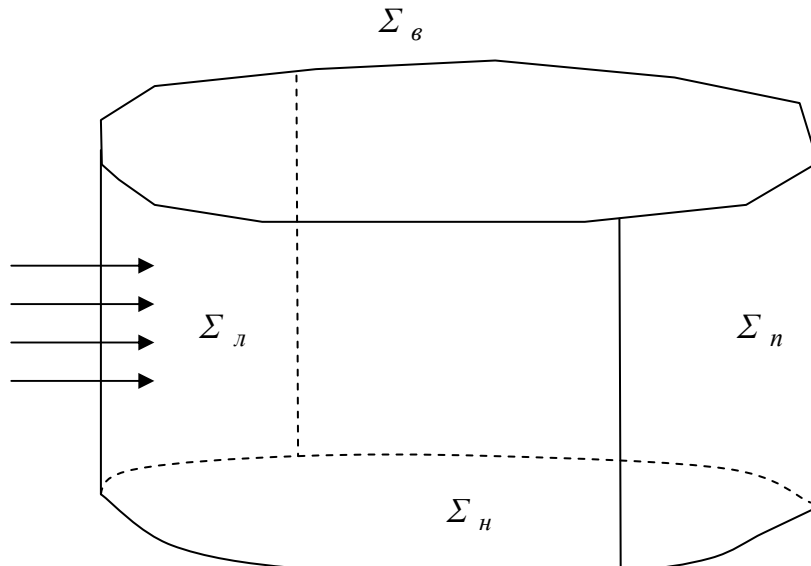


Рис. 3.1

$H_l(x, y, z)$ - заданные функции. Область Σ разбиваем на m треугольных прямых призм, тогда поверхности Σ_g и Σ_n также разобьются на m треугольников. Обозначим призму (фрагмент) через f (рис.3.2) и приближенное решение задачи (3.1) - (3.5) ищем в виде

$$H_n(x, y, z) = \sum_{f=1}^m \sum_{(f)} H^{(f)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n H_i F_i(x, y, z), \quad (3.6)$$

где $i = (x_i, y_i, z_i)$ - глобальные узлы области V (количество их равно n); $F_i(x, y, z)$ - базисные функции.

Применяя к задаче (3.1) - (3.5) обобщенный принцип Галеркина, имеем равенство [48]

$$\iiint_V F_j(LH_n - W)dv + \iint_{\Sigma} F_j(lH_n - \alpha) d\sigma = 0, \quad j=1, n, \quad (3.7)$$

откуда, согласно формуле Грина, получаем

$$\begin{aligned} & \iiint_V k \left(\frac{\partial F_j}{\partial x} \frac{\partial H_n}{\partial x} + \frac{\partial F_j}{\partial y} \frac{\partial H_n}{\partial y} + \frac{\partial F_j}{\partial z} \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) dv - \iint_{\Sigma} F_j k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma - \\ & - \iiint_V F_j W dv + \iint_{\Sigma} F_j k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma - \iint_{\Sigma} F_j \beta H_n d\sigma - \iint_{\Sigma} F_j \alpha d\sigma = 0, \quad (3.8) \\ & j=1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Подставляя вместо функции H_n ее разложение (3.6) в равенство (3.8), имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} H_i = b_j, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (3.9)$$

где

$$a_{ji} = \iiint_V k \left(\frac{\partial F_j}{\partial x} \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{\partial F_j}{\partial y} \frac{\partial F_i}{\partial y} + \frac{\partial F_j}{\partial z} \frac{\partial F_i}{\partial z} \right) dv - \iint_{\Sigma} F_j F_i \beta d\sigma, \quad (3.10)$$

$$b_j = \iiint_V F_j W dv + \iint_{\Sigma} F_j \alpha d\sigma.$$

Переходим теперь к описанию базисных функций.

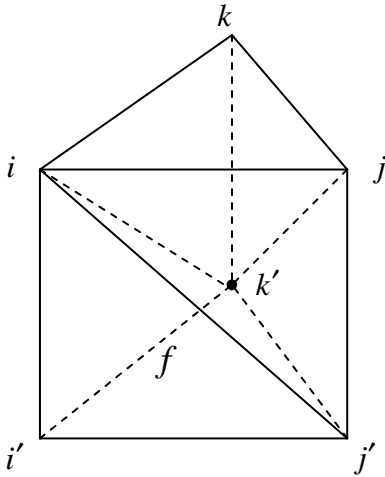


Рис.3.2

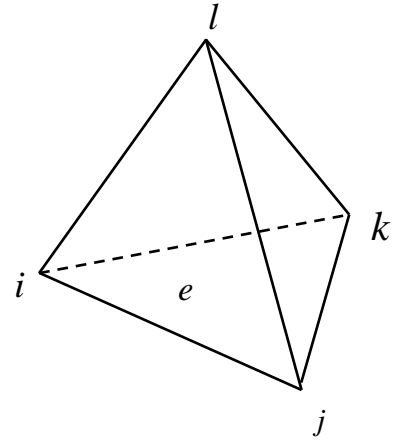


Рис.3.3

Рассмотрим фрагмент, образованный из треугольной призмы с вершинами $i, j, k, i' = i + \Delta i, j' = j + \Delta j, k' = k + \Delta k$ (рис.3.2). Каждая такая элементарная призма состоит из трех тетраэдров: $ijkk'$, $k'j'i'i$ и $ij'jk'$.

В каждом тетраэдральном элементе (e) (рис.3.3) функция $H^{(e)}(x,y,z)$ образуется в виде

$$\begin{aligned} H^{(e)}(x, y, z) = & H_i^{(e)} F_i(x, y, z) + H_j^{(e)} F_j(x, y, z) + \\ & + H_k^{(e)} F_k(x, y, z) + H_l^{(e)} F_l(x, y, z), \end{aligned} \quad (3.11)$$

где i, j, k, l - вершины тетраэдра,

$$F_i(x, y, z) = a_i + b_i x + c_i y + d_i z,$$

$$F_j(x, y, z) = a_j + b_j x + c_j y + d_j z,$$

$$F_k(x, y, z) = a_k + b_k x + c_k y + d_k z,$$

$$F_l(x, y, z) = a_l + b_l x + c_l y + d_l z,$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{pmatrix},$$

коэффициенты этих функций являются элементами матрицы, обратной по отношению к матрице C , т.е. они являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов матрицы C^T , транспонированной по отношению к матрице C :

$$C^{-1} = \frac{1}{\det C} \begin{pmatrix} a_i & a_j & a_k & a_l \\ b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{pmatrix},$$

$$H_i^{(e)} = H^{(e)}(x_i, y_i, z_i), H_j^{(e)} = H^{(e)}(x_j, y_j, z_j),$$

$$H_k^{(e)} = H^{(e)}(x_k, y_k, z_k), H_l^{(e)} = H^{(e)}(x_l, y_l, z_l).$$

Непосредственной проверкой можно установить, что функции формы F_i, F_j, F_k и F_l равны единице в соответствующих вершинах i, j, k, l и нулю - в других вершинах и что в произвольной точке элемента сумма их равна единице.

Поскольку область V аппроксимируется совокупностью $3m$ тетраэдральных элементов, то приближенное решение краевой задачи (3.1) - (3.5) ищется в виде

$$H_n(x, y, z) = \sum_{e=1}^{3m} \sum_{(e)} H^{(e)}(x, y, z) = \sum_{e=1}^{3m} [H_i^{(e)} F_i(x, y, z) + H_j^{(e)} F_j(x, y, z) + H_k^{(e)} F_k(x, y, z) + H_l^{(e)} F_l(x, y, z)].$$

Теперь выпишем явный вид коэффициентов и правых частей системы (3.9). Для каждого элемента (тетраэдра) с вершинами i, j, k, l вычисляются шесть коэффициентов (по числу ребер):

$$\begin{aligned} a_{ij} &= k^{(e)}(b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) - \beta^{(\Delta ij)}, \\ a_{ik} &= k^{(e)}(b_i b_k + c_i c_k + d_i d_k) - \beta^{(\Delta ik)}, \\ a_{il} &= k^{(e)}(b_i b_l + c_i c_l + d_i d_l) - \beta^{(\Delta il)}, \\ a_{jk} &= k^{(e)}(b_j b_k + c_j c_k + d_j d_k) - \beta^{(\Delta jk)}, \\ a_{jl} &= k^{(e)}(b_j b_l + c_j c_l + d_j d_l) - \beta^{(\Delta jl)}, \\ a_{kl} &= k^{(e)}(b_k b_l + c_k c_l + d_k d_l) - \beta^{(\Delta kl)}, \end{aligned}$$

где

$k^{(e)} = k_{cp}^{(e)} \cdot |\det C| / 6$, $\beta^{(\Delta)} = \beta_{cp}^{(\Delta)} \cdot S_{\Delta} / 12$, $k_{cp}^{(e)}$ - среднее значение функции $k(x, y, z)$ в элементе (e) . В случае равенства индексов получаются диагональные элементы системы.

Для правых частей системы получаем выражения

$$b_j = W^{(e)} + \alpha^{(\Delta j)}.$$

Здесь

$$W^{(e)} = W_{cp}^{(e)} \cdot |\det C| / 24, \quad \alpha^{(\Delta)} = \alpha_{cp}^{(\Delta)} \cdot S_{\Delta} / 3,$$

$W_{cp}^{(e)}$ - среднее значение функции $W(x,y,z)$ в элементе (e) ; $\alpha_{cp}^{(\Delta)}$ и $\beta_{cp}^{(\Delta)}$ - средние значения функций $\alpha(x,y,z,t)$ и $\beta(x,y,z,t)$ соответственно на грани (Δ) тетраэдра (e) (для граней, не являющихся граничными, функции α и β равны нулю); S_{Δ} - площадь грани (Δ) .

Пример. Рассматривается движение подземных вод в водоносном горизонте мощностью $m=100$ м и с коэффициентом фильтрации $k=10$ м/сут. Область фильтрации представляет собой прямой круговой цилиндр радиуса $r=3000$ м, на боковой поверхности которого задано краевое условие $k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta_1 H = \alpha_1$, с $\alpha = 0$ м/сут, $\beta = -\frac{3}{500 + 5 \cdot 10^{-5} z^2}$ (1/сут), а на верхней и нижней основаниях – условие непроницаемости $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$. Считаем, что перетоков из выше- и нижележащих пластов нет, т.е. $Q = 0$ (1/м·сут) и $f = -10^3 + 5 \cdot 10^5 (9 \cdot 10^6 - x^2 - y^2 + z^2)$ (1/сут). В табл.3.1 показаны точные и приближенные значения напоров в точках, расположенных на оси цилиндра (узлы № 20,59,98) и на расстояниях 1000 м (узлы № 14,53,92), 2000 м (узлы № 9,47,48,86,87), 3000 м (узлы № 2,3,5,41,42,44,80,81,83) от оси цилиндра на глубине $z=0$ м, $z=50$ м, $z=100$ м.

Таблица 3.1

Глубина $z=0m$

Расст. от оси	$l=0m$	$l=1000m$	$l=2000m$		$l=3000m$		
Узлы	20	14	8	9	2	3	5
Точ.знач	950.00	901.38	750.00		500.00		
Приб.знач	980.12	922.32	741.00	765.31	508.00	506.01	507.48
Отн.погр%	3.1	2.3	1.2	1.3	1.6	1.5	1.4

Глубина $z=50m$

Расст. от оси	$l=0m$	$l=1000m$	$l=2000m$		$l=3000m$		
Узлы	59	53	47	48	41	42	44
Точ.знач	950.13	901.50	750.13		500.12		
Приб.знач	998.11	923.41	740.00	766.33	510.01	507.11	511.00
Отн.погр%	5.0	2.4	1.3	1.4	1.9	1.9	2.1

Глубина $z=100m$

Расст. от оси	$l=0m$	$l=1000m$	$l=2000m$		$l=3000m$		
Узлы	98	92	86	87	80	81	83
Точ.знач	950.50	901.87	750.50		500.50		
Приб.знач	1020.20	925.01	786.01	765.30	513.11	511.01	509.12
Отн.погр%	7.3	2.5	2.3	2.0	2.5	2.6	1.8

§3.2. Нестационарное пространственное течение

ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Для разработки теоретически обоснованных рекомендаций по осуществлению мер, связанных с рациональным и экономичным использованием, охраной от истощения и загрязнения запасов подземных

вод, а также для прогнозирования их режима с учетом естественных и искусственных факторов необходимо изучать динамику подземных вод в пространственной постановке.

Нестационарная фильтрация подземных вод в пространственной области описывается уравнением [154,188]

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = W, \quad (3.12)$$

$$(x, y, z) \in V, t > 0$$

с начальным

$$H(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in V \quad (3.13)$$

и граничным

$$k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma, t > 0 \quad (3.14)$$

условиями, где $\mu = \mu(x, y, z)$ - коэффициент упругоёмкости породы;

$\varphi = \varphi(x, y, z)$ - начальное распределение напоров; V -область фильтрации, Σ - ее граница; $\vec{n} = (\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z))$ - внешняя нормаль к границе.

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(n, z) - \text{производная по внешней}$$

нормали к границе области.

Задачу (3.12) - (3.14) решаем численно с помощью метода конечных элементов. Для этого область V разбиваем на m тетраэдральных элементов. Как и в §3.1, введем линейные базисные функции F_i, F_j, F_k, F_l и искомую функцию $H(x, y, z, t)$ внутри элемента (e) аппроксимируем функцией

$$H^{(e)}(x, y, z, t) = H_i(t)F_i^{(e)}(x, y, z) + H_j(t)F_j^{(e)}(x, y, z) + \\ + H_k(t)F_k^{(e)}(x, y, z) + H_l(t)F_l^{(e)}(x, y, z),$$

а приближенное решение начально-краевой задачи (3.12) - (3.14) ищем в виде

$$H_n(x, y, z, t) = \sum_{e=1}^m H^{(e)}(x, y, z, t) = \sum_{e=1}^m [H_i(t)F_i^{(e)}(x, y, z) + H_j(t)F_j^{(e)}(x, y, z) + \\ + H_k(t)F_k^{(e)}(x, y, z) + H_l(t)F_l^{(e)}(x, y, z)] = \sum_{r=1}^n H_r(t)F_r(x, y, z). \quad (3.15)$$

Здесь

$$H_i^{(e)} = H^{(e)}(x_i, y_i, z_i, t), \quad H_j^{(e)} = H^{(e)}(x_j, y_j, z_j, t),$$

$$H_k^{(e)} = H^{(e)}(x_k, y_k, z_k, t), \quad H_l^{(e)} = H^{(e)}(x_l, y_l, z_l, t).$$

Для приближенного решения задачи образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s=1, 2, \dots$. Подставляя в задаче (3.12) - (3.14) вместо $H(x, y, z, t)$ функцию $H_n(x, y, z, t)$ из формулы (3.15) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем [47,48]:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i(LH_n - W)dv = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i(lH_n - \alpha)d\sigma, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (3.16)$$

где

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$l = k \frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(n, z) \quad \beta(x, y, z, t).$$

Первое слагаемое в левой части формулы (3.16) преобразуется следующим образом :

$$\begin{aligned} \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} dv &= \sum_{j=1}^n \iiint_V \mu F_i \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t} [H_j(t) F_j(x, y, z)] dt dv = \\ &= \sum_{j=1}^n \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial H_j(t)}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^n M_{ij} H_j^s - \sum_{j=1}^n M_{ij} H_j^{(s-1)}, \end{aligned}$$

где

$$M_{ij} = \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv,$$

$$H_j^s = H(x_j, y_j, z_j, t_s), \quad H_j^{s-1} = H(x_j, y_j, z_j, t_{s-1}).$$

К остальным слагаемым объемного интеграла в равенстве (3.16) применяем первую формулу Грина. Имеем

$$\begin{aligned} - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) \right] dv = \\ = - \sum_{j=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} H_j(t) dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) \right] dv = \\ = \sum_{j=1}^m [\sigma H_j(t_s) + (1-\sigma) H_j(t_{s-1})] \Delta t_s \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv - \\ - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma = \sum_{j=1}^n \sigma H_j(t_s) N_{ij} \Delta t_s + \\ + \sum_{j=1}^n (1-\sigma) H_j(t_{s-1}) N_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt. \end{aligned}$$

Здесь $0 < \sigma \leq 1$,

$$N_{ij} = \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv,$$

$$k_i = \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) k(x, y, z) \frac{\partial H}{\partial n} d\sigma.$$

В правой части формулы (3.16) получаем

$$\begin{aligned} & - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i(lH_n - \alpha) d\sigma = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i \left(k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H_n - \alpha \right) d\sigma dt = \\ & = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt + \sum_{j=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) (\beta F_j H_j + \alpha) d\sigma dt = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt + \\ & + \sum_{j=1}^n [\sigma B_{ij}^{(s)} H_j^{(s)} + (1-\sigma) B_{ij}^{(s-1)} H_j^{(s-1)}] \Delta t_s + \sum_{j=1}^n [\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma) A_i^{(s-1)}] \Delta t_s, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} B_{ij} &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) \beta(x, y, z, t) d\sigma, \\ A_i &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) \alpha(x, y, z, t) d\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в равенство (3.16), получаем СЛАУ относительно неизвестных $H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s)$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j^{(s)} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= M_{ij} + (N_{ij}^{(s)} - \sigma B_{ij}^{(s)}) \Delta t_s, \\ b_i &= [\sigma W_i^{(s)} + (1-\sigma) W_i^{(s-1)}] \Delta t_s + \sum_{j=1}^n \{ [M_{ij} - (1-\sigma) B_{ij}^{(s-1)}] \Delta t_s H_j^{(s-1)} + \\ & + [\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma) A_i^{(s-1)}] \Delta t_s \}, \\ W_i &= \iiint_V F_i(x, y, z) \mathcal{W}(x, y, z, t) dv. \end{aligned}$$

Система уравнений (3.17) решается шаг за шагом при значениях $s=1, 2, \dots$. При $s=1$ вместо $H^{(0)} = H(x,y,z,0)$ берется начальное распределение напоров из условия (3.13) и находятся значения функции H при $t = t_1$. Используя полученную функцию $H^{(1)} = H(x,y,z,t_1)$ в качестве начальных условий, вычисляются значения функции $H^{(2)} = H(x,y,z,t_2)$ и т. д. На каждом временном слое матрица системы (3.17) является симметричной с диагональным преобладанием, поэтому ее можно решать одним из точных методов (например, методом Гаусса).

Пример. В качестве тестового примера рассмотрим неустановившееся движение подземных вод в области фильтрации, описанной в §3.1. В данном случае напорная функция имеет вид

$$H(x, y, z, t) = H_0 - \varepsilon_0(l^2 - x^2 - y^2 + 10z^2) \cdot t,$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-6}/73$, а t измеряется в сутках.

В табл. 3.2 приведены точные и приближенные значения напоров в различные моменты времени.

§3.3. Решение краевой задачи для пространственной нестационарной фильтрации с использованием метода фрагментов

В классической теории метода конечных элементов в качестве элемента обычно используется треугольная пирамида (тетраэдр) [167]. В пространственных задачах фильтрации подземных вод область фильтрации предполагается цилиндрической, поэтому такую область удобно разбивать на призматические фрагменты. В данном параграфе, в отличие от [119,120], алгоритм приближенного решения задачи основан на методе конечных элементов с призматическими фрагментами.

Пусть нестационарная фильтрация подземных вод описывается уравнением

$$LH(x,y,z,t) = W(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in V, \quad t > 0 \quad (3.18)$$

с начальным

$$H(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \quad (x,y,z) \in V \quad (3.19)$$

и граничным

$$lH(x,y,z,t) = \alpha(x,y,z,t), \quad (x,y,z) \in \Sigma \quad (3.20)$$

условиями, где

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$l = k \left[\frac{\partial}{\partial x} \cos(n,x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n,y) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(n,z) \right] - \beta(x,y,z,t).$$

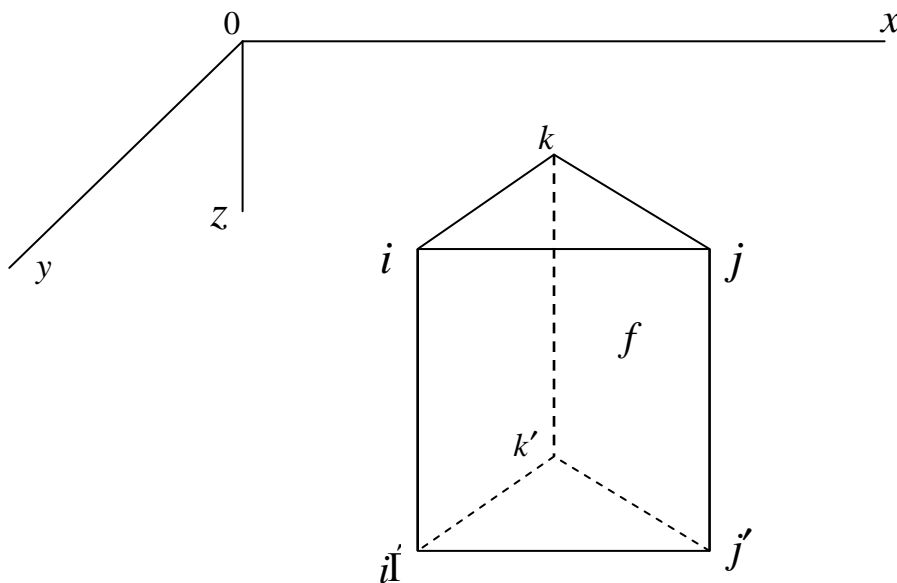


Рис. 3.4. Призматический элемент

Разбиваем область V на m треугольных призм и рассмотрим фрагмент (f), образованный из призмы с вершинами i, j, k , $i' = i + \Delta i$, $j' = j + \Delta j$, $k' = k + \Delta k$ (рис 3.4).

В фрагменте (f) функция $H^{(f)}(x,y,z,t)$ образуется в виде

$$H^{(f)}(x, y, z, t) = H_i^{(f)}(t)F_i(x, y, z) + H_j^{(f)}(t)F_j(x, y, z) + H_k^{(f)}(t)F_k(x, y, z) + \\ + H_{i'}^{(f)}(t)F_{i'}(x, y, z) + H_{j'}^{(f)}(t)F_{j'}(x, y, z) + H_{k'}^{(f)}(t)F_{k'}(x, y, z). \quad (3.21)$$

Здесь базисные функции $F_i, F_j, F_k, F_{i'}, F_{j'}, F_{k'}$ должны быть линейно-независимыми нелинейным функциями. Эти функции образуем с помощью частных решений следующего стационарного уравнения фильтрации с постоянными коэффициентами

$$-k_0 \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right) = W_0. \quad (3.22)$$

Частными решениями этого уравнения являются функции

$$H_1(x) = \alpha x^2 + p_1 x + q_1, \quad H_2(y) = \alpha y^2 + p_2 y + q_2, \quad H_3(z) = \alpha z^2 + p_3 z + q_3,$$

где

$$\alpha = -\frac{W_0}{2k_0}, \quad p_i, q_i \quad (i=1,2,3) \text{ - произвольные параметры.}$$

Учитывая призматичную форму фрагментов, базисные функции $F_s(x, y, z)$ ($s=i, j, k, i', j', k'$) образуем в виде

$$F_s(x, y, z) = N_s(x, y)\Phi_s(z), \quad s = i, j, k, \\ F_{s'}(x, y, z) = N_{s'}(x, y)\Phi_{s'}(z), \quad s' = i', j', k', \quad (3.23)$$

где

$$N_s(x, y) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y), \quad s = i, j, k,$$

$$a_i = (H_{1j}H_{2k} - H_{1k}H_{2j})/\Delta, \quad b_i = (H_{2j} - H_{2k})/\Delta, \quad c_i = (H_{1k} - H_{1j})/\Delta,$$

$$a_j = (H_{1k}H_{2i} - H_{1i}H_{2k})/\Delta, \quad b_j = (H_{2k} - H_{2i})/\Delta, \quad c_j = (H_{1i} - H_{1k})/\Delta,$$

$$a_k = (H_{1i}H_{2j} - H_{1j}H_{2i})/\Delta, \quad b_k = (H_{2i} - H_{2j})/\Delta, \quad c_k = (H_{1j} - H_{1i})/\Delta,$$

$$\Delta = (H_{1j} - H_{1i})(H_{2k} - H_{2i}) - (H_{1k} - H_{1i})(H_{2j} - H_{2i}) .$$

Функции $\Phi_s(z)$, $\Phi_{s'}(z)$, ($s = i, j, k$) возьмем в виде

$$\Phi_s(z) = u_s + v_s\varphi(z), \quad \Phi_{s'}(z) = u_{s'} + v_{s'}\varphi(z) ,$$

где

$$u_s = \frac{\varphi(z_s + \Delta z)}{\Delta\varphi(z_s)}, \quad v_s = -\frac{1}{\Delta\varphi(z_s)}, \quad u_{s'} = -\frac{\varphi(z_s)}{\Delta\varphi(z_s)}, \quad v_{s'} = \frac{1}{\Delta\varphi(z_s)},$$

$\Delta\varphi(z_s) = \varphi(z_s + \Delta z) - \varphi(z_s)$, $s = i, j, k$; $\varphi(z)$ - произвольная нелинейная элементарная функция, определенная на отрезке $[z, z + \Delta z]$. В частности, в качестве $\varphi(z)$ можно взять функцию $H_3(z)$.

Таким образом, базисные функции имеют вид:

$$F_s(x, y, z) = (a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y))(u_s + v_s \varphi(z)), \quad s = i, j, k, i', j', k'. \quad (3.24)$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функции $F_s(x, y, z)$ ($s = i, j, k, i', j', k'$), определенные формулами (3.24), равны единице в узле s , а в других узлах обращаются в нуль, и что сумма базисных функций в произвольной точке $M(x, y, z)$ фрагмента (f) равна единице, следовательно, функции $F_i, F_{i'}, \dots, F_{k'}$ обладают всеми свойствами функций формы в классическом методе конечных элементов.

Если область V аппроксимируется m треугольными призмами, то приближенное решение начально-краевой задачи (3.18)–(3.20) ищется в виде

$$H_n(x, y, z, t) = \sum_{f=1}^m \sum H^{(f)}(x, y, z, t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{f=1}^m \sum_{l(f)} \left[H_i^{(f)}(t) F_i + H_j^{(f)}(t) F_j + H_k^{(f)}(t) F_k + H_{i'}^{(f)}(t) F_{i'} + H_{j'}^{(f)}(t) F_{j'} + H_{k'}^{(f)}(t) F_{k'} \right] = \\
&= \sum_{s=1}^n H_s(t) F_s(x, y, z), \tag{3.25}
\end{aligned}$$

где n – число всех узлов сеточной области.

Для приближенного решения задачи (3.18)–(3.20) образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s=1, 2, \dots$. Подставляя вместо $H(x, y, z, t)$ функцию $H_n(x, y, z, t)$ из формулы (3.25) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, пообобщенному принципу Галеркина получаем равенство [47,48]

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i (LH_n - W) dv = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i (lH_n - \alpha) d\sigma, \quad i=1, 2, \dots, n. \tag{3.26}$$

Рассмотрим сначала левую часть равенства (3.26). Первое слагаемое преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} dv = \sum_{j=1}^n \iiint_V \mu F_i \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t} [H_j(t) \cdot F_j(x, y, z)] dt dv = \\
&= \sum_{j=1}^n \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial H_j(t)}{\partial t} dt = \\
&= \sum_{j=1}^n M_{ij} H_j^{(s)} - \sum_{j=1}^n M_{ij} H_j^{(s-1)},
\end{aligned}$$

где

$$M_{ij} = \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv, \tag{3.27}$$

$$H_j^{(s)} = H(x_j, y_i, z_j, t_s), \quad H_j^{(s-1)} = H(x_j, y_i, z_j, t_{s-1}).$$

К остальным слагаемым объемного интеграла применяем первую формулу Грина. Имеем

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) \right] dv - \\
& \quad - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i W(x, y, z, t) dv = \\
& = - \sum_{j=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} H_j(t) dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) \right] dv - \\
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i W(x, y, z, t) dv = \sum_{j=1}^n \left[\sigma H_j^{(s)} + (1 - \sigma) H_j^{(s-1)} \right] \Delta t_s \times \\
& \quad \times \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv - \\
& - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma - \iiint_V \left[\sigma W^{(s)} + (1 - \sigma) W^{(s-1)} \right] F_i \Delta t_s dv = \\
& = \sum_{j=1}^n \sigma H_j^{(s)} N_{ij} \Delta t_s + \sum_{j=1}^n (1 - \sigma) H_j^{(s-1)} N_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma - W_i.
\end{aligned}$$

Здесь $0 < \sigma \leq 1$,

$$\begin{aligned}
N_{ij} &= \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv, \\
W_i &= \iiint_V \left[\sigma W^{(s)} + (1 - \sigma) W^{(s-1)} \right] F_i(x, y, z) \Delta t_s dv. \tag{3.28}
\end{aligned}$$

В правой части формулы (3.26) получаем

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i (lH_n - \alpha) d\sigma = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i \left(k \frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha \right) d\sigma dt =$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma + \sum_{j=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i (\beta F_j H_j + \alpha) d\sigma = \\
&= - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma + \sum_{j=1}^n \left[\sigma B_{ij}^{(s)} H_j^{(s)} + (1 - \sigma) B_{ij}^{(s-1)} H_j^{(s-1)} \right] \Delta t_s + \\
&\quad + \sum_{j=1}^n \left[\sigma A_i^{(s)} + (1 - \sigma) A_i^{(s-1)} \right] \Delta t_s,
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
B_{ij} &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) \beta(x, y, z, t) d\sigma, \\
A_i &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) \alpha(x, y, z, t) d\sigma.
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Подставляя полученные выражения в равенство (3.26), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$$H_j^{(s)} = H(x_j, y_i, z_j, t_s):$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j^{(s)} = f_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \tag{3.30}$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= M_{ij} + \sigma (N_{ij}^{(s)} - B_{ij}^{(s)}) \Delta t_s, \\
f_i &= \sum_{j=1}^n \left[M_{ij} - (1 - \sigma) (N_{ij}^{(s-1)} - B_{ij}^{(s-1)}) \Delta t_s \right] H_j^{(s-1)} + \\
&\quad + \left[\sigma (W_{ij}^{(s)} + A_i^{(s)}) + (1 - \sigma) (W_{ij}^{(s-1)} + A_i^{(s-1)}) \right] \Delta t_s.
\end{aligned}$$

В случае тетраэдральных фрагментов базисные функции имеют вид

$$F_s(x, y, z) = a_s + b_s H_1(x) + c_s H_2(y) + d_s H_3(z), \quad s = i, j, k, l,$$

где коэффициенты a_s, b_s, c_s, d_s вычисляются аналогично тому, как это делается в случае линейных базисных функций (см. §3.1).

В случае призматических фрагментов преимуществом базисов (3.23) или (3.24) является разделенность переменных, а именно то, что интегралы в формулах (3.27), (3.28) берутся сначала по треугольному основанию призмы, где можно использовать результаты применения квадратичных базисов в двумерной задаче (см. §2.3), а затем легко вычисляются по z в постоянных пределах.

Хотя оценка точности аппроксимации искомой функции весьма затруднительна, есть основания полагать, что если применение линейных базисных функций в МКЭ является аналогом линейного интерполирования, то использование квадратичных базисов в МФ должно быть аналогом формулы Симпсона.

Изучая алгоритмы решения задачи (3.18)-(3.20) с применением тетраэдральных и призматических элементов, можно сравнить их с вычислительной точки зрения. Если считать коэффициенты уравнений (3.18) и (3.20) постоянными, то в случае тетраэдральных элементов под объемными и поверхностными интегралами соответственно будут многочлены первой и второй степеней, а в случае призматических элементов – многочлены второй и четвертой степеней. Ясно, что во втором случае вычисление интегралов затрудняется существенно, в то же время точность аппроксимации искомой функции выше. Для каждого узла сетки в первом случае объемные интегралы берутся 13 раз по тетраэдру, поверхностные – 18 раз по треугольникам, а во втором случае объемные - 7 раз по призме и поверхностные – 14 раз по треугольникам и прямоугольникам. Как и в двумерной задаче, преимущество МФ должно наблюдаться при значительном укрупнении фрагментов.

Работа алгоритма отлажена на решении следующей тестовой задачи. Задача (3.18)–(3.20) решается в цилиндрической области $V = \{x^2 + y^2 \leq 0.25, 0 \leq z \leq 0.4\}$ в течение времени $T=1.0$ с шагом $\Delta t = 0.1$.

Область V разбита на 108 треугольных призм высотой $\Delta z = 0.2$. В уравнении (1) заданы функции $k(x,y,z)=x+y+z+2$, $Q(x,y,z)=0$,

$W(x,y,z,t)=\mu H(x,y,z,t)-4e^t[2k(x,y,z)-1]$. Искомой функцией является $H(x,y,z,t)=(x^2+y^2+z^2+1)e^t$. В таблицах 3.3 и 3.4 даны точные и приближенные решения соответственно стационарной и нестационарной задач, полученных с применением тетраэдральных и призматических элементов. В таблицах приведены результаты в узлах, лежащих в первом октанте, причем узлы 1, 38 и 75 расположены на оси цилиндра, узлы 5, 42 и 79 – на границе, а остальные узлы являются внутренними.

Сравнение результатов дает основание сделать заключение о равноценности итогов применения тетраэдральных и призматических элементов, а последние имеют явное преимущество перед классическими элементами в смысле трудоемкости и удобства при проведении вычислений.

§ 3.4. Приближенное решение стационарного уравнения массопереноса

Важной проблемой в экологии является контроль за выбросом промышленных, животноводческих и бытовых отходов. Особенно актуальными являются исследования влияния на окружающую среду хвостохранилищ, содержащих химически вредные вещества. Эти проблемы тесно связаны с обеспечением населения качественно чистой водой. Загрязнители, попадая в подземные воды, приводят к изменению их свойства и состава. При моделировании миграции подземных вод должны учитываться еще модели процессов массопереноса.

При изучении фильтрации смешивающихся жидкостей совместно рассматриваются уравнения движения подземных вод и уравнения диффузии и массопереноса. Из баланса массы вещества и основного закона диффузии

(закона Фика) получается уравнение переноса загрязнителей (без учета кинетики, изменения плотности и вязкости потока и пористости среды) [29,99]:

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} - v_z C \right) = g(x, y, z), \quad (3.31)$$

$$(x, y, z) \in V$$

с граничным условием

$$D \frac{\partial C}{\partial n} - \beta_c C = \alpha_c, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (3.32)$$

где $C=C(x,y,z)$ – концентрация диффундирующего вещества; $D=D(x,y,z)$ – коэффициент конвективной диффузии;

$$v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_z = -k \frac{\partial H}{\partial z} \quad \text{– составляющие скорости}$$

фильтрации подземных вод; $H=H(x,y,z)$ –напорная функция; $k=k(x,y,z)$ – коэффициент фильтрации пористой среды; $g(x,y,z)$ –источник загрязняющего вещества; $\beta_c=\beta_c(x,y,z)$, $\alpha_c=\alpha_c(x,y,z)$ – заданные функции; V –область фильтрации подземных вод, $\Sigma=\partial V$ – ее граница.

Компоненты скорости фильтрации определяются из уравнения движения подземных вод

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V, \quad (3.33)$$

$$k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma. \quad (3.34)$$

Здесь $f(x,y,z)$ – функция влияния источников и стоков подземных вод; $\alpha=\alpha(x,y,z)$, $\beta=\beta(x,y,z)$ – заданные функции.

Задачи (3.31), (3.32) и (3.33), (3.34) решаем МКЭ [167,119]. Считая область фильтрации V цилиндрической, разбиваем ее на тетраэдральные элементы и приближенно представим функции $H(x,y,z)$ и $C(x,y,z)$ в виде

$$H(x,y,z) \approx H_n(x,y,z) = \sum_{j=1}^n H_j N_j(x,y,z), \quad (3.35)$$

$$C(x,y,z) \approx C_n(x,y,z) = \sum_{j=1}^n C_j N_j(x,y,z), \quad (3.36)$$

где $H_j = H(x_j, y_j, z_j)$, $C_j = C(x_j, y_j, z_j)$, $N_j(x,y,z) = a_j + b_j x + c_j y + d_j z$, n – число узлов сеточной области.

В задаче (3.31), (3.32) вместо $C(x,y,z)$ подставляем функцию $C_n(x,y,z)$ и применяем обобщенный принцип Галеркина:

$$\begin{aligned} & - \iiint_V N_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C_n}{\partial x} - v_x C_n \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C_n}{\partial y} - v_y C_n \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C_n}{\partial z} - v_z C_n \right) + g \right] dv + \\ & + \iint_{\Sigma} N_i \left(D \frac{\partial C_n}{\partial n} - \beta_c C_n - \alpha_c \right) d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3.37)$$

и используем формулу Грина:

$$\begin{aligned} & \iiint_V D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial C_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial C_n}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial C_n}{\partial z} \right) dv - \iiint_V C_n \left(v_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv - \\ & - \iint_{\Sigma} N_i k \frac{\partial H}{\partial n} C_n d\sigma - \iiint_V N_i g dv - \iint_{\Sigma} N_i (\beta_c C_n + \alpha_c) d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Заменяя функцию $C_n(x,y,z)$ ее разложением по формуле (3.36), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно C_j :

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} C_j = d_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.38)$$

где

$$\begin{aligned}
 c_{ij} = & \iiint_V D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv - \iiint_V N_j \left(v_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv - \\
 & - \iint_{\Sigma} N_i N_j (\beta H + \alpha) d\sigma - \iint_{\Sigma} N_i N_j \beta_c d\sigma, \quad (3.39) \\
 d_i = & \iiint_V N_i g dv + \iint_{\Sigma} N_i \alpha_c d\sigma.
 \end{aligned}$$

Компоненты скорости фильтрации v_x, v_y, v_z и v выражаются через производные функции $H(x, y, z)$, значения которых находятся из системы уравнений [119], получаемой из задачи (3.33), (3.34) по описанной выше процедуре:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.40)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 a_{ij} = & \iiint_V k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv + \iint_{\Sigma} N_i N_j \beta d\sigma, \quad (3.41) \\
 f_i = & \iiint_V N_i f dv + \iint_{\Sigma} N_i \alpha d\sigma.
 \end{aligned}$$

Для одного тетраэдрального элемента (f) с вершинами i, j, k, l и базисными функциями $N_s = a_s + b_s x + c_s y + d_s z$, $s = i, j, k, l$, коэффициенты систем (3.38) и (3.40) имеют вид:

$$\begin{aligned}
 c_{ij} = & (b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) \iiint_{(f)} D(x, y, z) dv + \left(b_i \frac{\partial H_n}{\partial x} + c_i \frac{\partial H_n}{\partial y} + d_i \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) \iiint_{(f)} N_j k(x, y, z) dv - \\
 & - \iint_{\Sigma_f} N_i N_j (\beta H_n + \alpha) d\sigma - \iint_{\Sigma_f} N_i N_j \beta_c d\sigma, \\
 d_i = & \iiint_{(f)} N_i g dv + \iint_{\Sigma_f} N_i \alpha_c d\sigma,
 \end{aligned}$$

$$a_{ij} = (b_i b_j + c_i c_j + d_i d_j) \iiint_{(f)} k(x, y, z) dv - \iint_{\Sigma_f} N_i N_j \beta(x, y, z) d\sigma,$$

$$f_i = \iiint_{(f)} N_i f dv + \iint_{\Sigma_f} N_i \alpha d\sigma.$$

Вычисления проводятся в следующем порядке. После составления расчетной сетки вводятся значения параметров $k, f, D, g, \alpha, \beta, \alpha_c, \beta_c$ в узлах сетки. Затем решается система (3.40) и вычисляются приближенные значения напоров $H(x, y, z)$. Определив по значениям H_i ($i=1,2,\dots,n$) компоненты скорости фильтрации v_x, v_y, v_z , решается на той же сетке системы (3.38) и находятся приближенные значения концентрации солей C_i , $i=1,2,\dots,n$. Обе системы (3.38) и (3.40) хорошо обусловлены и решаются методом Гаусса.

Пример. Вычислим концентрацию загрязняющих веществ в области фильтрации, имеющей вид прямого кругового цилиндра радиуса $r=3000$ м и высотой $m=100$ м. Пусть водоносный пласт имеет следующие параметры: коэффициент фильтрации $k=10$ м/сут, коэффициент конвективной диффузии $D=5 \cdot 10^{-3}$ м²/сут, функция источников и стоков подземных вод $f=-10^{-3}$ л/сут, загрязнителей $g=10^{-3} + 5 \cdot 10^{-6}(3 \cdot 10^3 - 2x - 2y)$ г/(л·сут). На боковой поверхности области фильтрации задаем краевые условия III рода (3.32) и (3.34) с $\alpha=0$ м/сут, $\beta=-3(10+5 \cdot 10^5 \cdot z^2)$ л/сут, $\alpha_c=0$ м·г/(л·сут), $\beta_c=-(25 \cdot 10^{-6} \cdot (x_i + y_i)/3 \cdot 10^3) / (10+5 \cdot 10^{-3}(3 \cdot 10^3 - x - y + z))$ м/сут, на верхней и нижней границах – условия непроницаемости $\frac{\partial n}{\partial n}=0$ и $\frac{\partial C}{\partial n}=0$. В таблице 3.5 приведены точные и приближенные значения концентрации солей в точках, расположенных на оси цилиндра (узлы № 20, 59, 98) и на расстоянии 1000 м (узлы №14, 53, 92), 2000 м (узлы № 8, 9, 47, 48, 86, 87), 3000 м (узлы №2, 3, 5, 41, 42, 44, 80, 81, 83) от оси цилиндра на глубине $z=0$ м, $z=50$ м и $z=1000$ м.

Таблица 3.5

Точные и приближенные значения концентрации солей в точках

Глубина $z=0 м$							
Расст. от оси	$l=0.00м$	$l=1000м$	$l=2000м$		$l=3000м$		
№ узлов	20	14	8	9	2	3	5
Точн. знач.	25.00	18.25	15.00	11.50	10.00	6.50	6.17
Прибл.знач.	24.05	18.00	15.09	11.61	10.02	6.53	6.13
Погр. в %	3.8	1.4	0.6	1.0	0.2	0.5	0.7

Глубина $z=50 м$

Расст. от оси	$l=0.00м$	$l=1000м$	$l=2000м$		$l=3000м$		
№ узлов	59	53	47	48	41	42	44
Точн.знач.	25.25	23.50	15.25	11.75	14.75	6.75	6.42
Прибл.знач.	24.05	23.71	15.15	11.85	14.70	6.52	6.41
Погр. в %	4.7	1	0.6	0.8	0.4	3.4	0.2

Глубина $z=100 м$

Расст. от оси	$l=0.00м$	$l=1000м$	$l=2000м$		$l=3000м$		
№ узлов	98	92	86	87	80	81	83
Точн.знач.	25.50	18.75	15.50	12.00	10.50	7.00	6.67
Прибл.знач.	24.93	18.53	15.60	12.15	10.58	7.11	6.60
Погр. в %	2.2	1.2	0.6	1.2	0.8	1.6	1

§3.5. Математическая модель переноса загрязнителей в подземных водах при нестационарном режиме

Для исследования процесса распространения загрязняющих веществ в подземных водах необходимо совместно решать уравнения неустановившегося движения жидкости и переноса загрязнителей. Пространственная модель этого процесса состоит из двух уравнений параболического типа с соответствующими начально–краевыми условиями [99]:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = f, \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in [0, T], \quad (3.42)$$

$$H(x, y, z, 0) = H_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V, \quad (3.43)$$

$$k \frac{\partial H}{\partial n} = \alpha + \beta H, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in [0, T], \quad (3.44)$$

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial C}{\partial x} - v_x C \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial C}{\partial y} - v_y C \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial C}{\partial z} - v_z C \right) = g, \quad (3.45)$$

$$(x, y, z) \in V, \quad t \in [0, T],$$

$$C(x, y, z, 0) = C_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V, \quad (3.46)$$

$$D \frac{\partial C}{\partial n} = \alpha_c + \beta_c C, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in [0, T]. \quad (3.47)$$

Здесь $n_0 = n_0(x, y, z)$ – коэффициент пористости; $C_0 = C_0(x, y, z)$ – начальное распределение концентрации; $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ – вектор скорости фильтрации ($\vec{v} = -k \text{ grad}H$, $k = k(x, y, z)$ – коэффициент фильтрации), $v_x = v_x(x, y, z, t)$, $v_y = v_y(x, y, z, t)$, $v_z = v_z(x, y, z, t)$ – составляющие скорости фильтрации; $\vec{n} = (\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z))$ – внешняя нормаль к границе области фильтрации.

Задачи (3.42)–(3.44) и (3.45)–(3.47) решаем МКЭ [48,128, 167]. Разобьем область V на m тетраэдральных элементов и функцию C в элементе (f) представим в виде линейной комбинации значений этих функций в вершинах тетраэдра:

$$H^{(f)}(x,y,z,t) = H_i(t)N_i(x,y,z) + H_j(t)N_j(x,y,z) + H_k(t)N_k(x,y,z) + H_l(t)N_l(x,y,z),$$

$$C^{(f)}(x,y,z,t) = C_i(t)N_i(x,y,z) + C_j(t)N_j(x,y,z) + C_k(t)N_k(x,y,z) + C_l(t)N_l(x,y,z),$$

где i, j, k, l – вершины тетраэдра (f) , $C_i(t) = C(x_i, y_i, z_i, t), \dots, N_i, N_j, N_k$ и N_l – линейные базисные функции: $N_s(x,y,z) = a_s + b_s x + c_s y + d_s z, s = i, j, k, l$.

Приближенное решение задач (3.42)–(3.44) и (3.45)–(3.47) ищем в виде

$$H_n(x,y,z,t) = \sum_{f=1}^m \sum H^{(e)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^n H_i(t)N_i(x,y,z),$$

$$C_n(x,y,z,t) = \sum_{f=1}^m \sum C^{(f)}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^n C_i(t)N_i(x,y,z). \quad (3.48)$$

Поскольку задача (3.42)–(3.44) изучена достаточно подробно в §§ 3.2 и 3.3, мы на ее решении не останавливаемся. Разобьем временной отрезок $[0, T]$ на q элементарных отрезков длиной Δt_s : $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}, s = 1, 2, \dots, q$.

Применяя к задаче (3.45)–(3.47) обобщенный принцип Галеркина и подставляя вместо функции $C(x,y,z,t)$ функцию $C_n(x,y,z,t)$, получаем n уравнений

$$\iiint_V N_i (AC_n - g) dv = - \iint_{\Sigma} N_i (lC_n - \alpha_c) d\sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.49)$$

где A и l – операторы уравнения (3.45) и краевого условия (3.47) соответственно:

$$A = n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} - v_x \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial}{\partial y} - v_y \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial}{\partial z} - v_z \right),$$

$$l = D \frac{\partial}{\partial n} - \beta_c = D \left(\frac{\partial}{\partial x} \bar{e}_1 + \frac{\partial}{\partial y} \bar{e}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \bar{e}_3 \right) - \beta_c.$$

В равенствах (3.49) используем формулу Грина.

Имеем:

$$\begin{aligned} & \iiint_V N_i \frac{\partial(n_0 C_n)}{\partial t} dv + \iiint_V D \left(\frac{\partial C_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial C_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial C_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv - \iiint_V C_n \left(v_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv - \\ & - \iint_{\Sigma} N_i \beta_c C_n d\sigma + \iint_{\Sigma} N_i v C_n d\sigma = \iiint_V N_i g dv + \iint_{\Sigma} N_i \alpha_c d\sigma, \quad i=1,2,\dots,n, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где

$$v_n = v_x \vec{e}_1 + v_y \vec{e}_2 + v_z \vec{e}_3.$$

Проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, используя разложение (3.48) и квадратурные формулы [164]

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi(t) dt = \Delta t_s [\sigma \varphi(t_s) + (1-\sigma) \varphi(t_{s-1})], \quad 0 < \sigma \leq 1,$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \varphi(t) \psi'(t) dt = [\psi(t_s) - \psi(t_{s-1})] [\sigma \varphi(t_s) + (1-\sigma) \varphi(t_{s-1})],$$

для слагаемых равенств (3.50) получаем следующие выражения

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iiint_V N_i \frac{\partial(n_0 C_n)}{\partial t} dv dt = \sum_{j=1}^n M_{ij} C_j^{(s)} - \sum_{j=1}^n M_{ij} C_j^{(s-1)}, \quad (3.51)$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iiint_V D \left(\frac{\partial C_n}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial C_n}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial C_n}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv dt = \sum_{j=1}^n [\sigma C_j^{(s)} + (1-\sigma) C_j^{(s-1)}] D_{ij}, \quad (3.52)$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iiint_V C_n \left(v_x \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_i}{\partial y} + v_z \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv dt = N^{(s)}_{ij} \sum_{j=1}^n [\sigma C_j^{(s)} + (1-\sigma) C_j^{(s-1)}], \quad (3.53)$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iiint_V N_i g dv dt = \sigma G_i^{(s)} + (1-\sigma) G_i^{(s-1)}, \quad (3.54)$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} N_i \beta_c C_n d\sigma dt = \sigma \sum_{j=1}^n B_{ij}^{(s)} C_j^{(s)} + (1-\sigma) \sum_{j=1}^n B_{ij}^{(s-1)} C_j^{(s-1)}, \quad (3.55)$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} N_i v_n C_n d\sigma dt = \sigma \sum_{j=1}^n V_{ij}^{(s)} C_j^{(s)} + (1-\sigma) \sum_{j=1}^n V_{ij}^{(s-1)} C_j^{(s-1)}, \quad (3.56)$$

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} N_i \alpha_c d\sigma dt = \sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma) A_i^{(s-1)}, \quad (3.57)$$

где

$$\begin{aligned} M_{ij} &= \frac{1}{\Delta t_s} \iiint_V N_i N_j n_0 dv, \\ D_{ij} &= \iiint_V D \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv, \\ N_{ij}^{(s)} &= \iiint_V N_j \left(v_x^{(s)} \frac{\partial N_i}{\partial x} + v_y^{(s)} \frac{\partial N_i}{\partial y} + v_z^{(s)} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) dv, \\ G_i^{(s)} &= \iiint_V N_i g^{(s)} dv, \quad A_i^{(s)} = \iint_{\Sigma} N_i \alpha_c^{(s)} d\sigma. \\ B_{ij}^{(s)} &= \iint_{\Sigma} N_i N_j \beta_c^{(s)} d\sigma, \quad V_{ij}^{(s)} = \iint_{\Sigma} N_i N_j v_n^{(s)} d\sigma. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Подставляя в уравнение (3.50) выражения для интегралов (3.51)–(3.57), приходим к системе алгебраических уравнений относительно $C_j^{(s)}$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} C_j^{(s)} = b_i, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (3.59)$$

где

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= M_{ij} + D_{ij} - \sigma(N_{ij}^{(s)} + B_{ij}^{(s)} - V_{ij}^{(s)}), \\
b_i &= \sum_{j=1}^n [M_{ij} + (1 - \sigma)(N_{ij}^{(s-1)} + B_{ij}^{(s-1)} - V_{ij}^{(s-1)})C_j^{(s-1)}] + \\
&+ \sigma(G_i^{(s)} + A_i^{(s)}) + (1 - \sigma)(G_i^{(s-1)} + A_i^{(s-1)}).
\end{aligned}$$

Скорость фильтрации $v(x, y, z, t)$ определяется по формуле Дарси

$$v = -k \operatorname{grad} H \quad \left(v_x = -k \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v_y = -k \frac{\partial H}{\partial y}, \quad v_z = -k \frac{\partial H}{\partial z} \right),$$

для чего предварительно решается задача (3.42)–(3.44). После нахождения напорной функции $H(x, y, z, t_s)$ для составляющих скорости фильтрации в элементе (e) получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
v_x^{(s)} &= -k \frac{\partial H^{(s)}}{\partial x} = -k(H_i^{(s)}b_i + H_j^{(s)}b_j + H_k^{(s)}b_k + H_l^{(s)}b_l), \\
v_y^{(s)} &= -k \frac{\partial H^{(s)}}{\partial y} = -k(H_i^{(s)}c_i + H_j^{(s)}c_j + H_k^{(s)}c_k + H_l^{(s)}c_l), \\
v_z^{(s)} &= -k \frac{\partial H^{(s)}}{\partial z} = -k(H_i^{(s)}d_i + H_j^{(s)}d_j + H_k^{(s)}d_k + H_l^{(s)}d_l),
\end{aligned}$$

а для функции $v^{(s)} = -k \frac{\partial H^{(s)}}{\partial n}$ целесообразно использовать краевое условие (3.44).

Пример. Рассмотрим изменение концентрации солей в случае нестационарной фильтрации подземных вод. Приведем решение задачи, описанной в §3.4, для нестационарного случая. В табл.3.5 показаны изменения концентрации солей в течение 30, 180 и 360 сут.

В данном случае напорная функция и концентрация солей изменяются соответственно по закономерностям

$$H(x, y, z, t) = H_0 - \varepsilon_0(l^2 - x^2 - y^2 + 10z^2) \cdot t,$$

$$C(x, y, z, t) = C_0 - \delta_0(l - x - y + 10z) \cdot t,$$

где $H_0 = 1000$ м, $C_0 = 10$ г/л, $\varepsilon_0 = 10^{-6}/73$, $\delta_0 = 10^{-3}/73$.

Сравнительно быстрый рост погрешности в расчете концентрации загрязняющего вещества объясняется тем, что она аккумулирует погрешности обеих задач, к тому же по результатам решения задачи фильтрации выполняется некорректная операция численного дифференцирования напорной функции.

Выводы

1. Построены и реализованы алгоритмы приближенного решения пространственных нестационарных задач фильтрации подземных вод совместно с уравнениями переноса загрязнителей МКЭ и МФ с граничными условиями общего вида.

2. Результаты решения тестовых задач показывают высокую эффективность разработанных алгоритмов, точность аппроксимации использованных методов хорошо согласуется с теоретическими оценками.

3. При решении натуральных задач о пространственных потоках подземных вод в однородных и кусочно–однородных пластах целесообразно применять метод фрагментов, при этом объем вычислений в МФ уменьшается примерно на четверть по сравнению с МКЭ, а точность аппроксимации коэффициентов СЛАУ в обоих методах имеет один и тот же порядок.

4. В объектах со сложными границами МФ следует использовать в сочетании с МКЭ, т.е. тетраэдральные элементы должны дополнять фрагменты до границ области фильтрации.

5. Разработанная методика приближенного решения пространственных задач фильтрации и солепереноса дает возможность моделировать движение напорного комплекса подземных вод совместно с грунтовым потоком в гидродинамической постановке, что максимально приблизит математическую модель к реальным природным условиям.

ГЛАВА 4

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ К ИДЕНТИФИКАЦИИ ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПОРИСТЫХ СРЕД

§4.1. Идентификация коэффициента фильтрации пористой среды

4.1.1. Об условии сопряженности краевых задач

Рассмотрим краевую задачу

$$Lh = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V, \quad (4.1)$$

$$lh = \alpha(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma = \partial V \quad (4.2)$$

и связанную с ней задачу

$$L^*h^* = p(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V, \quad (4.3)$$

$$l^*h^* = \alpha^*(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (4.4)$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta. \quad (4.5)$$

Здесь коэффициенты $k(x, y, z)$, $\beta(x, y, z)$ и правые части $f(x, y, z)$, $p(x, y, z)$, $\alpha(x, y, z)$, $\alpha^*(x, y, z)$ – заданные функции, имеющие необходимую степень гладкости в области V и на ее границе Σ . В уравнении (4.1) и в условии (4.2) коэффициенты и правые части имеют конкретную физическую интерпретацию. Например, $f(x, y, z)$ – функция, содержащая мощность

источников (вертикальных дрен) и интенсивность инфильтрации и (или) испарения; $k(x, y, z)$ – коэффициент фильтрации водоносного пласта и т.д.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \iiint_V \varphi(x, y, z) \psi(x, y, z) dv$$

Как известно, оператор L^* , сопряженный оператору L , определяется из тождества Лагранжа

$$(\varphi, L\psi) = (\psi, L^*\varphi) \quad (4.6)$$

для любых функций φ и ψ , определенных и интегрируемых с квадратом в области V .

Умножая Lh на h^* , а Lh^* – на h и трижды интегрируя полученные выражения по области V с использованием формулы Грина и вычитая из первого равенства второе, получим

$$\iiint_V h^* Lh dv - \iiint_V h Lh^* dv = \iint_{\Sigma} \left(h^* k \frac{\partial h}{\partial n} - h k \frac{\partial h^*}{\partial n} \right) d\sigma. \quad (4.7)$$

Если за оператор L^* принимать

$$L^* = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right) = L, \quad (4.8)$$

то можно увидеть, что

$$l^* = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta = l. \quad (4.9)$$

При однородных краевых условиях $\alpha \equiv 0$ и $\alpha^* \equiv 0$ и из (4.7) приходим к равенству

$$\iiint_V h^* Lh \, dv - \iiint_V h L^* h^* \, dv = \iint_{\Sigma} [h(-\beta h^*) - h^*(-\beta h)] \, d\sigma = 0,$$

т.е. операторы L и L^* совместно с однородными краевыми условиями будут сопряженными. Кроме того, из условия $L^* = L$ вытекает, что они являются самосопряженными.

Теперь из (4.1) и (4.3) образуем тождество [89]

$$\iiint_V h^* Lh \, dv - \iiint_V h L^* h^* \, dv = \iiint_V f h^* \, dv - \iiint_V hp \, dv. \quad (4.10)$$

Используя формулу Грина, из левой части (4.10) и краевых условий (4.2) и (4.4) получим

$$\iiint_V h^* Lh \, dv - \iiint_V h L^* h^* \, dv = \iint_{\Sigma} (h\alpha^* - h^*\alpha) \, d\sigma. \quad (4.11)$$

Для линейных функционалов, содержащихся в правой части равенства (4.10), используя обозначения [89]

$$J_f[h^*] = \iiint_V f h^* \, dv, \quad J_p[h] = \iiint_V p h \, dv, \quad (4.12)$$

из тождества (4.10) на основании (4.11) и (4.12) можно перейти к полезному в дальнейшем тождеству

$$J_f[h^*] - J_p[h] = \iint_{\Sigma} (h\alpha^* - h^*\alpha) \, d\sigma, \quad (4.13)$$

эквивалентному основному тождеству (4.10), которое связывает решения задач (4.1), (4.2) и (4.3), (4.4) с краевыми условиями.

Из (4.13) видно, что если в задачах (4.1) – (4.4) имеем однородные краевые условия ($\alpha = \alpha^* = 0$), то приходим к равенству

$$J_f[h^*] = J_p[h]. \quad (4.14)$$

Из (4.14) получаем полезные на практике равенства

$$J_p[h] = \iiint_V f h^* dv, \quad J_f[h^*] = \iiint_V p h dv. \quad (4.15)$$

Отсюда вытекает, что в сопряженных задачах соответствующие линейалы можно вычислить с помощью отдельных параметров и другой имеющейся информации о сопряженной к ней задаче.

4.1.2. Случай малых возмущений правой части уравнения

Пусть правые части уравнения (4.1) и краевого условия (4.2) получают малые возмущения (такая ситуация возникает, когда поле функции напора изменяется в результате отключения одной водозаборной дрены или скважины среди множества работающих скважин, а фильтрационные свойства грунта остаются неизменными) f' и α' :

$$f' = f + \delta f, \quad \alpha' = \alpha + \delta \alpha,$$

где δf и $\delta \alpha$ – соответствующие вариации. При принятом допущении краевая задача (4.1) и (4.2) переходит в краевую задачу

$$Lh' = f', \quad h' = h + \delta h, \quad (x, y, z) \in V, \quad (4.16)$$

$$lh' = \alpha', \quad (x, y, z) \in \Sigma. \quad (4.17)$$

Из (4.16) и (4.17) с учетом краевой задачи (4.1), (4.2) приходим к краевой задаче относительно вариации δh :

$$L\delta h = \delta f, \quad (x, y, z) \in V, \quad (4.18)$$

$$l\delta h = \delta \alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma. \quad (4.19)$$

Из краевых задач (4.16), (4.17) и (4.3), (4.4) образуем тождество

$$\iiint_V h^* Lh' dv - \iiint_V h' Lh^* dv = \iiint_V f' h^* dv - \iiint_V h' p dv. \quad (4.20)$$

Из левой части (4.20) аналогично (4.11) имеем

$$\iiint_V h^* Lh' dv - \iiint_V h' Lh^* dv = \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - h^* \alpha') d\sigma. \quad (4.21)$$

Введя обозначения, аналогичные (4.12)

$$J_{f'}[h^*] = \iiint_V f' h^* dv, \quad J_p[h'] = \iiint_V h' p dv, \quad (4.22)$$

с учетом (4.21) и (4.22) из (4.20) получаем равенство

$$J_{f'}[h^*] - J_p[h'] = \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - h^* \alpha') d\sigma \quad (4.23)$$

аналогичное тождеству (4.10).

Выделяя из f' , α' и h' вариации от соответствующих значений функций и используя равенство (4.11), из (4.23) приходим к уравнению относительно вариаций переменных:

$$\iiint_V p \delta h dv + \iint_{\Sigma} \alpha^* \delta h d\sigma = \iiint_V h^* \delta f dv + \iint_{\Sigma} h^* \delta \alpha d\sigma, \quad (4.24)$$

которое используется в практических вычислениях. Для вычисления вариации функции h удобно использовать тождество, созданное из краевых задач (4.16), (4.17) и (4.3), (4.4):

$$\iiint_V h^* Lh' dv - \iiint_V h Lh^* dv = \iiint_V h^* f' dv - \iiint_V h p dv. \quad (4.25)$$

С учетом равенства (4.11) преобразуем левую часть тождества (4.25):

$$\begin{aligned}
& \iiint_V h^* L h' dv - \iiint_V h L h^* dv = \iiint_V h^* L \delta h dv + \iint_{\Sigma} (h \alpha^* - h^* \alpha) d\sigma = \\
& = \iiint_V k \left(\frac{\partial \delta h}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\partial \delta h}{\partial y} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{\partial \delta h}{\partial z} \frac{\partial h^*}{\partial z} \right) dv - \\
& - \iint_{\Sigma} h^* k \frac{\partial \delta h}{\partial n} d\sigma + \iint_{\Sigma} (h \alpha^* - h^* \alpha) d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Из правой части (4.25) имеем

$$\iiint_V h^* f' dv - \iiint_V h p' dv = J_f [h^*] - J_p [h] + \iiint_V h^* \delta f' dv. \tag{4.27}$$

Из (4.25) с учетом (4.13), (4.26) и (4.27) получаем уравнение, дающее возможность вычислить поле вариации δh при известных h^* , $\delta f'$ и $\delta \alpha$:

$$\begin{aligned}
& \iiint_V k \left(\frac{\partial \delta h}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\partial \delta h}{\partial y} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{\partial \delta h}{\partial z} \frac{\partial h^*}{\partial z} \right) dv + \iint_{\Sigma} h^* \beta \delta h d\sigma = \\
& = \iiint_V h^* \delta f' dv + \iint_{\Sigma} h^* \delta \alpha d\sigma.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

4.1.3. Случай малых возмущений правой части и коэффициента уравнения

В этом пункте рассматривается случай, когда малые возмущения принимают не только правая часть уравнения, но и его коэффициент, т.е. изменяется также гидрогеологическая характеристика среды.

Итак, вместо задачи (4.1) и (4.2) имеем краевую задачу

$$L' h' = f'', \quad f'' = f' + \delta f', \quad L' = L + \delta L, \quad (x, y, z) \in V, \tag{4.29}$$

$$l' h' = \alpha'', \quad \alpha'' = \alpha' + \delta \alpha', \quad l' = l + \delta l, \quad h' = h + \delta h, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \tag{4.30}$$

где

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

$$\delta l = \delta k \frac{\partial}{\partial n} + \delta \beta.$$

Рассмотрим сопряженную задачу

$$L^* h^* = L h^* = p, \quad l h^* = \alpha^*. \quad (4.31)$$

Из (4.29) и (4.31) образуем тождество

$$\iiint_V h^* L' h' dv - \iiint_V h' L h^* dv = \iiint_V f'' h^* dv - \iiint_V p h' dv. \quad (4.32)$$

Преобразуем левую часть равенства (4.32):

$$\begin{aligned} \iiint_V h^* L' h' dv - \iiint_V h' L h^* dv &= \iiint_V h^* L h' dv - \iiint_V h' L h^* dv + \iiint_V h^* \delta L h' dv = \\ &= \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - h^* \alpha') d\sigma + \iiint_V \left[\delta k \left(\frac{\partial h'}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial y} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} \frac{\partial h^*}{\partial z} \right) \right] dv - \\ &- \iint_{\Sigma} h^* \delta k \frac{\partial h'}{\partial n} d\sigma = \iiint_V q(h', h^*) \delta k dv + \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - h^* \alpha') d\sigma - \iint_{\Sigma} h^* (\delta \alpha' - h' \delta \beta) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.33)$$

где

$$q(h', h^*) = \frac{\partial h'}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial y} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} \frac{\partial h^*}{\partial z} = q(h^*, h'). \quad (4.34)$$

Правая часть равенства (4.32) представляется в виде

$$\iiint_V f'' h^* dv - \iiint_V p h' dv = J_{f''}[h^*] - J_p[h'] + \iiint_V h^* \delta f' dv. \quad (4.35)$$

Подставляя соответствующие выражения из (4.33) и (4.35) в (4.32) и учитывая равенство (4.23), приходим к уравнению относительно δk :

$$\iiint_V q(h', h^*) \delta k \, dv = \iiint_V h^* \delta f' \, dv + \iint_{\Sigma} h^* (\delta \alpha' - h' \delta \beta) \, d\sigma. \quad (4.36)$$

Из (4.36) видно, что при заданных $\delta f'$, $\delta \alpha'$ и $\delta \beta$ и известных функциях h' и h^* можно вычислить поле вариации δk (т.е. можно оценить, насколько изменилась гидрогеологическая характеристика среды).

При решении задач идентификации основные затруднения связаны с недостаточностью информации. Это объясняется тем, что количество информации, полученное путем наблюдения и (или) измерения, ничтожно мало по сравнению с количеством той необходимой информации, в которой нуждается та или иная инженерно-мелиоративная или проектно-изыскательная работа. Кроме того, информация, получаемая путем наблюдения и измерения, стоит достаточно дорого и требует значительной затраты времени.

Для того чтобы разрешить эту сложную проблему, необходимо по возможности выявить более глубокие аналитические связи между отдельными параметрами и неизвестными функциями. По этой причине, используя свойство взаимности изучаемой и сопряженной к ней краевой задач, можно расширить круг таких аналитических выражений. Далее, не вдаваясь в подробности, поменяя ролями данную и сопряженную краевую задачу, перечислим аналитические выражения, связывающие искомые функции с другими параметрами.

4.1.4. Определение поля вариаций искомой функции

Выведем уравнения для вычисления вариаций δh^* и δk .

а) Вместо краевой задачи (4.1), (4.2) рассмотрим сопряженную задачу:

$$L^* h^{*'} = p', \quad l^* h^{*'} = \alpha^{*'}, \quad h^{*'} = h^* + \delta h^*, \quad p' = p + \delta p, \quad \alpha^{*'} = \alpha^* + \delta \alpha^*. \quad (4.37)$$

Из краевых задачи (4.37) и (4.1), (4.2) образуем тождество

$$\iiint_V h L h^{*'} dv - \iiint_V h^* L h dv = \iiint_V p' h dv - \iiint_V h^* f dv. \quad (4.38)$$

Отсюда, аналогично п.4.1.2, используя равенство (4.10), получим уравнение относительно δh^* :

$$\begin{aligned} \iiint_V k \left(\frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \delta h^*}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \delta h^*}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \delta h^*}{\partial z} \right) dv + \iint_{\Sigma} h \beta \delta h^* d\sigma = \\ = \iiint_V h \delta p dv + \iint_{\Sigma} h \delta \alpha^* d\sigma. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Итак, при вычисленных значениях h в области V и заданных β , $\delta \alpha^*$ и

δp можно вычислить поле функции δh^* .

б) Вместо краевой задачи (4.1), (4.2) рассматривается варьированная сопряженная задача

$$L' h^{*'} = p' + \delta p, \quad l' h^{*'} = \alpha^{*'} + \delta \alpha^*, \quad (4.40)$$

откуда, аналогично п.4.1.2 приходим к краевой задаче

$$\delta L h^{*'} = \delta p, \quad \delta l h^{*'} = \delta \alpha^*, \quad (4.41)$$

где

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \delta l = \delta k \frac{\partial}{\partial n} + \delta \beta. \quad (4.42)$$

Образуя равенство

$$\iiint_V hL'h^{*'} dv - \iiint_V h^{*'} Lh dv = \iiint_V h(p' + \delta p)dv - \iiint_V fh^{*'} dv \quad (4.43)$$

и учитывая равенство

$$\iint_{\Sigma} (h^{*'} \alpha - h\alpha^{*'}) d\sigma = \iiint_V hp' dv - \iiint_V fh^{*'} dv,$$

приходим к уравнению относительно δk :

$$\iiint_V q(h, h^{*'}) \delta k dv = \iiint_V h \delta p dv + \iint_{\Sigma} h(\delta \alpha^{*'} - \delta \beta h^{*'}) d\sigma. \quad (44)$$

Из этого уравнения при вычисленных значениях h , $h^{*'}$ и заданных δp , $\delta \alpha^{*'}$ и $\delta \beta$ можно найти поле вариации δk в области V .

Выведенные выше линейные функциональные уравнения при известных полях напорной и сопряженной к ней функции и приближенных значениях коэффициентов дают возможность построить поля вариаций δh , $\delta h^{*'}$ и δk . Кроме того, цепочки получаемых при этом уравнений линеаризуют нелинейную задачу (при неизвестном коэффициенте $k(x,y,z)$) и одновременно дают возможность разрешить некорректно поставленную задачу с помощью регуляризирующих операторов.

Необходимо сделать следующее замечание. Из уравнении (4.28) и (4.39), выписанных относительно вариаций h и $h^{*'}$, явно видна их взаимность (одно из них вытекает из другого путем замены соответствующих параметров). То же самое можно утверждать относительно уравнений (4.36) и (4.44), дающих возможность построить поле δk . Но эти взаимозаменяемые уравнения по удобству реализации могут существенно различаться. К примеру, обратимся к уравнениям (4.28) и (4.39). Если известно приближенное значение поля $k(x,y,z)$ и вычислено поле $h^{*'}$, то из (4.28) можно вычислить поле δh . С точки зрения экономичности этот алгоритм равносильен алгоритму, вычисляющему δk из (4.44) при известных

соответствующих коэффициентах. Однако на практике определить δf и $\delta \alpha$ для краевой задачи (4.18) и (4.19) куда сложнее, чем адекватно задавать в (4.39) соответствующие δp и $\delta \alpha^*$ (это объясняется тем, что на практике величины δf и $\delta \alpha$ остаются неизвестными, а δp и $\delta \alpha^*$ можно задавать). Относительно экономичности и удобства алгоритмов, вытекающих из уравнений (4.36) и (4.44), также приходим к аналогичной ситуации.

4.1.5. Алгоритмы, реализующие цепочки уравнений на ЭВМ

Наша конечная цель заключается в вычислении поля коэффициента фильтрации $k(x,y,z)$ при наличии приближенных значений $k^{(0)}(x,y,z)$, полученных путем наблюдений и измерений.

Пусть процесс приближенно описывается с помощью краевой задачи (4.1) и (4.2) при приближенных значениях $k(x,y,z) \approx k^{(0)}(x,y,z)$, $f(x,y,z) \approx f^{(0)}(x,y,z)$ и т.д. Решая задачу (4.1), (4.2) при заданных значениях этих параметров, вычислим поле напорной функции $h^{(0)}$. Цепочки представленных уравнений показывают, что для этой цели удобным будет метод конечных элементов.

Итак, для численной реализации краевой задачи (4.1), (4.2) с помощью МКЭ, область V разбивается на m тетраэдральных элементов. Пусть количество узлов будет n . Тогда решение краевой задачи ищется в виде

$$h_n(x,y,z) = \sum_{i=1}^n h_i N_i(x,y,z), \quad (4.45)$$

где $h_i = h(x_i, y_i, z_i)$ – неизвестные коэффициенты, $N_i(x,y,z)$ – линейные базисы в МКЭ.

С помощью обобщенного метода Галеркина краевая задача (4.1), (4.2) представляется в виде

$$\iiint_V N_j(x,y,z)(Lh_n - f)dv = -\iint_{\Sigma} N_j(x,y,z)(lh_n - \alpha)d\sigma, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (4.46)$$

Используя формулу Грина, из (4.46) приходим к СЛАУ

$$\begin{aligned} & \iiint_V k \left(\frac{\partial h_n}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial h_n}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial h_n}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv + \iint_{\Sigma} N_j \beta h_n d\sigma = \\ & = \iiint_V N_j f(x,y,z) dv + \iint_{\Sigma} N_j \alpha(x,y,z) d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.47)$$

СЛАУ размерности $n \times n$ относительно n искомым коэффициентов h_i из (4.47) дает возможность вычислить h_i ($i=1,2,\dots,n$), т.е. построить поле функции $h_n(x,y,z)$, тем самым будет построено нулевое приближение $h^{(0)}$ искомой функции $h(x,y,z)$. Приближенное решение краевой задачи (4.1) и (4.2) будет слабым (или обобщенным) решением, удовлетворяющим заданным условиям гладкости для известных параметров.

Совершенно аналогично из краевой задачи (4.3), (4.4) можно вычислить поле сопряженной функции h^* . Процедуру, вычисляющую поля функций h и h^* при заданных краевых условиях, назовем первыми двумя шагами при идентификации коэффициента $k(x,y,z)$ краевых задач соответственно.

Третий шаг вычислительной процедуры состоит из вычисления вариаций δh из (4.18) и (4.19) при заданных δf и $\delta \alpha$. Как видно из постановки, поле вариации δh вычисляется МКЭ совершенно аналогично. С этой целью δh следует искать приближенно в виде

$$\delta h_n = \sum_{i=1}^n \delta h_i N_i(x, y, z), \quad (4.48)$$

где $\delta h_i = \delta h(x_i, y_i, z_i)$ – искомый коэффициент.

Теперь несколько слов о характере СЛАУ, полученной с помощью МКЭ. СЛАУ, определяющие неизвестные коэффициенты h_i , h_i^* и δh_i , будут хорошо обусловленными, обладающими симметрией и диагональным преобладанием и легко решаются методом Гаусса или экономичными итерационными методами (типа релаксации и др.).

Следующий шаг вычислительной процедуры связан с вычислением δk . С этой целью, исходя из уравнений (4.29) и (4.30) с учетом (4.16), (4.17) приходим к возмущенному уравнению

$$\delta Lh' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta k \frac{\partial h'}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta k \frac{\partial h'}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta k \frac{\partial h'}{\partial z}\right) = \delta f', \quad (x,y,z) \in V \quad (4.49)$$

с возмущенным граничным условием

$$\delta h' = \delta k \frac{\partial h'}{\partial n} + \delta \beta h' = \delta \alpha', \quad (x,y,z) \in \Sigma. \quad (4.50)$$

Решение задачи (4.49) и (4.50) ищем в виде

$$\delta k_n = \sum_{i=1}^n \delta k_i N_i(x, y, z), \quad (4.51)$$

где $\delta k_i = \delta k(x_i, y_i, z_i)$, i – номер узла.

Используя обобщенный принцип Галеркина для невязок, имеем

$$\iiint_V (\delta Lh'_n - \delta f') N_j dv = -\iint_{\Sigma} (\delta h'_n - \delta \alpha') N_j d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя (4.51) в невязки, полученные из (4.49) и (4.50), приходим к СЛАУ размерности $n \times n$ относительно δk_i :

$$\sum_{i=1}^n \left(\iiint_V N_i q(h', N_j) dv \right) \delta k_i = \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - \delta \beta h') d\sigma + \iiint_V N_j \delta f' dv, \quad (4.52)$$

где

$$q(h', N_j) = \frac{\partial h'}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial h'}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial h'}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.53)$$

Матрица системы (4.52) будет разреженной, без симметрии и с частичным диагональным преобладанием. Она при умеренных значениях n (до 200) остается хорошо обусловленной. Поэтому она легко решается с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента (либо другими итерационными методами).

Итак, характер некорректности изучаемой краевой задачи в некоторой ослабленной форме проявляется при реализации (4.52). Поэтому при $n > 200$ следует проверить матрицу системы на обусловленность с помощью сингулярного разложения (*SVD*) [183] и попытаться найти нормальное решение системы.

Несколько слов о выведенных выше тождествах относительно функций h , h^* , δh и др.

Возвращаемся к тождеству (4.13) с учетом обозначений (4.12). Оно связывает параметры сопряженных уравнений относительно h и h^* .

Достоверность вычисленного поля функции напора h можно проверить путем сопоставления данных наблюдений (измерений). Параметры для них берутся субъективно. Поэтому правильность вычисленных значений h и h^* в зависимости от остальных параметров следует из проверки тождества (4.10). Тождество (4.23) может выполнить аналогичную роль относительно h' и h^* .

Интегральное уравнение (4.28), в принципе, дает возможность вычислить δh . Однако, удобнее найти $\delta h_n \approx \delta h$ из (4.18) и (4.19) обобщенным принципом Галеркина, чем из (4.28), а уравнение (4.28) целесообразно использовать для проверки правильности полученного решения δh_n . Относительно δk возникает такая же ситуация. Приближенное решение

$\delta k \approx \delta k_n$ вычисляется из (4.52), а (4.36) используется для проверки правильности полученного решения или для останова итерационной процедуры.

Теперь мы подготовлены к завершению предложенной вычислительной процедуры, приводящей к конечной цели – к идентификации коэффициента $k(x, y, z)$ краевой задачи (4.2).

Поскольку решаемая проблема существенно нелинейна, для того чтобы начать итерационную процедуру не выходя из той ветви, в которой мы ищем решение задачи, необходимо задать начальное приближение коэффициента $k^{(0)}$. Для этого в предложенном алгоритме необходимо иметь экспериментальные значения этого коэффициента в r точках:

$$k^{(0)}(x_j, y_j, z_j) = k_j^0, \quad j=1, 2, \dots, r. \quad (4.54)$$

Дополнительное условие (4.54) назовем внутренним условием [48].

Шаг 1. Располагая точки (x_j, y_j, z_j) , в которых задаются условия (4.54), в узлах сетки, построим начальное приближение коэффициента в виде [48]

$$k_n^{(0)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n k_i^{(0)} N_i(x, y, z), \quad (4.55)$$

где $k_i^{(0)} = k^{(0)}(x_i, y_i, z_i)$, $N_i(x, y, z)$ – линейные базисы в МКЭ. Понятно, что в тех узлах, где задаются условия (4.54), $k_n^{(0)}(x, y, z)$ принимает значение k_j^0 , а в остальных узлах сетки – средние значения, лежащие между $\min_j k_j^0$ и $\max_j k_j^0$.

Итак, за начальное приближение искомого коэффициента $k(x, y, z)$ принимаем $k_n^{(0)}$ из (4.55) и решая краевую задачу (4.1), (4.2), находим функцию $h_n^{(0)}$ – начальное приближение искомой функции.

Шаг 2. Решив краевую задачу (4.3), (4.4) при том же коэффициенте $k_n^{(0)}$, находим $h_n^{*(0)}$ – начальное приближение сопряженной краевой задачи.

Шаг 3. Решая СЛАУ, вытекающую из (4.18) и (4.19), обобщенным принципом Галеркина находим вариацию δh в виде (4.48) и образуем функцию

$$h'(x,y,z) = h^{(0)}(x,y,z) + \delta h(x,y,z).$$

Шаг 4. При найденных значениях h' и h^* вычислим δk из СЛАУ (4.52). Вариация коэффициента $k(x,y,z)$ ищется в виде (4.51). После нахождения δk образуется первое приближение коэффициента по формуле

$$k_n^{(1)}(x,y,z) = k_n^{(0)}(x,y,z) + \delta k_n(x,y,z).$$

Шаг 5. Подставляя $k_n^{(1)}$ в (4.47), находим $h_n^{(1)}$, т.е. повторяем шаг 1. Далее, повторяя шаги 2, 3 и 4, находится $k_n^{(2)}$. По всем n узлам проверяется условие

$$\max_i |k_i^{(2)} - k_i^{(1)}| < \varepsilon, \quad (4.56)$$

где ε – заданное малое число.

Если выполняется условие (4.56), то на нескольких поперечных сечениях l_i, l_j, \dots, l_s потока с учетом работы вертикальных дрен вычисляется расход жидкости по формуле

$$Q_{l_r}^{(1)} = \int_{l_r} k_{n,r}^{(1)} \frac{\partial h_n^{(1)}}{\partial n} ds, \quad r = i, j, \dots, s, \quad (4.57)$$

где n – единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности, направленной по течению потока; ds – элементарная длина дуги l_r . Далее проверяется выполнение условия

$$\max \left\{ \frac{|Q_{l_i}^{(1)} - Q_{l_j}^{(1)}|}{Q_m^{(1)}}, \frac{|Q_{l_i}^{(1)} - Q_{l_k}^{(1)}|}{Q_m^{(1)}}, \dots, \frac{|Q_{l_i}^{(1)} - Q_{l_s}^{(1)}|}{Q_m^{(1)}} \right\} < \delta. \quad (4.58)$$

Здесь $Q_m^{(1)}$ – величина, равная максимальному из $|Q_{l_i}^{(1)}|, |Q_{l_j}^{(1)}|, \dots, |Q_{l_s}^{(1)}|$; δ – заданное малое положительное число. При выполнении условия (4.58) итерационная процедура останавливается и за поля искомой функции и коэффициента берутся соответственно

$$h(x,y,z) \approx h_n^{(2)}(x,y,z) \text{ и } k(x,y,z) \approx k_n^{(2)}(x,y,z).$$

Если это условие не выполняется, то итерационная процедура продолжается начиная с шага 1 до выполнения условий (4.58).

В работе [48] предложен ряд экономичных алгоритмов, восстанавливающих коэффициент k , но они существенно опирались на специфические свойства математической модели изучаемого объекта и носили частный характер. Изложенная здесь вычислительная процедура требует 1,5 – 2 раза больше машинного времени и значительную память ЭВМ. Однако она достаточно универсальна, поскольку существенно уменьшает неопределенность, возникающую при формулировке некорректно поставленных задач.

§4.2. Идентификация гидрогеологических параметров среды в нестационарных течениях подземных вод

4.2.1. Вывод начального условия для сопряженного уравнения

Рассмотрим сопряженные уравнения нестационарной фильтрации. Как известно, нестационарная пространственная фильтрация несжимаемой жидкости в неоднородной пористой среде при определенных упрощающих допущениях моделируется линейным уравнением параболического типа [154]

$$\Delta h = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0) \quad (4.59)$$

с начальным

$$h(x, y, z, 0) = h_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V \quad (4.60)$$

и краевым

$$lh = \alpha(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Sigma = \partial V, \quad t \in (0, T_0) \quad (4.61)$$

условиями.

Здесь

$$A = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta,$$

$h(x, y, z, t)$ – функция напора; $k(x, y, z)$ – коэффициент фильтрации пласта; $\mu(x, y, z)$ – упругая водоотдача; $f(x, y, z, t)$ – заданная функция, характеризующая работу водозаборов с учетом инфильтрации и испарения; $h_0(x, y, z)$, $\beta(x, y, z, t)$ и $\alpha(x, y, z, t)$ – заданные функции. На известные данные и границы области налагаются обычные условия гладкости, обеспечивающие существование единственного обобщенного решения из пространства $W_2^{(1)}$.

Как и в работе [54], можно показать, что уравнением, сопряженным уравнению (4.59) с краевым условием (4.61), будет следующее уравнение относительно функции h^* :

$$A^* h^* = p(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0) \quad (4.62)$$

с краевым условием

$$l^* h^* = lh^* = \alpha^*(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0), \quad (4.63)$$

где

$$\Lambda^* = -\mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l^* = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta. \quad (4.64)$$

Аналогично [54] образуем выражение

$$\iiint_V h^* \Lambda h dv - \iiint_V h \Lambda^* h^* dv = \iiint_V h^* f dv - \iiint_V p h dv. \quad (4.65)$$

Используя обозначение

$$\Lambda = T + L, \quad (4.66)$$

где

$$T = \mu \frac{\partial}{\partial t}, \quad L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (4.67)$$

преобразуем левую часть (4.65):

$$\begin{aligned} & \iiint_V h^* \mu \frac{\partial h}{\partial t} dv + \iiint_V h \mu \frac{\partial h^*}{\partial t} dv + \iiint_V h^* L h dv - \iiint_V h L h^* dv = \\ & = \iiint_V \mu \frac{\partial (h h^*)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Правая часть (4.68) преобразуется в тождество, верное при всех $t \in (0, T_0)$:

$$\iiint_V \mu \frac{\partial (h h^*)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma = J_f [h^*] - J_p [h], \quad (4.69)$$

где

$$J_f [h^*] = \iiint_V f h^* dv, \quad J_p [h] = \iiint_V p h dv.$$

Необходимо иметь «начальное» условие для сопряженной задачи (4.62), (4.63), которая, как видно из ее формулировки, является ретроспективной, то есть задачей с обратным течением времени.

Проинтегрируем уравнение (4.69) по t на интервале $(0, T_0)$:

$$\int_0^{T_0} \left[\iiint_V \mu \frac{\partial(hh^*)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma \right] dt = \int_0^{T_0} \{J_f[h^*] - J_p[h]\} dt. \quad (4.70)$$

Упрощая первое интегральное выражение в левой части равенства (4.70), получим

$$\int_0^{T_0} dt \iiint_V \mu \frac{\partial(hh^*)}{\partial t} dv = \iiint_V \mu \left(\int_0^{T_0} \frac{\partial(hh^*)}{\partial t} dt \right) dv = \iiint_V \mu(hh^*) \Big|_{t=0}^{t=T_0} dv = \iiint_V \mu(h_{T_0} h_{T_0}^* - h_0 h_0^*) dv, \quad (4.71)$$

где

$$h_{T_0} = h(x, y, z, T_0), \quad h_{T_0}^* = h^*(x, y, z, T_0), \quad h_0 = h(x, y, z, 0), \quad h_0^* = h^*(x, y, z, 0).$$

Полагая, что имеет место равенство

$$h_{T_0} h_{T_0}^* - h_0 h_0^* = 0, \quad (4.72)$$

получаем

$$h_{T_0}^* = h^*(x, y, z, T_0) = \frac{h_0 h_0^*}{h_T}. \quad (4.73)$$

Здесь возможны 2 случая:

а) при заданном $h_0^* = h^*(x, y, z, 0)$ за «начальное» условие для ретроспективной задачи можно задать условие (4.73);

б) поскольку начальное условие для задачи (4.62),(4.63) задается произвольно, то для простоты можно полагать $h_0^* = 0$, тогда за “начальное”, согласно (4.72), можно брать условие

$$h_{T_0}^* = h^* \Big|_{t=T_0} = 0. \quad (4.74)$$

Итак, используя равенства (4.72) и (4.71), из (4.70) получим

$$\int_0^{T_0} \{J_f[h^*] - J_p[h]\} dt = \int_0^{T_0} \iint_{\Sigma} (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma dt. \quad (4.75)$$

Аналогично, при любом $\tau \in (0, T_0)$ из (4.70), после интегрирования на интервале $(0, \tau)$ с использованием условия (4.73) имеем равенство

$$\iiint_V \mu(h_{\tau} h_{\tau}^* - h_0 h_0^*) dv + \int_0^{\tau} dt \iint_{\Sigma} (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma = \int_0^{\tau} \{J_f[h^*] - J_p[h]\} dt. \quad (4.76)$$

4.2.2. Уравнение относительно вариации функции

Как и в [54] выведем равенство, полезное для практических расчетов. При варьировании правой части $f' = f + \delta f$ из (4.59) функция h также варьируется: $h' = h + \delta h$. Тогда относительно вариации функции h приходим к уравнению

$$A\delta h = T\delta h + L\delta h = \delta f \quad (4.77)$$

и краевому условию

$$l\delta h = k \frac{\partial \delta h}{\partial n} + \beta \delta h = \delta \alpha. \quad (4.78)$$

Итак, рассматривается краевая задача

$$\Lambda h' = f', \quad lh' = \alpha', \quad \Lambda = T + L \quad (4.79)$$

и сопряженная к ней краевая задача

$$\Lambda^* h^* = p, \quad l^* h^* = lh^* = \alpha^*, \quad \Lambda^* = -T + L. \quad (4.80)$$

Как и в [54], образуем тождество

$$\iiint_V h^* \Lambda h' dv - \iiint_V h' \Lambda^* h^* dv = \iiint_V h^* f' dv - \iiint_V p h' dv$$

и после упрощения приходим к тождеству

$$\iiint_V \mu \frac{\partial(h' h^*)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - \alpha' h^*) d\sigma = J_{f'}[h^*] - J_p[h'], \quad (4.81)$$

где

$$J_{f'}[h^*] = \iiint_V h^* f' dv, \quad J_p[h'] = \iiint_V h' p dv. \quad (4.82)$$

Имея в виду, что

$$J_{f'}[h^*] - J_p[h'] = J_f[h^*] - J_p[h] + \iiint_V h^* \delta f dv - \iiint_V p \delta h dv,$$

а также равенство (4.59) и равенство

$$\iiint_V \mu \frac{\partial(h' h^*)}{\partial t} dv = \iiint_V \mu \frac{\partial(h h^*)}{\partial t} dv + \iiint_V \mu \frac{\partial(h^* \delta h)}{\partial t} dv,$$

из (4.81) приходим к функциональному уравнению относительно вариации

$$\iiint_V \mu \frac{\partial(h^* \delta h)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} (\delta h \alpha^* - h^* \delta \alpha) d\sigma = \iiint_V h^* \delta f dv - \iiint_V p \delta h dv \quad (4.83)$$

при всех $t \in (0, T_0)$.

Легко видеть, что тождества (4.69), (4.81) и (4.83) по содержанию аналогичны, хотя они написаны относительно h , h' и δh . Из-за симметричности сопряженных функций h и h^* можно предположить, что аналогичные тождества имеют место также относительно функций h^* , $h^{* \prime}$ и δh^* .

Используя краевые задачи (4.79) и (4.80), образуем выражение

$$\iiint_V h^* \Lambda h' dv - \iiint_V h \Lambda^* h^* dv = \iiint_V f' h^* dv - \iiint_V h p dv. \quad (4.84)$$

Упрощая левую часть тождества, имеем

$$\begin{aligned} \iiint_V h^* T h' dv - \iiint_V h T^* h^* dv &= \iiint_V h^* \mu \frac{\partial h}{\partial t} dv + \iiint_V h^* \mu \frac{\partial \delta h}{\partial t} dv + \\ + \iiint_V h \mu \frac{\partial h^*}{\partial t} dv &= \iiint_V h^* \mu \frac{\partial \delta h}{\partial t} dv + \iiint_V \mu \frac{\partial (h h^*)}{\partial t} dv \end{aligned} \quad (4.85)$$

и на основании (4.68)

$$\begin{aligned} \iiint_V h^* L h' dv - \iiint_V h L h^* dv &= \iiint_V h^* L \delta h dv + \iiint_V h^* L h dv - \iiint_V h L h^* dv = \\ &= \iiint_V h^* L \delta h dv + \iint_{\Sigma} (h \alpha^* - h^* \alpha) d\sigma = \\ &= \iiint_V q(\delta h; h^*) k dv - \iint_{\Sigma} h^* (\delta \alpha - \beta \delta h) d\sigma + \iint_{\Sigma} (h \alpha^* - h^* \alpha) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.86)$$

где

$$q(\delta h; h^*) = \frac{\partial \delta h}{\partial x} \frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\partial \delta h}{\partial y} \frac{\partial h^*}{\partial y} + \frac{\partial \delta h}{\partial z} \frac{\partial h^*}{\partial z} = q(h^*; \delta h). \quad (4.87)$$

Теперь преобразуем правую часть тождества (4.84):

$$\iiint_V h^* f' dv - \iiint_V h p dv = J_f [h^*] - J_p [h] + \iiint_V h^* \delta f dv. \quad (4.88)$$

Подставляя выражения (4.88), (4.85), (4.86) в тождество (4.84) и учитывая (4.69), приходим к уравнению относительно вариации δh :

$$\iiint_V h^* \mu \frac{\partial \delta h}{\partial t} dv + \iiint_V q(\delta h; h^*) k dv + \iint_{\Sigma} h^* \beta \delta h d\sigma = \iiint_V h^* \delta f dv + \iint_{\Sigma} h^* \delta \alpha d\sigma, \quad (4.89)$$

где q – симметричный относительно своих аргументов оператор, определенный по формуле (4.87).

Итак, мы получили линейное интегро-дифференциальное уравнение относительно вариации δh для всех $t \in (0, T_0)$, при известной h^* и заданных k , δf и $\delta \alpha$. Не ущемляя общности, за начальное условие для (4.89) можно взять

$$\delta h(x, y, z, 0) = \delta h_0(x, y, z) = 0. \quad (4.90)$$

4.2.3. Уравнения для вариаций параметров и сопряженной функции

Рассмотрим сопряженные краевые задачи

$$\Lambda' h' = f', \quad l' h' = \alpha', \quad \Lambda' = T + L' = T + L + \delta L, \quad (4.91)$$

$$\Lambda^* h^* = p, \quad l^* h^* = l h^* = \alpha^*, \quad \Lambda^* = L^* - T = L^* + T^*. \quad (4.92)$$

Из (4.91) и (4.92) образуем равенство

$$\iiint_V h^* \Lambda' h' dv - \iiint_V h' \Lambda^* h^* dv = \iiint_V h^* f' dv - \iiint_V h' p dv. \quad (4.93)$$

Учитывая равенства

$$\iiint_V h^* T h' dv - \iiint_V h' T^* h^* dv = \iiint_V (h^* \mu \frac{\partial h'}{\partial t} + h \mu \frac{\partial h^*}{\partial t}) dv = \iiint_V \mu \frac{\partial (h' h^*)}{\partial t} dv, \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_V h^* L' h' dv - \iiint_V h' L^* h^* dv = \\
& = \iiint_V q(h'; h^*) \delta k dv + \iint_{\Sigma} h^* h' \delta \beta d\sigma - \iint_{\Sigma} h^* \delta \alpha d\sigma + \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - \alpha' h^*) d\sigma, \quad (4.95) \\
& \iiint_V h^* f' dv - \iiint_V h' p dv = J_{f'}[h^*] - J_p[h']
\end{aligned}$$

и равенство (4.69), из (4.93) приходим к уравнению

$$\iiint_V q(h'; h^*) \delta k dv = \iint_{\Sigma} h^* (\delta \alpha - h' \delta \beta) d\sigma \quad (4.96)$$

для вычисления вариации δk в области V (при известных h' , h^* и заданных $\delta \beta$ и $\delta \alpha$).

Теперь выведем уравнение относительно $\delta \mu$. Пусть $\mu' = \mu + \delta \mu$, т.е. величина μ варьируется на $\delta \mu$, тогда функция h изменится на величину δh , то есть $h' = h + \delta h$.

Рассмотрим краевые задачи

$$(T' + L)h' = f'', \quad lh' = \alpha', \quad f'' = f' + \delta f', \quad (4.97)$$

$$A^* h^* = (T^* + L)h^* = p, \quad lh^* = \alpha^*, \quad (\delta T h' = \delta f') \quad (4.98)$$

и образуем равенство

$$\iiint_V h^* (Th' + Lh') dv - \iiint_V h' A^* h^* dv = \iiint_V h^* f'' dv - \iiint_V p h' dv. \quad (4.99)$$

Проведем упрощения в левой части равенства (4.99):

$$\iiint_V h^* Th' dv - \iiint_V h' T^* h^* dv = \iiint_V \mu \frac{\partial(h' h^*)}{\partial t} dv + \iiint_V h^* \delta \mu \frac{\partial h'}{\partial t} dv, \quad (4.100)$$

$$\iiint_V h^* Lh' dv - \iiint_V h' L^* h^* dv = \iint_{\Sigma} (\alpha^* h' - \alpha' h^*) d\sigma. \quad (4.101)$$

В правой части (4.99) имеем

$$\iiint_V h^* f'' dv - \iiint_V p h' dv = \iiint_V h^* \delta f' dv + J_{f'}[h^*] - J_p[h']. \quad (4.102)$$

Подставляя (4.100)-(4.102) в (4.99) и учитывая формулу (4.81), получаем

$$\iiint_V h^* \frac{\partial h'}{\partial t} \delta \mu dv = \iiint_V h^* \delta f'' dv, \quad (4.103)$$

что дает (в принципе) возможность вычислить вариацию $\delta \mu$ при известных h^* , h' и заданной $\delta f'$ для всех $t \in (0, T_0)$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно вариаций параметров сопряженной краевой задачи, кратко изложим вывод некоторых весьма полезных уравнений для тех или иных вариаций. Рассмотрим сопряженные начально-краевые задачи

$$\Lambda h = f, \quad l h = \alpha, \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta, \quad T = \mu \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.104)$$

$$\Lambda^* h^{*'} = p', \quad l^* h^{*'} = \alpha^{*'}, \quad h^{*'} = h^* + \delta h^*, \quad \alpha^{*'} = \alpha^* + \delta \alpha^*, \quad p' = p + \delta p, \quad (4.105)$$

где

$$\Lambda = T + L, \quad \Lambda, = -T + L, \quad L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (4.106)$$

Из (4.104) и (4.105) образуем тождество

$$\iiint_V h \Lambda^* h^{*'} dv - \iiint_V h^* \Lambda h dv = \iiint_V p' h dv - \iiint_V h^* f dv. \quad (4.107)$$

Упрощая равенство (4.107), имеем:

$$\iiint_V h \left(-\mu \frac{\partial h^{*'}}{\partial t} \right) dv - \iiint_V h^{*'} \mu \frac{\partial h}{\partial t} dv = -\iiint_V \mu \frac{\partial (hh^{*'})}{\partial t} dv - \iiint_V h\mu \frac{\partial \delta h^{*'}}{\partial t} dv, \quad (4.108)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V hLh^{*'} dv - \iiint_V h^{*'} Lhdv &= \iiint_V kq(\delta h^{*'}; h)dv - \iint_{\Sigma} h(\delta\alpha^{*'} - \beta\delta h^{*'})d\sigma + \\ &+ \iint_{\Sigma} (\alpha h^{*'} - h\alpha^{*'})d\sigma, \end{aligned} \quad (4.109)$$

$$\iiint_V p'hdv - \iiint_V h^{*'}fdv = J_p[h] - J_f[h^{*'}] + \iiint_V h\delta p dv. \quad (4.110)$$

Подставляя (4.108) - (4.110) в (4.107) и учитывая равенство (4.69), получаем

$$- \iiint_V h\mu \frac{\partial \delta h^{*'}}{\partial t} dv + \iiint_V kq(\delta h^{*'}; h)dv - \iint_{\Sigma} h(\delta\alpha^{*'} - \beta\delta h^{*'})d\sigma = \iiint_V h\delta p dv,$$

или

$$- \iiint_V h\mu \frac{\partial \delta h^{*'}}{\partial t} dv + \iiint_V kq(\delta h^{*'}; h)dv + \iint_{\Sigma} h\beta\delta h^{*'}d\sigma = \iiint_V h\delta p dv + \iint_{\Sigma} h\delta\alpha^{*'}d\sigma. \quad (4.111)$$

Не ущемляя общности, при однородном “начальном” условии

$$\delta h^{*'}(x, y, z, T_0) = 0 \quad (4.112)$$

и заданных $\mu, k, \beta, h, \delta p$ и $\delta\alpha^{*'}$ можно найти $\delta h^{*'}$ в области V .

4.2.4. Другие уравнения для вариаций параметров

Выведем уравнения относительно вариаций коэффициента фильтрации и упругой водоотдачи, равносильные уравнениям (4.69) и (4.105). Рассмотрим краевые задачи

$$L^{*'}h^{*'} = p', \quad l^{*'}h^{*'} = l'h^{*'} = \alpha^{*'}, \quad p' = p + \delta p, \quad \alpha^{*'} = \alpha^{*'} + \delta\alpha^{*'}, \quad (4.113)$$

$$\Lambda h = f, \quad lh = \alpha, \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta, \quad (4.114)$$

где

$$\Lambda^* h' = -T + L' = -T + L + \delta L, \quad l' = l + \delta l, \quad \Lambda = T + L. \quad (4.115)$$

Варьированная краевая задача, соответствующая (4.113), имеет вид

$$\delta L h^* = \delta p, \quad \delta h^* = \delta \alpha^*. \quad (4.116)$$

Составим тождество

$$\iiint_V h \Lambda^* h^* dv - \iiint_V h^* \Lambda h dv = \iiint_V p' h dv - \iiint_V f h^* dv \quad (4.117)$$

и проведем упрощения в (4.117):

$$\iiint_V h \left(-\mu \frac{\partial h^*}{\partial t} \right) dv - \iiint_V h^* \mu \frac{\partial h}{\partial t} dv = -\iiint_V \mu \frac{\partial (h h^*)}{\partial t} dv, \quad (4.118)$$

$$\begin{aligned} & \iiint_V h (L + \delta L) h^* dv - \iiint_V h^* L h dv = \\ & = \iiint_V q(h; h^*) \delta k dv + \iint_{\Sigma} (\alpha h^* - \alpha^* h) d\sigma - \iint_{\Sigma} h (\delta \alpha^* - \delta \beta h^*) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.119)$$

$$\iiint_V p' h dv - \iiint_V f h^* dv = J_{p'}[h] - J_f[h^*]. \quad (4.120)$$

Подставляя формулы (4.118)-(4.120) в (4.117) и учитывая, что

$$-\iiint_V \mu \frac{\partial (h^* h)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} (\alpha h^* - \alpha^* h) d\sigma = J_{p'}[h] - J_f[h^*], \quad (4.121)$$

приходим к уравнению относительно δk :

$$\iiint_V q(h; h^{*'}) \delta k dv = \iint_{\Sigma} h(\delta \alpha^{*'} - \delta \beta h^{*'}) d\sigma \quad (4.122)$$

для любого $t \in (0, T_0)$. Используя вычисленные значения функций h , $h^{*'}$ и заданные значения $\delta \alpha^{*'}$ и $\delta \beta$, можно вычислить вариацию δk в области V .

Для составления уравнения относительно $\delta \mu$ рассмотрим краевые задачи

$$\tilde{A}^{*'} h^{*'} = p'', \quad l^{*'} h^{*'} = l h^{*'} = \alpha^{*'}, \quad (4.123)$$

$$A h = f, \quad l h = \alpha, \quad (4.124)$$

где

$$\tilde{A}^{*'} = -T - \delta T + L, \quad A = T + L, \quad T = \mu \frac{\partial}{\partial t}, \quad p'' = p' + \delta p'$$

и составим тождество

$$\iiint_V h \tilde{A}^{*'} h^{*'} dv - \iiint_V h^{*'} A h dv = \iiint_V p'' h dv - \iiint_V f h^{*'} dv. \quad (4.125)$$

Проведем упрощающие преобразования в (4.125):

$$\iiint_V h(-T - \delta T) h^{*'} dv - \iiint_V h^{*'} T h dv = - \iiint_V \mu \frac{\partial(h^{*'} h)}{\partial t} dv - \iiint_V h \frac{\partial h^{*'}}{\partial t} \delta \mu dv, \quad (4.126)$$

$$\iiint_V h L h^{*'} dv - \iiint_V h^{*'} L h dv = \iint_{\Sigma} (\alpha h^{*'} - h \alpha^{*'}) d\sigma, \quad (4.127)$$

$$\iiint_V p'' h dv - \iiint_V f h^{*'} dv = J_{p'}[h] - J_f[h^{*'}] + \iiint_V h \delta p' dv. \quad (4.128)$$

Подставляя (4.126)-(4.128) в (4.125) и используя равенство (4.121), получаем уравнение относительно $\delta \mu$:

$$-\iiint_V h \frac{\partial h^{*'}}{\partial t} \delta\mu \, dv = \iiint_V h \delta p' \, dv, \quad (4.129)$$

верное при любом $t \in (0, T_0)$. Если вычислены значения функций h и $h^{*'}$ и известна величина $\delta p'$, то можно (в принципе) вычислить поле вариаций $\delta\mu$ в области V .

Как и в стационарном случае, с помощью теории сопряженных дифференциальных уравнений нелинейная проблема идентификации сводится к решению цепочки линейных уравнений относительно вариаций искомых параметров, разрешаемых с помощью регуляризирующих (или квазирегуляризирующих) операторов. Отметим, что взаимность уравнений, выписанных относительно искомой или сопряженной к ней функции, очевидна из вышеизложенного.

4.2.5. Алгоритм численной реализации полученных уравнений

Переходим к проблеме численной реализации выведенных уравнений относительно искомой функции напора.

Прежде чем приступить к решению проблемы идентификации гидрогеологических параметров среды (вычисление k и μ), следует при приближенно известных значениях коэффициентов вычислить поля функции напора h и сопряженной ей функции h^* . Поскольку они находятся с помощью одного и того же приближенного метода, основанного на обобщенном принципе Галеркина с применением метода конечных элементов [48], кратко изложим последовательность счета.

Допустим, что в области V известны приближенные значения $\mu^{(0)}(x, y, z)$ и $k^{(0)}(x, y, z)$ и необходимо решить уравнение (4.59) при

заданных в начальном (4.60) и краевом (4.61) условиях. Решение задачи (4.59) – (4.61) ищется в виде

$$h_n(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n h_i(t) N_i(x, y, z), \quad (4.130)$$

где $h_i(t)$ - неизвестный коэффициент, $N_i(x, y, z)$ - линейные базисы конечных элементов, относящиеся к узлу i .

Согласно обобщенному принципу Галеркина, используя разложение (4.130), образуем взвешенную невязку

$$\iiint_V (A h_n - f) N_j dv = - \iint_{\Sigma} (l h_n - \alpha) N_j d\sigma, \quad j=1, 2, \dots, n. \quad (4.131)$$

После интегрирования с применением формулы Грина, из равенства (4.131) имеем n уравнений

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[N_j \mu \frac{\partial h_n}{\partial t} + k \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial h_n}{\partial z} \right) \right] dv + \iint_{\Sigma} \beta h_n N_j d\sigma = \\ & = \iiint_V f N_j dv + \iint_{\Sigma} \alpha N_j d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.132)$$

Подставляя вместо h_n ее разложение из (4.130) в (4.132), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $dh_i(t)/dt$. Из начального условия (4.60) образуем (по количеству узлов в области V) n начальных условий $h_i(t)|_{t=0} = h_i^{(0)}$. Таким образом, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $dh_i(t)/dt$ ($i = 1, 2, \dots, n$) имеем задачу Коши для системы n уравнений, которая, в свою очередь, на основании схемы Кранка-Никольсона сводится к системе алгебраических уравнений относительно вектора $h(t) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$.

Эта система является хорошо обусловленной при всех $t \in (0, T_0)$ и решается с шагом по времени $\tau = t_k - t_{k-1}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) при $t \in (0, T_0)$

В п.4.2.1. мы показали, что относительно сопряженной функции h^* получается задача с обратным течением времени (ретроспективная задача). Совершенно очевидно, что используя конечное условие по времени (4.73) или (4.74), ретроспективную задачу (4.62), (4.63) можно решать аналогично прямой задаче (4.59) – (4.61). Она решается исходя из конечного условия при $t=T_0$ в обратном направлении, т.е. в направлении уменьшающегося времени.

Теперь несколько слов о вычислении поля вариации δh в области V . Для его вычисления следует исходить из краевой задачи (4.77), (4.78) с начальным условием

$$\delta h(x, y, z, t)|_{t=0} = \delta h(x, y, z, 0) = 0. \quad (4.133)$$

Решение сформулированной задачи ищем в виде

$$\delta h_n = \sum_{i=1}^n \delta h_i(t) N_i(x, y, z), \quad (4.134)$$

где $\delta h_i(t)$ - искомый коэффициент. Исходя из обобщенного принципа Галеркина, имеем n уравнений относительно δh_n :

$$\begin{aligned} \iiint_V N_j \left[-\mu \frac{\partial h_n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial z} \right) - \delta f \right] dv = \\ = - \iint_{\Sigma} N_j \left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial n} + \beta \delta h_n - \delta \alpha \right) d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

откуда, после интегрирования с использованием формулы Грина получаем

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left[-N_j \mu \frac{\partial \delta h_n}{\partial t} + k \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial \delta h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial \delta h_n}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z} \frac{\partial \delta h_n}{\partial z} \right) - N_j \delta f \right] dv = \\ & = \iint_{\Sigma} (N_j \delta \alpha - N_j \beta \delta h_n) d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Как видно из (4.135), после подстановки разложения (4.134) получается линейная система n обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора

$$\frac{d \delta h_n(t)}{dt} = \left(\frac{d \delta h_1}{dt}, \frac{d \delta h_2}{dt}, \dots, \frac{d \delta h_n}{dt} \right).$$

Из начального условия (4.133) относительно узлов i имеем n условий Коши для системы (4.135), которые представляются в виде

$$\delta h(x_i, y_i, z_i, 0) = \delta h_i(0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.136)$$

Таким образом, мы пришли к задаче Коши для системы (4.135) с начальным условием (4.136), которая, в свою очередь, с помощью разностной схемы Кранка-Никольсона сводится к СЛАУ. Полученная СЛАУ решается методом Гаусса (или другими итерационными методами).

Из структуры систем уравнений, вытекающих из (4.132) и (4.135) видно, что они в алгоритмическом отношении совершенно идентичны относительно неизвестных $h_i(t)$ и $\delta h_i(t)$ соответственно.

Подробно выписав уравнения, вытекающие из ретроспективной задачи (4.62), (4.63) при заданном конечном условии (при $t=T_0$), можно убедиться, что относительно неизвестных коэффициентов $h_i^*(t)$ также приходим к аналогичной по структуре СЛАУ. Здесь $h_i^*(t)$ определяются как коэффициенты разложения

$$h_n^*(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n h_i^*(t) N_i(x, y, z),$$

которое раскладывает сопряженную функцию $h^*(x, y, z, t)$ по линейным базисам $N_i(x, y, z)$.

Теперь кратко остановимся на проблеме уточнения коэффициента фильтрации k , для чего, варьируя сопряженное уравнение относительно $k(x, y, z)$, получим соответствующее варьированное уравнение для δk :

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta k \frac{\partial h^{*'}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta k \frac{\partial h^{*'}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta k \frac{\partial h^{*'}}{\partial z} \right) = \delta p', \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T_0) \quad (4.137)$$

с краевым условием

$$\delta k \frac{\partial h^{*'}}{\partial n} + \delta \beta h^{*'} = \delta \alpha^{*'}, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T_0). \quad (4.138)$$

Решение краевой задачи (4.137), (4.138) будем искать в виде

$$\delta k_n = \sum_{i=1}^n \delta k_i N_i(x, y, z), \quad (4.139)$$

где $\delta k_i = \delta k(x_i, y_i, z_i)$ – значение искомого коэффициента в точке (x_i, y_i, z_i) .

Аналогично предыдущему случаю, применяя обобщенный принцип Галеркина к краевой задаче (4.138), (4.139), приходим к СЛАУ относительно $\delta k_i = \delta k(x_i, y_i, z_i)$ с квадратной матрицей порядка n :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \delta k_i \iiint_V \left(\frac{\partial h^{*'}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial h^{*'}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial h^{*'}}{\partial z} \frac{\partial N_i}{\partial z} \right) N_j dv &= \iiint_V \delta p' N_j dv + \\ &+ \iint_{\Sigma} N_j (\delta \alpha^{*'} - \delta \beta h^{*'}) d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.140)$$

СЛАУ (4.140) остается справедливой при любом $t \in (0, T_0)$, что указывает на слабую зависимость коэффициента фильтрации пласта от времени. Поскольку свойства СЛАУ (4.140) аналогичны стационарному случаю, способ ее численной реализации также аналогичен этому случаю.

Наконец, рассмотрим алгоритм вычисления вариации водоотдачи (недостатка насыщения) пласта. С этой целью обратимся к возмущенным уравнениям (4.123), (4.124), откуда видно, что варьированное относительно $\delta\mu$ уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial h^{*'}}{\partial t} \delta\mu = \delta p'. \quad (4.141)$$

При известном $h^{*'}$ и заданном $\delta p'$ можно вычислить поле вариации водоотдачи $\delta\mu$ в области V , для чего приближенное решение будем искать в виде

$$\delta\mu_n(x, y, z) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y, z) \delta\mu_i, \quad (4.142)$$

где $\delta\mu_i$ - искомый коэффициент в узле (x_i, y_i, z_i) .

Из уравнения (4.141), используя метод Галеркина, приходим к системе уравнений

$$-\iiint_V N_j \left(\frac{\partial h^{*'}}{\partial t} \delta\mu_n + \delta p' \right) dv = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

откуда, подставляя выражение для $\delta\mu_n$ из (4.142), получим СЛАУ

$$-\sum_{i=1}^n \left(\iiint_V N_j \frac{\partial h^{*'}}{\partial t} N_i dv \right) \delta\mu_i = \iiint_V N_j \delta p' dv, \quad j=1, 2, \dots, n, \quad (4.143)$$

верную при любом $t \in (0, T_0)$.

Проинтегрировав уравнение (4.143) по t в интервале (t_{k-1}, t_k) , ($k = 1, 2, \dots, m; \tau = t_k - t_{k-1}, t_m = T_0$), имеем СЛАУ порядка $n \times n$:

$$-\sum_{i=1}^n \left(\iiint_V N_j N_i \Delta h_k^{*'} dv \right) \delta \mu_i = \frac{\tau}{2} \iiint_V N_j \Delta (\delta p_k') dv, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (4.144)$$

где

$$\Delta h_k^{*'} = h_n^{*'}(x, y, z, t_k) - h_n^{*'}(x, y, z, t_{k-1}), \quad \Delta (\delta p_k') = \delta p_k' - \delta p_{k-1}'.$$

Поскольку методика расчета в нестационарном случае алгоритмически аналогична стационарному случаю [54], процесс численной реализации начально-краевой задачи изложим кратко. Алгоритм состоит из следующих этапов:

Шаг 1. Используя внутреннее условие вида [54]

$$k^{(0)}(x_j, y_j, z_j) = k_j^3, \quad j = 1, 2, \dots, r, \quad (4.145)$$

образуем первое приближение коэффициента фильтрации пласта $k^{(0)}(x, y, z)$. Решая систему (4.132) при заданной функции $k^{(0)}$, приближенно вычислим поле функции напора

$$h^{(0)}(x, y, z, t) \approx h_n(x, y, z, t).$$

Шаг 2. Решая при тех же значениях $k^{(0)}(x, y, z)$ ретроспективную задачу (4.62), (4.63) с “конечным” условием (4.73) (или (4.74)) с помощью обобщенного принципа Галеркина вычислим поле сопряженной функции

$$h^{*(0)}(x, y, z, t) \approx h_n^{*'}.$$

Шаг 3. Решая систему (4.135) при той же функции $k^{(0)}(x, y, z)$ как задачу Коши с начальным условием (4.136), вычислим поле вариации δh_n . Таким же способом решается ретроспективная краевая задача относительно δh^* и строится функция

$$h^{*'} = h_n^* + \delta h_n^*.$$

Шаг 4. Из системы (4.140) вычисляется $\delta k_n(x, y, z)$ в области V и строится функция $k^{(1)}(x, y, z) \approx k_n^{(0)} + \delta k_n$. Заменяя $k(x, y, z)$ на $k^{(1)}$ и возвращаясь к шагу 1, вычислим $h^{(1)}(x, y, z, t) \approx h_n(x, y, z, t)$. При той же функции $k^{(1)}$ вычисляются h^* (шаг 2) и δh^* (шаг 3), после чего строится поле $h^{*'} \approx h_n^* + \delta h_n^*$. Далее, переходя к шагу 4, вычисляем поправку δk_n к функции $k^{(0)}(x, y, z)$, т.е. получаем $k^{(2)} \approx k_n^{(1)} + \delta k_n$.

После шага 4 проверяется условие

$$\max_i |k_i^{(2)} - k_i^{(1)}| < \varepsilon. \quad (4.146)$$

Если оно выполняется, то проверяется выполнение условия, связанного с данными наблюдений и водоотбора. Если условие (4.146) не выполняется, то итерационная процедура продолжается до его выполнения.

Шаг 5. связан с восстановлением коэффициента водоотдачи (недостатка насыщения) пласта. Его можно проделать после идентификации коэффициента фильтрации. При идентифицированной функции $k(x, y, z)$ и вычисленной $h^{*'}$ из СЛАУ (4.144) находится $\delta \mu_i$ и уточняется поле $\mu^{(1)} \approx \mu_n + \delta \mu_n$. Далее проверяются условие

$$\max_i \left| \mu_i^{(v)} - \mu_i^{(v-1)} \right| < \delta, \quad v = 1, 2, \dots, \quad (4.147)$$

где δ заданное малое положительное число. Если это условие выполняется, то итерация по μ останавливается и проверяется выполнение условия, связанного с данными наблюдений и водоотбора (физические условия). При невыполнении последнего условия уменьшаем δ и продолжаем итерационный процесс до выполнения условия (4.147) и физического условия.

Заметим, что равенства (4.69), (4.89), (4.96), (4.103) и другие используются для проверки правильности вычисленных значений искомым функций $h, h^*, \delta h, \delta k, \delta \mu$ и т.д.

§4.3. Идентификация параметров в задаче о переносе загрязнителей в пористой среде

4.3.1. Постановка проблемы

При изучении движения жидкости в пористой среде учитывается изменение во времени не только массовой концентрации $n_0 c$ (n_0 – пористость среды) вещества в жидкой фазе, но и концентрации N твердой фазы, причем обе концентрации рассчитываются на единицу объема пористой среды (вместе с жидкостью) [33,99].

В общем виде для несжимаемой жидкости, движущейся в пористой среде со скоростью фильтрации $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, можно ввести понятие массовой скорости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ вещества, ассоциированного с жидкостью [99,158]:

$$u_i = v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.148)$$

Здесь и далее повторяющиеся индексы являются индексами суммирования, D_i – компоненты коэффициента конвективной диффузии, содержащей молекулярную диффузию и гидродинамическую дисперсию.

Уравнения диффузии и массообмена при полном насыщении почвы влагой представляются в виде

$$\frac{\partial(n_0 c)}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{\partial N}{\partial t} = 0, \quad (4.149)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \varphi(c, N), \quad (4.150)$$

где c – концентрация соли, движущейся со скоростью \vec{v} , N – концентрация твердой фазы. В конкретных задачах функция φ имеет определенное аналитическое выражение.

В рассматриваемой постановке концентрация твердой фазы не учитывается, поэтому в уравнении (4.149) член $\partial N / \partial t$ выпадает, а уравнение (4.150) отсутствует.

Итак, будем рассматривать уравнение

$$\frac{\partial(n_0 c)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) = f(x, t), \quad (4.151)$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)$, $t \in (0, T)$, f – заданная функция, описывающая вклад загрязнителей (она обычно зависит и от концентрации, здесь с целью демонстрации алгоритма ее будем брать в представленном виде).

К уравнению (4.151) присоединяются уравнения фильтрации (точнее, линейный закон Дарси)

$$v_i = -k \frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.152)$$

и уравнение неразрывности для жидкости

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0, \quad (4.153)$$

где $h = p / \gamma$ – функция напора, k – коэффициент фильтрации, p – давление, $\gamma = g\rho$ – объемная масса жидкости, ρ – плотность жидкости и g – ускорение силы тяжести.

Понятно, что о решении уравнения (4.151) следует вести речь при наличии поля функции v_i в области V , где решается соответствующая краевая задача. Поскольку способы вычисления поля скорости фильтрации \vec{v} нами хорошо изучены [47,48,120], с целью экономии времени мы здесь остановимся только на проблеме моделирования процесса распространения концентрации загрязнителя $c(x, t)$ при известном поле скоростей \vec{v} .

Обычно с целью упрощения коэффициент конвективной диффузии предполагается линейно зависящим от скорости фильтрации и представляется в виде [158]

$$D_i = D_m + \lambda_i v, \quad i = 1, 2, 3.$$

Здесь v – модуль скорости фильтрации, D_m – коэффициент молекулярной диффузии в пористой среде, λ_i – параметр дисперсии, $D_i = D_i(x)$.

Цель математического моделирования переноса загрязнителя подземными водами заключается в описании процесса изменения

концентрации в каждой точке области течения в любой момент времени, для чего используется математическая модель процесса (4.151) совместно с начально-краевыми условиями.

Соотношения (4.148) называются законом Фика. В более общем представлении D_i является тензорной величиной, зависящей от координат точек, скорости потока и от свойств среды. Эти зависимости должны определяться с помощью эксперимента. Экспериментальное определение их достаточно дорого и требует значительных материальных и временных ресурсов. Они, как правило, для конкретных объектов представляются довольно грубо, поэтому возникает необходимость с практически достаточной точностью привести в соответствие математическую модель с изучаемым объектом, т.е. необходимо провести идентификацию.

Чтобы получить единственное решение, описывающее процесс, к уравнению (4.151) необходимо присоединить конкретные начально-краевые условия, о которых будем вести речь в последующих пунктах.

Таким образом, при неизвестности или недостаточной точности задания коэффициентов, начально-краевая задача для уравнения параболического типа (4.151) будет недоопределенной или математически – некорректно поставленной. Для получения достаточно полной информации о коэффициентах D_i для конкретного объекта необходимо провести экспериментальную работу или организовать серию наблюдений и измерений, при этом требуемая информация всегда будет недостаточной. Чтобы иметь возможность преодолеть такого рода затруднения и получить относительно недорогую информацию, необходимо использовать математическую модель процесса при наличии минимальной информации о значениях коэффициентов, выражающих механические, физические и химические свойства изучаемого объекта.

Таким образом, математическая модель используется с таким расчетом, чтобы при ее адекватности изучаемому объекту и наличии минимально необходимой информации о поточечных значениях искомого коэффициента (или искомой функции) восстановить коэффициент диффузии D_i и пористость грунта $n_0(x, t)$ в области течения и построить поле распространения концентрации загрязнителя в каждый момент времени.

Численная реализация проблемы проводится на основе теории сопряженных дифференциальных уравнений и теории возмущений.

4.3.2. Сопряженная задача для математической модели переноса

Построим сопряженное дифференциальное уравнение для уравнения переноса. С этой целью введем гильбертово пространство H , в котором скалярное произведение для любых двух функций g и h из H определяется по формуле

$$(g, h) = \int_0^T dt \iiint_V gh dv, \quad (4.154)$$

где $t \in (0, T)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in V$, $dv = dx_1 dx_2 dx_3$.

Уравнение переноса (4.151) представим в операторном виде

$$Ac = f, \quad x \in V, \quad t \in (0, T) \quad (4.155)$$

с начальным

$$c(x, t)|_{t=0} = c(x, 0) = c_0(x) \quad (4.156)$$

и краевым

$$lc = \alpha(x, t), \quad x \in \Sigma = \partial V, \quad t \in (0, T) \quad (4.157)$$

условиями.

Предполагаем, что коэффициенты и граница области удовлетворяют требованиям, которые обеспечивают необходимую гладкость. В задаче (4.155) – (4.157) приняты обозначения

$$\Lambda = \frac{\partial n_0}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i - D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) = T + L, \quad l = D_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i + \beta(x, t),$$

$$n_i = \cos(n, x_i), \quad T = \frac{\partial n_0}{\partial t}, \quad L = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i - D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.158)$$

Линейному оператору Λ поставим в соответствие сопряженный оператор Λ^* на основе тождества Лагранжа

$$(c^*, \Lambda c) = (c, \Lambda^* c^*), \quad (4.159)$$

где $c^*(x, t)$ – функция, сопряженная к $c(x, t)$. С этой целью построим выражение

$$(c^*, \Lambda c) = \int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c \, dv. \quad (4.160)$$

Правую часть формулы (4.160) преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
\int_0^T dt \iiint_V c^* \frac{\partial n_0 c}{\partial t} dv &= \iiint_V dv \int_0^T c^* \frac{\partial n_0 c}{\partial t} dt = \iiint_V (c^* n_0 c) \Big|_0^T dv - \int_0^T dt \iiint_V n_0 c \frac{\partial c^*}{\partial t} dv = \\
&= \iiint_V [(c n_0 c^*)_T - (c n_0 c^*)_0] dv - \int_0^T dt \iiint_V n_0 c \frac{\partial c^*}{\partial t} dv. \tag{4.161}
\end{aligned}$$

На основании формулы интегрирования по частям имеем

$$\begin{aligned}
\iiint_V c^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) dv &= - \iiint_V v_i c \frac{\partial c^*}{\partial x_i} dv + \iint_{\Sigma} c^* c v_i n_i d\sigma + \iiint_V D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c^*}{\partial x_i} dv - \\
- \iint_{\Sigma} c^* D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} n_i d\sigma &= - \iiint_V v_i c \frac{\partial c^*}{\partial x_i} dv + \iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma - \iiint_V c \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) dv + \\
+ \iint_{\Sigma} c D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i d\sigma - \iint_{\Sigma} c^* (\alpha - \beta c) d\sigma &= - \iiint_V c \left[v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) \right] dv + \\
+ \iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} c D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i d\sigma - \iint_{\Sigma} c^* (\alpha - \beta c) d\sigma. \tag{4.162}
\end{aligned}$$

Подставляя (4.161) и (4.162) в (4.160), получим

$$\begin{aligned}
\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c dv &= \int_0^T dt \iiint_V c \left[-n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} - v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) \right] dv + \\
+ \iiint_V [(c n_0 c^*)_T - (c n_0 c^*)_0] dv &+ \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} c D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i d\sigma - \right.
\end{aligned}$$

$$-\left. \iint_{\Sigma} c^* (\alpha - \beta c) d\sigma \right] dt. \quad (4.163)$$

Выражение, стоящее в первой квадратной скобке в (4.163), представим в виде уравнения

$$\Lambda^* c^* = p(x, t), \quad x \in V, \quad t \in (0, T), \quad (4.164)$$

которое будет сопряженным к уравнению (4.155). Здесь p – заданная функция источников, а оператор

$$\Lambda^* = -n_0 \frac{\partial}{\partial t} - \nu_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.165)$$

называется сопряженным оператором, функция $c^*(x, t)$ – сопряженной функцией к $c(x, t)$. К уравнению (4.164) присоединим краевое условие

$$l^* c^* = D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} n_i + \beta c^* = \alpha^*(x, t), \quad x \in \Sigma = \partial V. \quad (4.166)$$

Из (4.158) и (4.166) видно, что операторы l и l^* совпадают. Для определенности потребуем, чтобы, функция c^* была периодической с периодом T :

$$c^*(x, 0) = c^*(x, T). \quad (4.167)$$

Как известно, пористость грунта мало изменяется с течением времени. В связи с этим можно допустить, что она является функцией только от координат, т.е. $n_0 = n_0(x)$. Тогда, учитывая (4.167) и полагая, что

$$(cc^* n_0)/_T - (cc^* n_0)/_0 = n_0(x)[c(x,T)c^*(x,T) - c(x,0)c^*(x,0)] = 0, \quad (4.168)$$

приходим к выводу, что функция $c(x,t)$ также периодична с периодом T , и наоборот, считая функцию $c(x,t)$ периодической, можно получить равенство (4.168).

Из (4.163) с учетом условий (4.168), (4.166) и (4.164) имеем

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c dv = \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* dv + \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} cc^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} (c\alpha^* - c^*\alpha) d\sigma \right] dt. \quad (4.169)$$

Здесь $v_n = v_i n_i = v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3$ – проекция вектора скорости фильтрации к внешней нормали \vec{n} .

При моделировании переноса загрязнителей подразумевается, что основным транспортером загрязнителя является фильтрационный поток. Поскольку поток просачивается сквозь область фильтрации V , в зависимости от того, втекает поток в эту область или вытекает из нее, вектор v_n меняет знак. В связи с этим введем обозначения

$$v_n^+ = \begin{cases} v_n, & \text{если } v_n > 0, \\ 0, & \text{если } v_n < 0, \end{cases}$$

$$v_n = v_n^+ + v_n^-.$$

Если, кроме того, допустить, что краевые условия (4.157) и (4.166) однородны, т.е. $\alpha = \alpha^* = 0$ и фильтрационный поток втекает в область V и вытекает из нее, то из (4.169) получаем тождество Лагранжа:

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c \, dv = \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* \, dv.$$

Равенство (4.163) с учетом краевого условия (4.166) представим в виде

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c \, dv - \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* \, dv = \iiint_V [(cn_0 c^*)_T - (cn_0 c^*)_0] \, dv + \int_0^T dt \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - c^* \alpha) \, d\sigma. \quad (4.170)$$

С другой стороны, умножая уравнение (4.155) на функцию c^* , а уравнение (4.164) – на функцию c , проинтегрировав каждое равенство и вычитая второе равенство из первого, получаем

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* \Lambda c \, dv - \int_0^T dt \iiint_V c \Lambda^* c^* \, dv = \int_0^T \iiint_V (c^* f - cp) \, dv \, dt. \quad (4.171)$$

Введем, как и в [126,127], для линейных функционалов обозначения

$$J_f[c^*] = \iiint_V c^* f \, dv, \quad J_p[c] = \iiint_V cp \, dv. \quad (4.172)$$

Из (4.170) с учетом (4.171) и (4.172) приходим к равенству

$$\int_0^T (J_f[c^*] - J_p[c]) \, dt = \iiint_V [(cc^* n_0)|_T - (cc^* n_0)|_0] \, dv + \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} cc^* v_n \, d\sigma + \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - c^* \alpha) \, d\sigma \right] dt, \quad (4.173)$$

связывающему сопряженные функции c и c^* с начально-краевыми условиями, т.е. с входными параметрами задачи.

Возвращаемся к равенству (4.171). Оно верно при всех $t \in (0, T)$, т.е. имеем место равенство

$$\iiint_V c^* \Lambda c dv - \iiint_V c \Lambda^* c^* dv = \iiint_V c^* f dv - \iiint_V c p dv. \quad (4.174)$$

С помощью формулы Грина преобразуем левую часть (4.174):

$$\iiint_V c^* \frac{\partial(n_0 c)}{\partial t} dv + \iiint_V c n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} dv = \iiint_V \frac{\partial(cc^* n_0)}{\partial t} dv, \quad (4.175)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V c^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i c - D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \right) dv + \iiint_V c \left[v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) \right] dv = \iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma + \\ + \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - c^* \alpha) d\sigma. \end{aligned} \quad (4.176)$$

Из (4.174) с учетом (4.175), (4.176) и (4.172) получим равенство

$$J_f[c^*] - J_p[c] = \iiint_V \frac{\partial(n_0 c c^*)}{\partial t} dv + \iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - c^* \alpha) d\sigma, \quad (4.177)$$

верное при всех $t \in (0, T)$.

4.3.3. О единственности решения сопряженной задачи

Итак, мы получили краевую задачу (4.164) – (4.166) для сопряженной

функции $c^*(x, t)$. Поскольку функция c^* связана с физической величиной - функцией концентрации $c(x, t)$ условием сопряженности, то они на концах временного отрезка $[0, T]$ должны удовлетворять условию (4.168). Легко видеть, что задача (4.164) – (4.166) является ретроспективной, т.е. ее следует решать в обратном направлении изменения переменной t (от $t=T$ до $t=0$).

Пусть «начальным» условием ретроспективной задачи будет

$$c^*(x, T) = c_T^*(x) = \varphi^*(x), \quad (4.178)$$

где $\varphi^*(x)$ – заданная функция.

Докажем, что существует единственное решение задачи (4.164) – (4.166) и (4.178). С этой целью умножим уравнение (4.164) на c^* и проинтегрируем по t от $t=0$ до $t=T$:

$$-\int_0^T dt \iiint_V c^* n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} dv - \int_0^T dt \iiint_V \left[c^* v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} + c^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) \right] dv = \int_0^T dt \iiint_V c^* p dv. \quad (4.179)$$

Преобразуем слагаемые, стоящие в левой части равенства (4.179):

$$-\int_0^T dt \iiint_V c^* n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} dv = -\iiint_V \frac{n_0}{2} \left(\int_0^T \frac{\partial c^{*2}}{\partial t} dt \right) dv, \quad (4.180)$$

$$\begin{aligned} \iiint_V c^* v_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} dv &= \frac{1}{2} \iiint_V v_i \frac{\partial c^{*2}}{\partial x_i} dv = -\frac{1}{2} \iiint_V c^{*2} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dv + \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} c^{*2} v_i n_i d\sigma = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{\Sigma} c^{*2} v_n d\sigma, \end{aligned} \quad (4.181)$$

так как в области V $div \vec{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$.

$$\iiint_V c^* \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right) dv = - \iiint_V D_i \left(\frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right)^2 dv + \iint_{\Sigma} c^* (\alpha - \beta c^*) d\sigma. \quad (4.182)$$

Для сопряженной функции c^* полагаем, что

$$-v_n = v_n^+ + v_n^-, \quad (4.183)$$

причем

$$v_n^+ = \begin{cases} -v_n, & \text{если } v_n > 0, \\ 0, & \text{если } v_n < 0. \end{cases}$$

Учитывая условие периодичности функции c^* , имеем

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} dv = \iiint_V \frac{n_0}{2} dv \int_0^T \frac{\partial c^{*2}}{\partial t} dt = 0,$$

поскольку

$$\int_0^T \frac{\partial c^{*2}}{\partial t} dt = 0. \quad (4.184)$$

Таким образом, из (4.179) с учетом (4.180) – (4.184) получаем равенство

$$\int_0^T dt \iiint_V c^* p dv = \int_0^T \left[-\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} c^{*2} v_n d\sigma + \iiint_V D_i \left(\frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right)^2 dv \right] dt -$$

$$-\int_0^T dt \iint_{\Sigma} c^* (\alpha^* - \beta c^*) d\sigma.$$

Это равенство с учетом (4.183) представляется в виде

$$\begin{aligned} & \int_0^T \frac{1}{2} dt \iint_{\Sigma} c^{*2} v_n^+ d\sigma + \int_0^T dt \iiint_V D_i \left(\frac{\partial c^*}{\partial x_i} \right)^2 dv + \int_0^T dt \iint_{\Sigma} c^{*2} \beta d\sigma = \int_0^T dt \iiint_V c^* p dv + \\ & + \int_0^T dt \iint_{\Sigma} c^* \alpha^* d\sigma - \int_0^T dt \iint_{\Sigma} \frac{1}{2} c^{*2} v_n^- d\sigma, \end{aligned} \quad (4.185)$$

которое является основным равенством для сопряженной функции $c^*(x, t)$.

Допустив, что ретроспективная задача (4.164) – (4.166) и (4.178) имеет два решения $\varphi_1(x, t)$ и $\varphi_2(x, t)$, построим функцию

$$\omega(x, t) = \varphi_1 - \varphi_2, \quad (4.186)$$

для которой имеет место ретроспективная задача

$$-n_0 \frac{\partial \omega}{\partial t} - v_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.187)$$

$$l^* \omega = l \omega = 0, \quad (4.188)$$

$$\omega(x, t) \Big|_{t=T} = \omega(x, T) = 0. \quad (4.189)$$

Запишем для однородной задачи (4.187) – (4.189) основное равенство,

аналогичное равенству (4.185):

$$\int_0^T \left[\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \omega^2 v_n^+ d\sigma + \iiint_V D_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 dv + \iint_{\Sigma} \omega^2 \beta d\sigma \right] dt = 0. \quad (4.190)$$

Понятно, что равенство (4.190) верно при всех $t \in (0, T)$, т.е. имеем

$$\frac{1}{2} \iint_{\Sigma} \omega^2 v_n^+ d\sigma + \iiint_V D_i \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} \right)^2 dv + \iint_{\Sigma} \beta \omega^2 d\sigma = 0. \quad (4.191)$$

Поскольку $v_n^+ > 0$, при $x \in \Sigma$, $D_i \geq 0$ при $x \in V$ и $\beta \geq 0$ при $x \in \Sigma$ для всех $t \in (0, T)$, то равенство (4.191) верно только при $\omega \equiv 0$, откуда следует, что $\varphi_1(x, t) \equiv \varphi_2(x, t)$, т.е. в области V при $t \in (0, T)$ существует единственное решение задачи (4.164) – (4.166) и (4.178).

4.3.4. Применение метода возмущения

Выше было отмечено, что конечная цель проблемы – идентификация коэффициентов математической модели с таким расчетом, чтобы она могла достоверно описать реальные физические процессы. Коэффициенты, характеризующие геохимические свойства среды, измеряются грубо и в очень малом количестве точек, т.е. практики дают довольно скудную информацию об объекте. Чтобы получить непрерывную (или достаточно богатую) информацию, мы вынуждены использовать математическую модель изучаемого явления. Для разрешения поставленной практикой проблемы мы применяем метод возмущения.

Допустим, что правая часть сопряженного уравнения принимает вариацию $p' = p + \delta p$, где $\delta p(x, t)$ – вариация функции $p(x, t)$ в области V . Тогда сопряженная функция c^* также получит вариацию δc^* , т.е. имеет место

равенство $c^* \prime = c^* + \delta c^*$ и относительно варьированной сопряженной функции получаем краевую задачу

$$\Lambda^* c^* \prime = p', \quad x \in V, \quad p' = p + \delta p, \quad c^* \prime = c^* + \delta c^*, \quad (4.192)$$

$$l^* c^* \prime = \alpha^*, \quad x \in \Sigma, \quad \alpha^* \prime = \alpha + \delta \alpha^*, \quad t \in (0, T). \quad (4.193)$$

Здесь использованы обозначения

$$\Lambda^* = T^* + L^*, \quad T^* = -n_0 \frac{\partial}{\partial t}, \quad L^* = -v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (4.194)$$

$$\Lambda = T + L, \quad T = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L = v_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad i=1,2,3. \quad (4.195)$$

Рассмотрим краевую задачу

$$\Lambda c = f(x, t), \quad x \in V, \quad t \in (0, T), \quad (4.196)$$

$$l c = \alpha(x, t), \quad x \in \Sigma, \quad t \in (0, T) \quad (4.197)$$

с начальными условиями

$$c(x, t)|_{t=0} = c_0(x). \quad (4.198)$$

Из (4.192) – (4.197) образуем равенство

$$\iiint_V \Lambda^* c^* \prime dv - \iiint_V c^* \Lambda c dv = \iiint_V c p' dv - \iiint_V c^* f dv, \quad (4.199)$$

или

$$\iiint_V c \Lambda^* c^* dv - \iiint_V c^* \Lambda c dv + \iiint_V c \Lambda^* \delta c^* dv = \iiint_V c p dv - \iiint_V c^* f dv + \iiint_V c \delta p dv, \quad (4.200)$$

откуда, учитывая (4.177), приходим к уравнению относительно вариации δc^* :

$$\begin{aligned} - \iiint_V c n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} dv + \iiint_V \left[D_i q(c; \delta c^*) + \frac{\partial(v_i c)}{\partial x_i} \delta c^* \right] dv + \iint_{\Sigma} c (\beta - v_n) \delta c^* d\sigma = \\ = \iiint_V c \delta p dv + \iint_{\Sigma} c \delta \alpha^* d\sigma, \end{aligned} \quad (4.201)$$

где

$$q(c; \delta c^*) = \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial \delta c^*}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.202)$$

– симметричная билинейная форма от функций c и δc^* .

Интегро-дифференциальное уравнение (4.201) относительно возмущения верно для всех $t \in (0, T)$. При разумно заданном конечном значении $\delta c^*(x, t)$ при $t = T$ его можно решить и найти δc^* . Проинтегрировав равенство (4.199) по t на отрезке $[0, T]$, с учетом равенства

$$\int_0^T (J_p[c] - J_f[c^*]) dt + \iiint_V [(c n_0 c^*)_0 - (c n_0 c^*)_T] dv +$$

$$+ \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma + \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - c^* \alpha) d\sigma \right] dt, \quad (4.203)$$

приходим к уравнению относительно вариации δc^* :

$$\begin{aligned} & - \int_0^T dt \iiint_V c n_0 \frac{\partial c^*}{\partial t} dv + \int_0^T dt \iiint_V \left[D_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial \delta c^*}{\partial x_i} + \frac{\partial (c v_i)}{\partial x_i} \delta c^* \right] dv + \int_0^T dt \iint_{\Sigma} c (\beta - v_n) \delta c^* d\sigma = \\ & = \int_0^T \left[\iint_{\Sigma} c \delta \alpha^* d\sigma + \iiint_V c \delta p dv \right] dt. \end{aligned} \quad (4.204)$$

Ясно, что уравнение (4.204) можно получить из (4.201) интегрированием по t на отрезке $[0, T]$.

Таким образом, решая соответствующую ретроспективную задачу при известных значениях функций c , n_0 , D , β , v_i , $\delta \alpha^*$ и δp в области $V_T = V \cup [0, T]$ и заданном условии

$$\delta c^*(x, t)|_{t=T} = \psi^*(x), \quad (4.205)$$

можно вычислить (в принципе) функцию $\delta c^*(x, t)$ в области V_T .

Проблемой реализации этой задачи будем заниматься позже, а уравнение (4.201) будем использовать для проверки правильности найденных значений поля вариации δc^* при любых $t \in (0, T)$.

4.3.5. Уравнения для вариаций коэффициента диффузии и пористости грунта

Допустим, что в уравнении переноса коэффициент диффузии D_i изменяется на δD_i , т.е. принимает вариацию $D_i' = D_i + \delta D_i$, $i=1,2,3$. Это равносильно тому, что оператор L из (4.195) принимает вариацию, равную δL и при прочих неизменных условиях сопряженный дифференциальный оператор также изменяется на δL^* .

Итак, при изменении оператора L^* на δL^* получим варьированное дифференциальное уравнение

$$L^* c^{*'} = p'', \quad p'' = p' + \delta p', \quad x \in V \quad (4.206)$$

с краевым условием

$$l^* c^{*'} = \alpha^{*''}, \quad \alpha^{*''} = \alpha^{*'} + \delta \alpha^{*'}, \quad x \in \Sigma, \quad (4.207)$$

где $t \in (0, T)$,

$$L^*{}' = L^* + \delta L^*, \quad D_i' = D_i + \delta D_i, \quad \delta L^* = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\delta D_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right), \quad (4.208)$$

$$l^*{}' = l^* + \delta l^*, \quad \delta l^* = \delta D_i \frac{\partial}{\partial x_i} n_i + \delta \beta. \quad (4.209)$$

Рассмотрим основную краевую задачу

$$Lc = f(x, t), \quad x \in V, \quad (4.210)$$

$$lc = \alpha(x, t), \quad x \in \Sigma, \quad t \in (0, T)$$

и из (4.206) – (4.210) образуем равенство

$$\iiint_V c \Lambda^* c' dv - \iiint_V c^* \Lambda c dv = \iiint_V c p'' dv - \iiint_V c^* f dv, \quad (4.211)$$

или

$$\iiint_V c \Lambda^* c' dv - \iiint_V c^* \Lambda c dv + \iiint_c c \delta \Lambda^* c' dv = \iiint_V c p' dv - \iiint_V c^* f dv + \iiint_V c \delta p' dv. \quad (4.212)$$

Преобразуя слагаемые из (4.212) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \iiint_V c \Lambda^* c' dv - \iiint_V c^* \Lambda c dv &= - \iiint_V \frac{\partial (c c^* n_0)}{\partial t} dv - \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - \alpha c^*) d\sigma - \\ &- \iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma, \end{aligned}$$

$$\iiint_V c \Lambda^* c' dv - \iiint_V c^* \Lambda c dv = \iiint_V c p' dv - \iiint_V c^* f dv$$

и используя обозначения (4.172), приходим к равенству

$$J_{p'}[c] - J_f[c^*] = - \iiint_V \frac{\partial (c c^* n_0)}{\partial t} dv - \iint_{\Sigma} c c^* v_n d\sigma - \iint_{\Sigma} (c \alpha^* - \alpha c^*) d\sigma. \quad (4.213)$$

Таким образом, из (4.212) с учетом (4.213) мы получаем уравнение, содержащее вариации $\delta \mathcal{D}_i$:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial c}{\partial x_1} \frac{\partial c^*'}{\partial x_1} \delta D_1 + \frac{\partial c}{\partial x_2} \frac{\partial c^*'}{\partial x_2} \delta D_2 + \frac{\partial c}{\partial x_3} \frac{\partial c^*'}{\partial x_3} \delta D_3 \right) dv = \iiint_V c \delta p' dv + \\ + \iint_{\Sigma} c (\delta \alpha^* - c^* \delta \beta) d\sigma, \end{aligned} \quad (4.214)$$

верное при всех $t \in (0, T)$.

Если влияние анизотропии действует только на главные члены $D_i (i=1, 2, 3)$, а их вариации не зависят от направлений, т.е. $\delta D(x) = \delta D_i$, то из (4.214) имеем уравнение относительно δD :

$$\iiint_V \frac{\partial c}{\partial x_i} \frac{\partial c^*'}{\partial x_i} \delta D dv = \iiint_V c \delta p' dv + \iint_{\Sigma} c (\delta \alpha^* - c^* \delta \beta) d\sigma. \quad (4.215)$$

При известных c , c^* , $\delta \beta$, $\delta \alpha^*$ и $\delta p'$ из (4.215) можно вычислить вариацию δD в области V .

Наконец, пусть имеет место случай, когда при прочих равных условиях только пористость грунта n_0 получает возмущение, т.е. $n_0(x, t) = n_0 + n_0(x, t)$. Тогда оператор A , а тем самым и сопряженный оператор также получает вариацию.

Итак, рассмотрим краевую задачу

$$\tilde{A}^* c^* = \tilde{p}'' , \quad \tilde{p}'' = p' + \delta \tilde{p}' , \quad x \in V, \quad t \in (0, T), \quad (4.216)$$

$$l^* c^* = \tilde{\alpha}^* , \quad \tilde{\alpha}^* = \alpha^* + \delta \tilde{\alpha}^* , \quad x \in \Sigma, \quad (4.217)$$

где

$$\tilde{\Lambda}^* ' = \tilde{\Lambda}^* + \delta \tilde{\Lambda}^*, \quad l^* = l, \quad \delta \tilde{\Lambda}^* = -\delta n_0 \frac{\partial}{\partial t} \quad (4.218)$$

и основную краевую задачу

$$\Lambda c = f, \quad lc = \alpha. \quad (4.219)$$

Составим равенство

$$\iiint_V c \tilde{\Lambda}^* ' c^* ' dv - \iiint_V c^* ' \Lambda c dv = \iiint_V \tilde{p}'' c dv - \iiint_V f c^* ' dv, \quad (4.220)$$

или (выделяя главные части)

$$\begin{aligned} \iiint_V c \tilde{\Lambda}^* ' c^* ' dv - \iiint_V c^* ' \Lambda c dv + \iiint_V c \delta \tilde{\Lambda}^* ' c^* ' dv = \iiint_V p' c dv - \\ - \iiint_V f c^* ' dv + \iiint_V c \delta \tilde{p}' dv. \end{aligned} \quad (4.221)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \iiint_V c \tilde{\Lambda}^* ' c^* ' dv - \iiint_V c^* ' \Lambda c dv = - \iiint_V \frac{\partial (c c^* ' n_0)}{\partial t} dv - \iint_{\Sigma} c c^* ' \nu d\sigma - \\ - \iint_{\Sigma} (c \alpha^* ' - \alpha c^* ') d\sigma = J_{p'}[c] - J_f[c^* '] \end{aligned}$$

и

$$\iiint_V c \delta \tilde{\Lambda}^* ' c^* ' dv = - \iiint_V c \frac{\partial c^* '}{\partial t} \delta n_0 dv,$$

из (4.221) получаем уравнение относительно $\delta n_0(x, t)$:

$$\iiint_V c \frac{\partial c^{*'}}{\partial t} \delta n_0 dV = - \iiint_V c \delta \tilde{p}' dV, \quad (4.222)$$

верное при всех $t \in (0, T)$, откуда, после интегрирования по t имеем

$$\int_0^T dt \iiint_V c \frac{\partial c^{*'}}{\partial t} \delta n_0 dV = - \int_0^T dt \iiint_V c \delta \tilde{p}' dV. \quad (4.223)$$

Уравнение (4.222) или (4.223) при известных c , $c^{*'}$ и $\delta \tilde{p}'$ дает возможность вычислить функцию $\delta n_0(x, t)$.

Из приведенных алгоритмов видно, что с привлечением теории сопряженных дифференциальных уравнений и теории возмущений нами получен ряд интегральных и интегро-дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций c , $c^{*'}$, $\delta c^{*'}$ и вариации коэффициентов δD_i и δn_0 , что существенно обогащает информацию, необходимую для идентификации коэффициентов $D_i(x)$ и $n_0(x, t)$. При наличии начальных условий они дают возможность вычислить их в области V . Кроме того, мы имеем конкретные уравнения, пригодные для уточнения каждого из параметров. Таким образом, мы уже подготовлены к изложению приближенных алгоритмов, идентифицирующих гидро- и геохимические параметры среды. Для получения сравнительно экономичных и удобных для реализации на ЭВМ алгоритмов будем использовать метод конечных элементов (МКЭ).

§4.4. Алгоритмы для определения коэффициента диффузии и пористости грунта

Здесь приводятся алгоритмы для вычисления коэффициента диффузии и пористости грунта, основанные на теории возмущений

В работе [56] на основе теории сопряженных дифференциальных уравнений и теории возмущений разработан приближенный метод идентификации коэффициента конвективной диффузии и пористости грунта. Здесь мы выведем алгоритмы для вычисления этих параметров с помощью метода конечных элементов.

а) С целью демонстрации работоспособности алгоритмов, приближенно вычисляющих распространение концентрации загрязнителей, значения сопряженной функции и уточняющих значения коэффициента конвективной диффузии и пористости грунта, обратимся к уравнению диффузии при $D_i = D(x, y, z)$:

$$Ac = f(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T) \quad (4.224)$$

с начальным

$$c(x, y, z, 0) = c_0(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V \quad (4.225)$$

и краевым

$$lc = \alpha(x, y, z, t), \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T) \quad (4.226)$$

условиями, где

$$\Lambda = \frac{\partial n_0}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(D \frac{\partial}{\partial z} \right) + \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$l = D \left(\frac{\partial}{\partial x} n_1 + \frac{\partial}{\partial y} n_2 + \frac{\partial}{\partial z} n_3 \right) + \beta,$$

$$n_1 = \cos(n, x), \quad n_2 = \cos(n, y), \quad n_3 = \cos(n, z),$$

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z), \quad n_0 = n_0(x, y, z, t), \quad \beta = \beta(x, y, z, t),$$

$\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности Σ .

В начально-краевой задаче (4.224) – (4.226) предполагается, что заданные коэффициенты и граница области $\Sigma = \partial V$ удовлетворяют всем условиям, обеспечивающим существование единственного решения задачи и что функция $D(x, y, z)$ принадлежит пространству Соболева ($D(x, y, z) \in W_2^{(0)}$).

Рассмотрим случай, когда $D(x, y, z)$ – заданная функция в области V и кратко изложим применение МКЭ при численной реализации задачи (4.224) – (4.226) на ЭВМ. С этой целью область V разбиваем на тетраэдральные элементы с общим количеством узлов (вершин тетраэдров) n .

Согласно МКЭ решение краевой задачи ищется в виде

$$c_n(x, y, z, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) N_i(x, y, z), \quad (4.227)$$

где $a_i(t)$ -искомые коэффициенты, N_i - линейные базисы МКЭ, вид которых приведен в (3.11).

С помощью обобщенного метода Галеркина из краевой задачи (4.224) – (4.226) имеем n уравнений

$$\iiint_V N_j (\Lambda c_n - f) dv = - \iint_{\Sigma} N_j (lc_n - \alpha) d\sigma, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (4.228)$$

Используя формулу Грина в равенствах (4.228), приходим к системе интегро-дифференциальных уравнений относительно $a_i(t)$:

$$\begin{aligned} & \iiint_V N_j \frac{\partial(n_0 c_n)}{\partial t} dv + \iiint_V D \left(\frac{\partial c_n}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial c_n}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial c_n}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv - \iiint_V c_n \left(v_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + v_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv + \\ & + \iint_{\Sigma} N_j \beta c_n d\sigma + \iint_{\Sigma} N_j v_n c_n d\sigma = \iiint_V N_j f dv + \iint_{\Sigma} N_j \alpha d\sigma, \quad j=1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.229)$$

Интегрируя (4.229) по t в интервале (t_{k-1}, t_k) (при $\tau = t_k - t_{k-1}$, $\tau = T/n_0$, $k=1,2,\dots, n_0$) и используя квадратурные формулы [65]

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(t) dt = \tau [\sigma \varphi(t_k) + (1-\sigma) \varphi(t_{k-1})], \quad 0 < \sigma \leq 1, \quad (4.230)$$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi(t) \psi'(t) dt = [\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] [\sigma \varphi(t_k) + (1-\sigma) \varphi(t_{k-1})],$$

получаем СЛАУ относительно $a_{ik} = a_i(t_k)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n [n_{0,k}^{ij} / \tau + \sigma (Q_k^{ij} - q_k^{ij} + \beta_k^{ij} + v_{n,k}^{ij})] a_{ik} = \sum_{i=1}^n [n_{0,k-1}^{ij} / \tau - (1-\sigma) + (Q_{k-1}^{ij} - q_{k-1}^{ij} + \beta_{k-1}^{ij} + v_{n,k-1}^{ij})] a_{i,k-1} + \\ & + \sigma (f_k^j + \alpha_k^j) + (1-\sigma) (f_{k-1}^j + \alpha_{k-1}^j), \quad k=1,2,\dots, n_0; \quad j=1,2,\dots, n, \end{aligned} \quad (4.231)$$

где

$$n_{0,k}^{ij} = \iiint_V N_i N_j n_{0,k} dv, \quad n_{0,k-1}^{ij} = \iiint_V N_i N_j n_{0,k-1} dv,$$

$$Q^{ij} = \iiint_V D q(N_i, N_j) dv, \quad q_k^{ij} = \iiint_V N_i \left(v_{xk} \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_{yk} \frac{\partial N_j}{\partial y} + v_{zk} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv,$$

$$\beta_k^{ij} = \iint_{\Sigma} N_i N_j \beta_k d\sigma, \quad v_{nk}^{ij} = \iint_{\Sigma} N_i N_j v_{n,k} d\sigma,$$

$$f_k^j = \iiint_V N_j f_k dv, \quad \alpha_k^j = \iint_{\Sigma} N_j \alpha_k d\sigma,$$

$$v_{xk} = v_x(x, y, z, t_k), \quad v_{yk} = v_y(x, y, z, t_k), \quad v_{zk} = v_z(x, y, z, t_k),$$

$$v_{nk} = v_n(x, y, z, t_k) = v_{xk} n_{1+} + v_{yk} n_{2+} + v_{zk} n_3, \quad \beta_k = \beta(x, y, z, t_k),$$

$$\alpha_k = \alpha(x, y, z, t_k), \quad n_{0k} = n_0(x, y, z, t_k). \quad (4.232)$$

Здесь использованы результаты интегрирования

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} dt \iiint_V N_j \frac{\partial(n_0 c_n)}{\partial t} dv = \iiint_V N_j dv \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\partial(n_0 c_n)}{\partial t} dt = \iiint_V N_j (n_{0,k} c_{n,k} - n_{0,k-1} c_{n,k-1}) dv.$$

Учитывая, что в узловых точках (x_i, y_i, z_i)

$$c(x_i, y_i, z_i, t) \approx c_n(x_i, y_i, z_i, t) = a_i(t),$$

из начального условия (4.225) имеем n условий (при $t=0$)

$$c(x_i, y_i, z_i, 0) = a_i(0) = a_{i,0}, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (4.233)$$

которые будут условиями Коши для системы уравнений (4.229).

Из СЛАУ (4.231) при известном векторе $\vec{a}_0 = (a_{10}, a_{20}, \dots, a_{n0})$, определенном из (4.233), можем вычислить вектор $\vec{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})$, тем самым, согласно (4.227), приближенно построим поле концентрации $c(x, y, z, t_1)$. Далее, решая СЛАУ (4.231) на временном слое $t=t_2$ с использованием \vec{a}_1 , находим $c(x, y, z, t_2)$ и т.д. После m шагов получаем поле концентрации $c(x, y, z, t_m) = c(x, y, z, T)$.

Несколько слов о решении СЛАУ (4.231).

При $\sigma = 0.5$ СЛАУ совпадает с системой, получаемой из (4.229) с использованием схемы Кранка-Никольсона (после интегрирования по t в интервале (t_{k-1}, t_k)). Поскольку эта система получается путем дискретизации с использованием МКЭ, ее матрица является разреженной. Способ решения системы (4.231) зависит от знака и величины элементов матрицы, образованных из слагаемых $Q^{ij} - q_k^{ij} + \beta_k^{ij} + v_{nk}^{ij}$, точнее, от величины q_k^{ij} . Если модуль вектора скорости фильтрации $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ будет значительной, то дифференциальное уравнение (4.224) по характеру будет приближаться к гиперболическому уравнению и соответственно характер аппроксимирующей ее системы (4.231) также будет изменяться. Такая ситуация требует более внимательного отношения к выбору метода решения этой системы.

б) Приближенное решение сопряженной ретроспективной задачи относительно $c^*(x, y, z, t)$ проводится с помощью МКЭ по алгоритму, изложенному в предыдущем пункте. При этом следует отметить, что разбиение области V на элементы и количество узлов сетки остается без изменения, как и в пункте а).

в) На вычислении поля функции $c^* \approx c^* + \delta c^*$ при $t \in (0, T)$ следует остановиться более подробно. Функцию δc^* при известной функции $c^*(x, y, z, t)$ можно вычислить из интегро-дифференциального уравнения (4.201) или

(4.204), используя соответствующие «начальные» условия. Не занимаясь непосредственным решением уравнения (4.201), предложим более экономичный алгоритм.

С этой целью возвращаемся к возмущенной краевой задаче (4.192), (4.193), откуда относительно возмущенной функции δc^* получим краевую задачу

$$A\delta c^* = \delta p, (x, y, z) \in V, t \in (0, T), \quad (4.234)$$

$$l\delta c^* = \delta \alpha^*, (x, y, z) \in \Sigma, t \in (0, T) \quad (4.235)$$

с условием в конце отрезка времени

$$\delta c^*(x, y, z, t)|_{t=T} = \psi(x, y, z), (x, y, z) \in \Sigma. \quad (4.236)$$

Здесь операторы A и l определяются согласно (4.158), при этом $x_1=x$, $x_2=y$, $x_3=z$.

Приближенное решение задачи (4.234) – (4.236) получим МКЭ. Ее решение ищем в виде

$$\delta c_n^* = \sum_{i=1}^n \delta a_i^*(t) N_i(x, y, z), \quad (4.237)$$

где $\delta a_i^*(t)$ - неизвестные коэффициенты, N_i - линейные базисы конечных элементов.

Исходя из обобщенного принципа Галеркина относительно невязок уравнения и краевого условия, получим

$$\iiint_V N_j (\Lambda \delta c_n^* - \delta p) dv = - \iint_{\Sigma} N_j (l \delta c_n^* - \delta \alpha^*) d\sigma, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (4.238)$$

откуда на основании формулы Грина имеем

$$\begin{aligned} & \iiint_V N_j \frac{\partial(n_0 \delta c_n^*)}{\partial t} dv + \iiint_V D \left(\frac{\partial(\delta c_n^*)}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial(\delta c_n^*)}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial(\delta c_n^*)}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv + \\ & + \iiint_V \left(v_x \frac{\partial N_j}{\partial x} + v_y \frac{\partial N_j}{\partial y} + v_z \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \delta c_n^* dv + \iint_{\Sigma} N_j \beta \delta c_n^* d\sigma + \iint_{\Sigma} N_j v_n \delta c_n^* d\sigma = \\ & = \iiint_V N_j \delta p dv + \iint_{\Sigma} N_j \delta \alpha^* d\sigma, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.239)$$

При $t=T$, согласно (4.236), конечными условиями для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно искомым функций $\delta a_i^*(t)$ ($i=1,2,\dots,n$), будут

$$\delta \bar{a}^*(T) = (\delta a_1^*, \delta a_2^*, \dots, \delta a_n^*)|_{t=T} = (\psi(x_1, y_1, z_1), \psi(x_2, y_2, z_2), \dots, \psi(x_n, y_n, z_n)). \quad (4.240)$$

Приведение системы (4.239) к системе алгебраических уравнений и реализация ее на ЭВМ проводится аналогично системе (4.229).

г) Остановимся на проблеме уточнения значений коэффициента диффузии $D(x, y, z)$. С этой целью возвращаемся к возмущенной задаче относительно коэффициента диффузии (4.206), (4.207), которая распадается на две краевые задачи, а именно, на краевую задачу относительно D :

$$\Lambda^* c'^* = p', \quad (x, y, z) \in V, \quad (4.241)$$

$$l^* c^* ' = \alpha^* ', \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad (4.242)$$

и на возмущенную задачу относительно δD :

$$\delta \Lambda^* c^* ' = \delta p'', \quad (x, y, z) \in V, \quad (4.243)$$

$$\delta l^* c^* ' = \delta \alpha^* ', \quad (x, y, z) \in \Sigma \quad (4.244)$$

при любом $t \in (0, T)$.

Здесь возмущенные операторы $\delta \Lambda^*$ и δl^* определены согласно (4.208) – (4.209). Поскольку функция $c^* '$ определяется как решение задачи (4.192), (4.193) (или (4.241), (4.242)) совместно с конечным условием при $t=T$, то при известной функции $c^* '$ и заданных функциях $\delta p''$ и $\delta \alpha^* '$ из (4.243), (4.244) можно вычислить δD .

Решение возмущенной задачи (4.243), (4.244) построим с помощью обобщенного метода Галеркина с применением МКЭ, для чего приближенное решение ее представим в виде

$$\delta D_n = \sum_{i=1}^n \delta D_i N_i(x, y, z) \quad (4.245)$$

и из взвешенных невязок

$$\iiint_V (\delta \Lambda_n^* c^* ' - \delta p'') N_j dv = - \iint_{\Sigma} (\delta l_n^* c^* ' - \delta \alpha^* ') N_j d\sigma, \quad j=1, 2, \dots, n,$$

используя формулу Грина, приходим к системе n уравнений относительно искомых коэффициентов $\delta D_i = \delta D(x_i, y_i, z_i)$:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \iiint_V \left(\frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial c^*}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial c^*}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) \delta D_n dv = \\ & = \iiint_V N_j \delta p'' dv + \iint_{\Sigma} N_j \delta \alpha^* d\sigma - \iint_{\Sigma} N_j c^* \delta \beta d\sigma, \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\sum_{i=1}^n q_{ij} \delta D_i = \iiint_V N_j \delta p'' dv + \iint_{\Sigma} N_j \delta \alpha^* d\sigma - \iint_{\Sigma} N_j c^* \delta \beta d\sigma, \quad (4.246)$$

где

$$q_{ij} = \iiint_V N_i \left(\frac{\partial c^*}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial c^*}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial c^*}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z} \right) dv, \quad j=1,2,\dots,n.$$

Из СЛАУ (4.246) можно вычислить δD_i , и тем самым, согласно (4.245), получим приближенное решение

$$\delta D(x, y, z) \approx \sum_{i=1}^n \delta D_i N_i(x, y, z),$$

а затем и уточненное значение коэффициента диффузии:

$$D^{(1)}(x, y, z) = D^{(0)}(x, y, z) + \delta D(x, y, z) = \sum_{i=1}^n (D_i + \delta D_i) N_i. \quad (4.247)$$

д) Обратимся теперь к задаче уточнения коэффициента пористости грунта при предположении, что $n_0 = n_0(x, y, z, t)$. Уравнение (4.213), при наличии приближенного значения величины n_0 (т.е. ее начального приближения) в области V , дает возможность уточнить поле пористости грунта. Исходя из возмущенных уравнений (4.216) и (4.217), составляется уравнение, уточняющее поле функции $n_0(x, y, z, t)$ в области V при $t \in (0, T)$.

Итак, из (4.216) и (4.217) получаем цепочку уравнений:

– краевую задачу относительно функции $c^{* \prime}$

$$\tilde{\Lambda}^* c^{* \prime} = p', \quad (x, y, z) \in V, \quad t \in (0, T), \quad (4.248)$$

$$l^* c^{* \prime} = \tilde{\alpha}^*, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad t \in (0, T) \quad (4.249)$$

– и возмущенное уравнение относительно δm

$$-\delta n_0 \frac{\partial c^{* \prime}}{\partial t} = \delta \tilde{p}. \quad (4.250)$$

Поскольку функция $c^{* \prime}$ определяется как решение ретроспективной краевой задачи (4.248), (4.249) при дополнительном условии относительно $c^{* \prime}$ при $t=T$, то из уравнения (4.250) при известных $c^{* \prime}$ и $\delta \tilde{p}$ можно определить $\delta n_0(x, y, z)$. С этой целью эту функцию представим в виде

$$\delta n_{0,n} = \sum_{i=1}^n \delta n_{0,n}(t) N_i(x, y, z) \quad (4.251)$$

и из уравнения (4.250) на основании метода Галеркина имеем

$$\iiint_V \left(\delta n_{0,n}(t) \frac{\partial c^{*'}}{\partial t} + \delta \tilde{p} \right) N_j dv = 0, \quad j=1,2,\dots,n, \quad (4.252)$$

или, после подстановки (4.251)

$$\sum_{i=1}^n \delta n_{0,i}(t) \iiint_V N_i N_j \frac{\partial c^{*'}}{\partial t} dv = - \iiint_V N_j \delta \tilde{p} dv, \quad j=1,2,\dots,n. \quad (4.253)$$

Интегрируя (4.253) по t в интервале (t_{k-1}, t_k) и используя квадратурные формулы (4.230), приходим к СЛАУ относительно $\delta n_{0,ik}$:

$$\sum_{i=1}^n \sigma c_k^{ij} \delta n_{0,i,k} = - \sum_{i=1}^n (1-\sigma) c_{k-1}^{ij} \delta n_{0,i,k-1} - [\sigma d_k^j + (1-\sigma) d_{k-1}^j] \tau, \quad (4.254)$$

где

$$j=1, 2, \dots, n; \quad k=1, 2, \dots, n_0; \quad \tau = t_k - t_{k-1} = T/n_0,$$

$$\delta n_{0,i,k} = \delta n_{0,i}(t_k), \quad c_k^{*'} = c^*(x, y, z, t_k), \quad \delta \tilde{p}_k = \delta \tilde{p}(x, y, z, t_k),$$

$$c_k^{ij} = \iiint_V N_i N_j (c_k^{*'} - c_{k-1}^{*'}) dv, \quad d_k^j = \iiint_V N_j \delta \tilde{p}_k dv.$$

Таким образом, если известны (начальные) приближенные значения пористости грунта $n_0^{(0)}(x, y, z, t)$, полученные путем измерения, то, используя математическую модель задачи, согласно (4.254), построим поле вариаций $\delta n_0(x, y, z, t)$, после чего получим возможность уточнить значения коэффициента пористости, т.е. получим следующее приближение

$$n_0^{(1)}(x, y, z, t) = n_0^{(0)}(x, y, z, t) + \delta n_0(x, y, z, t).$$

Из вышеизложенного видно, что алгоритмы, полученные из теории возмущений, являются адаптирующимися в том смысле, что в процессе итераций значения коэффициентов $D(x, y, z)$ и $n_0(x, y, z, t)$ будут постепенно приближаться к реальной ситуации, описывая ее более точно. Ясно, что это возможно только при адекватной математической модели.

е) Совокупность вышеописанных алгоритмов дает возможность построить цельную вычислительную технологию, определяющую интересующие нас параметры.

Предполагается, что с помощью измерения или наблюдения нам известны поля коэффициентов диффузии $D^{(0)}$ и пористости грунта $n_0^{(0)}$, заданные с определенной погрешностью. Заметим, что на практике никакая из функций $D^{(0)}(x, y, z)$ и $n_0^{(0)}(x, y, z, t)$ не задается, а вместо них задаются их точечные значения в небольшом дискретном множестве точек. Образование из этих значений функций $D^{(0)}$ и $n_0^{(0)}$, принадлежащих к определенному классу, является задачей вычислителя.

Вернемся к рассмотрению задачи (4.224) – (4.226). Если, кроме искомой концентрации $c(x, y, z, t)$, будут неизвестными еще $D(x, y, z)$ и (или) $n_0(x, y, z, t)$, то рассматриваемая начально-краевая задача будет существенно нелинейной и недоопределенной, а математически - некорректно поставленной. Таким образом, кроме некорректности поставленной задачи возникает дополнительное затруднение, связанное с нелинейностью математической модели. Из-за этого, прежде чем образовать итерационную процедуру, мы должны быть уверены, что из многих ветвей решений найдем именно то решение, которое идентифицирует изучаемый нами объект, т.е. из множества решений мы должны выбрать единственно верное.

Для простоты изложения допустим, что функция $n_0(x, y, z, t)$ задана, а коэффициент $D(x, y, z)$ следует идентифицировать и пусть с помощью

измерений или наблюдений с некоторой точностью получены значения функции в некотором множестве точек, т.е. имеем

$$D(x_i, y_i, z_i) = D_i^{\circ}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (4.255)$$

где m – натуральное число ($m \approx 10 \div 20$). Считаем, что опорные точки (x_i, y_i, z_i) разбросаны по возможности равномерно по всей области V . Дополнительные условия (4.255) называются внутренними условиями.

Допустим, что функция $D(x, y, z)$ принадлежит пространству Соболева $W_2^{(0)}$, а функцию концентрации ищем в пространстве $W_2^{(1)}$. Область V разбивается на тетраэдральные элементы с таким расчетом, чтобы опорные точки (x_i, y_i, z_i) , в которых заданы точечные значения функции $D(x, y, z)$, совпадали с узлами сетки. Количество узлов равно n .

Начальное приближение коэффициента D образуем с помощью линейных базисов конечных элементов таким образом, чтобы в опорных точках было $D^{(0)}(x_i, y_i, z_i) = D_i^{\circ}$, а в остальных узлах принимает значения из интервала $(\min D_i^{\circ}, \max D_i^{\circ})$, т.е.

$$D_n^{(0)}(x, y, z) = \sum_{i=1}^n D_i^{(0)} N_i(x, y, z), \quad (4.256)$$

где $D_i^{(0)} = D^{(0)}(x_i, y_i, z_i)$, N_i – линейные базисы конечных элементов.

Понятно, что построенная вышеописанным способом функция является интегрируемой в области V .

Теперь приступим к описанию вычислительной технологии, состоящей из следующих шагов итерации.

Шаг 1. Принимая за начальное приближение искомого коэффициента значения $D_n^{(0)}(x, y, z)$ из (4.256) и решая начально-краевую задачу (4.224) –

(4.226), находим функцию $c_n^{(1)}(x, y, z, t)$ – первое приближение искомой функции.

Шаг 2. Решив ретроспективную задачу (4.164) – (4.167) при том же коэффициенте $D_n^{(0)}$, находим $c_n^{*(1)}(x, y, z, t)$ – первое приближение сопряженной функции.

Шаг 3. Решив СЛАУ, вытекающую из (4.239), находим вариацию δc_n^* в виде (4.237) и образуем поле сопряженной функции

$$c^{(1)*'} = c_n^{*(1)} + \delta c_n^* . \quad (4.257)$$

Шаг 4. Используя найденные значения $c_n^{(1)}$ и $c_n^{(1)*'}$, вычислим δD_n из СЛАУ (4.246). Вариация коэффициента D ищется в виде (4.245). После нахождения δD_n из (4.247) образуется коэффициент $D_n^{(1)}$.

Шаг 5. Подставляя найденные значения коэффициента $D_n^{(1)}$ в начально-краевую задачу (4.224) – (4.226), решая ее с помощью обобщенного метода Галеркина с применением МКЭ и выполнив первый шаг, находим $c_n^{(2)}$. При значении $D_n^{(1)}$, переходя к шагу 2, находим $c_n^{(2)*'}$, и далее, переходя к шагу 3, вычислим δc_n^* , а затем на шаге 4 находим $D_n^{(2)}$ и т.д. Во всех узлах проверяется условие

$$\max_i \left| D_i^{(v)} - D_i^{(v-1)} \right| < \varepsilon , \quad v = 1, 2, \dots \quad (4.258)$$

где $\varepsilon > 0$ - заданное малое число.

Теперь рассмотрим случай, когда функцию $D(x, y, z)$ можно считать заданной, а пористость грунта $n_0(x, y, z, t)$ нуждается в уточнении. Считаем, что в данном случае заданы внутренние условия типа (4.255) относительно

функции $n_0(x, y, z, t)$. Процесс идентификации этой функции проводится в следующей последовательности.

Шаг 1. При известных функциях $c_0(x, y, z)$, $D(x, y, z)$, $f(x, y, z, t_k)$, $\alpha(x, y, z, t_k)$, $\beta(x, y, z, t_k)$ и заданной $n_0^{(0)}(x_i, y_i, z_i, t_k)$ ($i=1, 2, \dots, n$) решаем задачу (4.224) – (4.226) и определяем первое приближение концентрации $c_n^{(1)}$.

Шаг 2. При тех же значениях пористости $n_{0,n}^{(0)}(t_k)$ из ретроспективной задачи (4.164) – (4.167) находим первое приближение сопряженной функции $c_n^{*(1)}$.

Шаг 3. Решая ретроспективную задачу, т.е. систему (4.239), вычислим значения вариации сопряженной функции δc_n^* и по формуле (4.257) получаем поле сопряженной функции $c_n^{(1)*}$.

Шаг 4. Используя значения функций $c_n^{(1)*}$ и $\delta \tilde{p}$, из системы (4.254) находим поле вариации $\delta n_0(x_i, y_i, z_i, t_k)$ и образуем первое приближение коэффициента пористости:

$$n_0^{(1)} = n_0^{(0)} + \delta n_0 \quad \text{при } t = t_k.$$

Шаг 5. После проверки условия

$$\max_i \left| n_{0i}^{(1)}(t_k) - n_{0i}^{(0)}(t_k) \right| < \delta, \quad (4.259)$$

если оно не выполняется, переходим к первому шагу при найденных значениях $n_{0i}^{(1)}(t_k)$. Прделав последовательно все этапы снова, получаем второе приближение $n_{0i}^{(2)}(t_k)$ и т.д. При выполнении условия (4.259) переходим на следующий временной слой.

После каждой итерации проверяется выполнение условия типа (4.258) относительно функции $c(x, y, z, t)$, а также условия, связанного с данными наблюдений за концентрацией загрязнителей.

Выводы

1. Методом теории малых возмущений и сопряженных дифференциальных уравнений разработаны алгоритмы идентификации гидрогеофизических параметров.

2. Задачи идентификации решаются в два этапа. На первом этапе численно интегрируются дифференциальные уравнения второго порядка относительно динамических и сопряженных к ним функций, а на втором – уравнения первого порядка относительно вариаций искомых функций.

3. На втором этапе получаются плохо обусловленные СЛАУ, для решения которых необходимо использовать дополнительную информацию об искомых функциях, позволяющую ослабить некорректность задач.

ГЛАВА 5

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО ИДЕНТИФИКАЦИИ ГИДРОГЕОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ

§ 5.1. Идентификация водопроницаемости в стационарном напорном потоке

Для достоверного описания процесса фильтрации подземных вод необходимо привести в соответствие математическую модель изучаемому объекту. В существующих методах моделирования все еще отсутствуют эффективные подходы идентификации основных гидрогеологических параметров среды. Из-за недостаточности информации исследователи используют в математических моделях не совсем достоверные, а в действительности грубо осредненные значения этих параметров.

Некоторые обратные задачи математической физики успешно решаются на основе методов теории малых возмущений и теории сопряженных функций [89,91]. В последнее время на основе этих теорий разработаны алгоритмы для идентификационных задач теории фильтрации [54]. Здесь мы рассмотрим применение указанных идей к идентификации водопроницаемости в плановой задаче напорной фильтрации подземных вод.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lh=f(x,y), \quad (x,y) \in D, \quad (5.1)$$

$$lh=\alpha(x,y), \quad (x,y) \in S=\partial D, \quad (5.2)$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial}{\partial y} \right) + Q, \quad l = T \frac{\partial}{\partial n} + \beta, \quad (5.3)$$

$h=h(x,y)$ – функция напора; $T=T(x,y)$ – водопроницаемость пласта; $Q=Q(x,y)$ – функция, учитывающая перетоки из выше – и ниже лежащих горизонтов; $f(x,y)$ – функция источников и стоков; $\alpha(x,y)$ и $\beta(x,y)$ – заданные функции.

Пусть правые части уравнения (5.1) и краевого условия (5.2) получают малые возмущения δf и $\delta \alpha$ соответственно. Тогда задача (5.1), (5.2) переходит в задачу

$$Lh'=f', \quad (x,y) \in D, \quad (5.4)$$

$$lh'=\alpha', \quad (x,y) \in S, \quad (5.5)$$

где

$$h'=h+\delta h, \quad f'=f+\delta f, \quad \alpha'=\alpha+\delta \alpha.$$

Из (5.4) и (5.5) с учетом краевой задачи (5.1), (5.2) приходим к краевой задаче относительно вариации δh :

$$L\delta h = \delta f, \quad (x,y) \in D, \quad (5.6)$$

$$l\delta h = \delta\alpha, \quad (x,y) \in S. \quad (5.7)$$

Задача (5.6), (5.7) при известных вариациях δf и $\delta\alpha$ позволяет построить поле вариаций напоров δh .

Краевые задачи (5.1), (5.2) и (5.6), (5.7) решаются методом конечных элементов (МКЭ) по одному и тому же алгоритму. Мы здесь приведем алгоритм решения задачи (5.1), (5.2) [48], а для решения задачи (5.6), (5.7) достаточно в алгоритме заменить функцию $f(x,y)$ на функцию $\delta f(x,y)$, а $\alpha(x,y)$ – на $\delta\alpha(x,y)$.

Разобьем область D на треугольные элементы с общим количеством узлов n . Решение задачи ищется в виде

$$h_n(x,y) = \sum_{j=1}^n h_j N_j(x,y), \quad (5.8)$$

где $h_j = h(x_j, y_j)$ – неизвестные коэффициенты, $N_j(x,y)$ – линейные базисы в МКЭ. Применение обобщенного метода Галеркина к задаче (5.1), (5.2) приводит к системе уравнений

$$\iint_D N_i(x,y)(Lh_n - f)d\sigma + \int_S N_i(x,y)(lh_n - \alpha)ds = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (5.9)$$

Используя формулу Грина, получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} h_j = f_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.10)$$

с коэффициентами

$$a_{ij} = \iint_D T(x, y) q(N_i, N_j) d\sigma + \iint_D N_i N_j Q(x, y) d\sigma - \int_S N_i N_j \beta(x, y) ds,$$

$$f_i = \iint_D N_i f(x, y) d\sigma + \int_S N_i \alpha(x, y) ds,$$

где

$$q(N_i, N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}.$$

Матрица системы (5.10) симметрична с диагональным преобладанием, поэтому ее можно решить методом Гаусса. Система (5.10) при известных коэффициентах $T(x, y)$, $Q(x, y)$, $\beta(x, y)$ и правых частях $f(x, y)$, $\alpha(x, y)$ дает приближенное решение задачи (5.1), (5.2).

Теперь рассмотрим случай, когда малые возмущения принимают не только правые части уравнений (5.1) и (5.2), но и их коэффициенты $T(x, y)$, $Q(x, y)$ и $\beta(x, y)$. Это равносильно изменению гидрогеологических характеристик пористой среды. Пусть вместо задачи (5.1), (5.2) имеем краевую задачу

$$L'h' = f'', \quad (x, y) \in D, \quad (5.11)$$

$$l'h' = \alpha'', \quad (x, y) \in S, \quad (5.12)$$

где

$$L' = L + \delta L, \quad h' = h + \delta h, \quad f'' = f' + \delta f',$$

$$l' = l + \delta l, \quad \alpha'' = \alpha' + \delta \alpha',$$

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta T \frac{\partial}{\partial y} \right) + \delta Q,$$

$$\delta l = \delta T \frac{\partial}{\partial n} + \delta \beta.$$

Из (5.11), (5.12) с учетом (5.4), (5.5) получаем краевую задачу

$$\delta Lh' = \delta f', \quad (x, y) \in D, \quad (5.13)$$

$$\delta h' = \delta \alpha', \quad (x, y) \in S. \quad (5.14)$$

Если известна функция $h'(x, y)$, отсюда можно получить уравнение относительно вариации искомой функции $\delta T(x, y)$. Решение задачи (5.13), (5.14) ищем в виде

$$\delta T(x, y) \approx \delta T_n(x, y) = \sum_{j=1}^n \delta T_j N_j(x, y), \quad (5.15)$$

где

$$\delta T_j = \delta T(x_j, y_j).$$

Применяя обобщенный принцип Галеркина к задаче (5.13), (5.14), имеем

$$\iint_D N_i (\delta Lh' - \delta f') d\sigma + \int_S N_i (\delta h' - \delta \alpha') ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя вместо δT ее разложение (5.15) и используя формулу Грина, приходим к СЛАУ относительно δT_j :

$$\sum_{j=1}^n \left(\iint_D N_j q(N_i, h') d\sigma \right) \delta T_j = \iint_D N_i \delta f' d\sigma - \iint_D N_i h' \delta Q d\sigma - \int_S N_i (h' \delta \beta - \delta \alpha') ds, \quad (5.16)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Система (5.16) является плохо обусловленной, так как функция $q(N_i, h')$ не обеспечивает системе диагонального преобладания и ее определитель близок к нулю. Поэтому для решения этой системы необходимо применить метод сингулярного разложения матрицы (SVD – метод) [183]. Кроме этого, мы должны располагать некоторым количеством

исходной информации об искомой функции, т.е. должны быть заданы ее экспериментальные значения в некотором множестве точек

$$T(x_s, y_s) = T^0(x_s, y_s), \quad s=1, 2, \dots, p. \quad (5.17)$$

Мы также используем субъективную информацию о гладкости искомой функции, другими словами, потребуем, чтобы ее вариация была близка к нулю. Тогда система (5.16) примет вид

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^n \left(\iint_D N_j q(N_j, h') d\sigma \right) \delta T_j + \mu \iint_D N_i \delta T_n d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^p (\delta T_s - T_s^0 + \tilde{T}_s) = \\ & = \iint_D N_i \delta f' d\sigma - \iint_D N_i h' \delta Q d\sigma - \int_S N_i (h' \delta \beta - \delta \alpha') ds, \quad i=1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.18)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta T_j = f_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (5.19)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} &= \iint_D N_j q(N_j, h') d\sigma + \mu \iint_D N_i N_j d\sigma + \gamma_j, \\ f_i &= \iint_D N_i \delta f' d\sigma - \iint_D N_i h' \delta Q d\sigma - \int_S N_i (h' \delta \beta - \delta \alpha') ds + \gamma_i (T_i^0 - \tilde{T}_i), \\ \gamma_s &= \begin{cases} \gamma, & \text{если } T_s^0 \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } T_s^0 \text{ не задано,} \end{cases} \quad s=i, j, k, \end{aligned}$$

γ, μ – положительные числа, выполняющие роль параметров регуляризации; \tilde{T} – значение T из предыдущей итерации.

Таким образом, вычислительная процедура идентификации функции $T(x, y)$ состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Располагая внутренние условия (5.17) в узлах сетки, образуем начальное приближение искомой функции в виде

$$T_n^{(0)}(x, y) = \sum_{i=1}^n T_i^{(0)} N_i(x, y), \quad (5.20)$$

где

$$\min_i T_i^{\vartheta} \leq T_i^{(0)} \leq \max_i T_i^{\vartheta}.$$

Решив краевую задачу (5.1), (5.2) с функцией $T_n^{(0)}(x, y)$, находим начальное приближение напорной функции $h_n^{(0)}(x, y)$.

Шаг 2. Решив задачу (5.6), (5.7) при той же функции $T_n^{(0)}(x, y)$ и заданных функциях $\delta f(x, y)$ и $\delta \alpha(x, y)$, находим вариацию напорной функции $\delta h(x, y)$ и образуем функцию

$$h'(x, y) = h^{(0)}(x, y) + \delta h(x, y).$$

Шаг 3. Используя полученную функцию $h'(x, y)$, решаем задачу (5.13), (5.14) относительно $\delta T(x, y)$ и образуем первое приближение водопроницаемости по формуле

$$T_n^{(1)}(x, y) = T_n^{(0)}(x, y) + \delta T_n(x, y).$$

Подставляя $T_n^{(1)}(x, y)$ вместо $T(x, y)$, повторяем шаги 1, 2, 3 и находим $T_n^{(2)}$ и т.д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i |T_i^{(v)} - T_i^{(v-1)}| < \delta, \quad (5.21)$$

где v – номер итерации, δ – заданное малое положительное число.

Вместо условия (5.21) может быть использовано аналогичное условие относительно напорной функции

$$\max_i |h_i^{(v)} - h_i^{(v-1)}| < \varepsilon. \quad (5.22)$$

На практике достаточно ограничиться выполнением условия (5.22), поскольку объективным признаком идентификации течения является поле напорной функции или расход жидкости.

Работа алгоритма проверена на решении тестовой задачи, рассмотренной в [130]. Областью фильтрации D является круг $x^2+y^2 \leq 0.25$, который разделен на 54 треугольника (элемента). Число узлов сетки (вершин треугольников) – 37, из них 18 – граничных. Максимальная длина сторон элемента (шаг сетки) равна 0.2. В области заданы функции $h(x,y)=x^2+y^2+5$, $Q(x,y)=0$, $f(x,y)=-40(2x^2+2y^2+1)$. Искомой функцией является $T(x,y)=10(x^2+y^2+1)$. Число узлов, в которых задаются экспериментальные (точные) значения искомой функции, равно: в I варианте $k=17$; во II варианте $k=13$; в III варианте $k=7$; в IV варианте $k=4$.

Область фильтрации и все функции, входящие в задачу, специально подобраны так, чтобы они обладали центральной и осевой симметрией и следовательно, искомое решение имело такие же свойства. Поэтому в табл.5.1 приведены значения искомой функции только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2, 4, 9, 15, 22 являются граничными.

В табл.5.2 решение данной задачи сравнивается с соответствующими результатами, полученными другим методом [117]. Сравнение показывает преимущество метода возмущений, которое имеет место несмотря на то, что экспериментальные значения напоров в данном случае вообще не задаются.

Таблица 5.1

Приближенные значения водопроводимости, полученные
методом малых возмущений

Узлы	Точ.знач $T(x,y)$	Приближенные значения $T(x,y)$			
		$p=17$	$p=13$	$p=7$	$P=4$
2	12.31	12.31	12.65	12.81	12.27

4	12.52	12.68	12.43	12.59	12.05
7	11.23	11.56	11.23	11.23	10.93
8	11.63	11.58	11.32	11.49	10.95
9	12.52	12.52	12.52	12.52	11.75
13	10.41	10.40	11.25	11.42	10.88
14	11.21	11.30	11.21	11.30	11.21
15	12.52	12.52	11.94	12.11	11.56
19	10.00	10.00	10.00	10.00	10.67
20	10.40	11.27	11.01	11.18	10.64
21	11.60	11.41	11.60	11.60	10.78
22	12.50	12.27	12.01	12.18	11.64

Таблица 5.2

Сравнение с результатами, полученными другими методами

	$p=17$			$p=7$			$p=4$		
	a	b	c	a	b	c	a	b	c
Абс. погр.	0.86	1.22	0.58	0.87	0.92	0.97	1.0	1.03	1.30
Отн. погр. в %	7.4	11.5	5,2	7.7	8.8	9.3	8.7	9.7	12.5

Примечание: a – погрешности, полученные методом малых возмущений,
 b – погрешности, полученные в работе [117],
 c – погрешности полученные методом регуляризации [132].

§ 5.2. Идентификация коэффициента диффузии в плановом напорном потоке

В связи с широким проникновением математических методов исследования в различные области таких наук, как почвоведение, мелиорация, гидрогеология и т. д., процессы конвективной диффузии в пористых средах заинтересовали математиков-прикладников. Уравнения конвективной диффузии в пористых средах описывают процессы влаго- и солепереноса в почвогрунте. Адекватное описание таких процессов имеет огромное значение для мелиорации засоленных земель аридной зоны.

Метод математического моделирования дает возможность получить количественное описание явления. Однако для построения математической модели, которая адекватно описывала бы реальный процесс, требуется детальное знание физического механизма явления, что в реальных условиях ввиду сложности объекта исследования не всегда выполнимо. Кроме того, при моделировании возникает необходимость определения параметров системы (коэффициента фильтрации, водопроницаемости, коэффициентов растворения, диффузии, сорбции и т. д.), которые сами являются функциями процесса и непосредственное измерение которых чрезвычайно затруднительно.

В этом параграфе мы рассмотрим применение метода малых возмущений к идентификации обобщенного коэффициента диффузии.

Процесс изменения концентрации загрязняющего вещества в водоносном пласте, обусловленное конвективным переносом с учетом дисперсии при отсутствии сорбции и кинетики химической реакции в стационарном режиме, описывается уравнением [99]

$$LC = g(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (5.23)$$

с граничным условием

$$lC = \alpha_c(x, y), \quad (x, y) \in S = \partial D, \quad (5.24)$$

где

$$L = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_x - D \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_y - D \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad l = D \frac{\partial}{\partial n} + \beta_c,$$

$C=C(x,y)$ –концентрация загрязняющего вещества в жидкости; $D=D(x,y)$ – обобщенный коэффициент диффузии или коэффициент гидродисперсии: $D=D_k + D_m$, D_k – коэффициент конвективной диффузии; D_m - коэффициент молекулярной диффузии; V_x и V_y –компоненты скорости фильтрации в условиях установившегося движения; $g= g(x,y)$ –функция, описывающая вклад загрязнителей; $\alpha_c=\alpha_c(x,y)$ и $\beta_c=\beta_c(x,y)$ –заданные функции.

Компоненты скорости фильтрации определяются по линейному закону Дарси

$$V_x = -k \frac{\partial h}{\partial x}, \quad V_y = -k \frac{\partial h}{\partial y}, \quad (5.25)$$

где $k= k(x,y)$ –коэффициент фильтрации; $h= h(x,y)$ –напорная функция, которая удовлетворяет уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial h}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial h}{\partial y} \right) + Qh = f(x, y) \quad (5.26)$$

с краевым условием

$$T \frac{\partial h}{\partial n} + \beta h = \alpha(x, y). \quad (5.27)$$

В уравнении (5.26) $T= T(x,y)=mk(x,y)$ –водопроницаемость, m - мощность пласта; $Q=Q(x,y)$ –функция перетока из нижележащих пластов; $f=f(x,y)$ –функция источников и стоков подземных вод; $\alpha = \alpha(x, y)$, $\beta = \beta(x, y)$ - заданные функции.

Задача заключается в идентификации коэффициента диффузии $D(x,y)$ в уравнениях (5.23) и (5.24). В работах [56,57] разработаны алгоритмы идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений, основанные на методе малых возмущений [89,91]. Согласно этим алгоритмам, вычислительный процесс состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Образует начальное приближение искомой функции $D^{(0)}(x,y)$. Для этого используем опорные (экспериментальные) значения этой функции

$$D^{(0)}(x_s, y_s) = D^s(x_s, y_s), \quad s=1, 2, \dots, p, \quad (5.28)$$

где p – число точек, где заданы значения D^s , ($1 \leq p < n$). Разобьем область D на m треугольников (элементов) с общим числом n таким образом, чтобы точки (x_s, y_s) , $s=1, 2, \dots, p$ совпали с вершинами треугольников. В остальных $n-p$ точках значения функции $D^{(0)}(x,y)$ подберем из интервала $[\min_s D_s^s, \max_s D_s^s]$ и представим искомую функцию в виде

$$D(x, y) \approx D_n(x, y) = \sum_{j=1}^n D_j N_j(x, y), \quad (5.29)$$

где $D_j = D(x_j, y_j)$ – неизвестные коэффициенты, $N_j(x, y)$ – линейные базисные функции в методе конечных элементов.

Используя начальное приближение $D^{(0)}(x,y)$, решаем задачу (5.23) и (5.24) и находим функцию $C^{(0)}(x,y)$. Для этого представим функцию $C(x,y)$ в виде разложения

$$C(x, y) \approx C_n(x, y) = \sum_{j=1}^n C_j N_j(x, y) \quad (5.30)$$

и к невязкам уравнений (5.23) и (5.24) применим обобщенный принцип Галеркина:

$$\iint_D N_i (LC_n^{(0)} - g) d\sigma + \int_S N_i (IC_n^{(0)} - \alpha) ds = 0, \quad i=1,2,\dots,n.$$

Применяя в двойном интеграле формулу Грина, приходим к системе уравнений

$$\begin{aligned} & \iint_D D^{(0)} q(N_i, C_n^{(0)}) d\sigma + \iint_D k C_n^{(0)} q(N_i, h) d\sigma + \int_S N_i C_n^{(0)} \beta_c ds - \\ & - \frac{1}{m} \int_S N_i C_n^{(0)} (h\beta - \alpha) ds = \iint_D N_i g d\sigma + \int_S N_i \alpha_c ds, \quad i=1,2,\dots,n. \end{aligned}$$

После подстановки вместо $C_m^{(0)}$ ее разложения (5.30) получаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} C_j^0 = g_i, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (5.31)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} = & \iint_D D^{(0)}(x, y) q(N_i, N_j) d\sigma + \iint_D N_j k(x, y) q(N_i, h) d\sigma + \\ & + \int_S N_i N_j \beta_c ds - \frac{1}{m} \int_S N_i N_j (\beta h - \alpha) ds, \\ g_i = & \iint_D N_i g(x, y) d\sigma + \int_S N_i \alpha_c ds, \quad q(N_i N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y}. \end{aligned}$$

Функция $h(x, y)$ определяется из задачи (5.26), (5.27). Решение этой задачи методом конечных элементов освещено достаточно широко (напр. в [48]), поэтому на алгоритме нахождения функции $h(x, y)$ мы не останавливаемся.

Система (5.31) хорошо обусловлена, ее матрица имеет диагональное преобладание, поэтому она может быть решена одним из точных методов.

Шаг 2. Используя первое приближение коэффициента диффузии $D^{(0)}(x, y)$, из краевой задачи

$$L\delta C = \delta g(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.32)$$

$$l\delta C = \delta c(x, y), \quad (x, y) \in S, \quad (5.33)$$

определяем вариацию концентрации $\delta C(x, y)$ в виде

$$\delta C(x, y) \approx \delta C_n(x, y) = \sum_{j=1}^n \delta C_j N_j(x, y) \quad (5.34)$$

и образуем функцию

$$C'(x, y) = C^{(0)}(x, y) + \delta C(x, y). \quad (5.35)$$

Задача (5.32), (5.33) решается по только что изложенному алгоритму путем замены функций $C(x, y)$, $g(x, y)$, и $\alpha(x, y)$ на их вариации.

Шаг 3. Теперь подвергаем возмущению не только правые части уравнений (5.23), (5.24), но и коэффициенты $D(x, y)$ и $\beta(x, y)$. Рассмотрим задачу

$$L'C' = g'' \quad (x, y) \in D, \quad (5.36)$$

$$l'C' = \alpha_c'' , \quad (x, y) \in S, \quad (5.37)$$

где

$$L' = L + \delta L, \quad l' = l + \delta l,$$

$$g'' = g' + \delta g', \quad \alpha_c'' = \alpha_c' + \delta \alpha_c', \quad g' = g + \delta g, \quad \alpha_c' = \alpha_c + \delta \alpha_c,$$

Поскольку функция $C'(x, y)$ является решением задачи

$$LC' = g', \quad l'C' = \alpha_c',$$

из (5.36), (5.37) получаем задачу

$$\delta LC' = \delta g', \quad (x, y) \in D, \quad (5.38)$$

$$\delta l C' = \delta \alpha'_c, \quad (x, y) \in S, \quad (5.39)$$

где

$$\delta L = \frac{\partial}{\partial x} \left(V_x - \delta D \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(V_y - \delta D \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \delta l = \delta D \frac{\partial}{\partial n} + \delta \beta_c.$$

Решение задачи (5.38), (5.39) ищется в виде

$$\delta D(x, y) \approx \delta D_n(x, y) = \sum_{j=1}^n \delta D_j N_j(x, y). \quad (5.40)$$

Подставляя (5.40) в уравнения (5.38), (5.39) и применяя обобщенный принцип Галеркина, приходим к системе уравнений относительно δD_j :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\iint_D N_j q(N_j, C') d\sigma \right) \delta D_j = - \iint_D N_j \left[\frac{\partial(V_x C')}{\partial x} + \frac{\partial(V_y C')}{\partial y} \right] d\sigma + \\ + \iint_D N_i \delta g' d\sigma - \int_S N_i (\delta \beta_c C' - \delta \alpha'_c) dS, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Первый интеграл в правой части (5.41) преобразуется в следующем виде

$$\iint_D N_j \left[\frac{\partial}{\partial x} (V_x C') + \frac{\partial}{\partial y} (V_y C') \right] d\sigma = \iint_D C' k q(N_i, h) d\sigma + \frac{1}{m_s} \int_S N_i C' (\beta h - \alpha) dS. \quad (5.42)$$

Система (5.41) является плохо обусловленной, поэтому для ее решения мы должны максимально использовать регуляризирующие факторы. Основными из этих факторов являются экспериментальные значения искомой функции (5.28). Другие факторы – это информация о качественных свойствах искомой функции. Предполагая, что искомая функция является гладкой и слабоизменяющейся, т. е. ее вариация близка к нулю. С учетом этих факторов и формулы (5.42) система уравнений (5.41) примет вид

$$\sum_{j=1}^n \left(\iint_D N_j q(N_i, C') d\sigma \right) \delta D_j + \mu \iint_D N_i \delta D_n d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^p (\delta D_s - D_s^{\circ} + \tilde{D}_s) = \iint_D N_j \delta g' d\sigma - \iint_D C' k q(N_i, h) d\sigma - \frac{1}{m_s} \int_S N_i c' (\beta h - \alpha) ds - \int_S N_i (c' \delta \beta_c - \delta \alpha_c') ds, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5.43)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta D_j = g_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (5.44)$$

где

$$a_{ij} = \iint_D N_j q(N_i, C') d\sigma + \mu \iint_D N_i N_j d\sigma + \gamma_j,$$

$$g_i = \iint_D N_i \delta g' d\sigma - \iint_D C' k q(N_i, h) d\sigma - \frac{1}{m_s} \int_S N_i C' (\beta h - \alpha) ds - \int_S N_i (C' \delta \beta_c - \delta \alpha_c') ds + \gamma_i (D_i^{\circ} - \tilde{D}_i),$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \gamma, & \text{если } D_s^{\circ} \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } D_s^{\circ} \text{ не задано, } s = i, j, k; \end{cases}$$

γ, μ - положительные числовые параметры.

Система (5.44) решается методом сингулярного разложения матрицы (SVD –методом) [183]. Определив $\delta D(x, y)$ из системы (5.44), образуем функцию

$$D^{(1)}(x, y) = D^{(0)}(x, y) + \delta D(x, y). \quad (5.45)$$

Подставляя $D^{(1)}(x, y)$ вместо функции $D^{(0)}(x, y)$, повторяем шаги 1, 2, 3 и находим $D^{(2)}(x, y)$ и т. д. Вычислительный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i |D_i^{(v)} - D_i^{(v-1)}| < \delta,$$

где ν – номер итерации, δ – заданное положительное число.

Работа алгоритма проверена на решении следующей тестовой задачи. Область D представляет собой круг $x^2 + y^2 \leq 0,25$. В этой области задаем исходные данные для (5.23), (5.24) и (5.26), (5.27):

$$C(x, y) = 2 \cdot (x^2 + y^2 + 5), \quad D(x, y) = 10 \cdot (x^2 + y^2) + 1,$$

$$H(x, y) = x^2 + y^2 + 5, \quad T(x, y) = 5, \quad Q(x, y) = 1.$$

Область D разбита на 54 элементарных треугольника с общим числом вершин (узлов сетки) $n = 37$. Задавая в p ($1 \leq p \leq n$) точках экспериментальные (точные) значения функции $D(x, y)$, определяем эту функцию во всех узлах сетки по описанному выше алгоритму. В табл.5.3 приведены точные и приближенные значения этой функции, лежащие в четверти круга.

Таблица 5.3

Точные и приближенные значения функции $D(x, y)$

Номера узлов		2	4	7	8	13	19	Отн.
Точ.знач.		3.31	3.52	2.22	2.62	1.41	1.00	погр. %
Приб. знач.	$p = 5$	3.22	2.69	2.11	2.00	1.40	0.89	11.5
	$p = 9$	3.28	3.12	2.07	1.98	1.39	0.89	12.2
	$p = 13$	3.32	3.31	3.31	2.13	2.22	0.09	8.7
	$p = 17$	3.46	3.31	2.36	2.53	1.41	0.93	6.6

§ 5. 3. Идентификация водопроводимости пористых сред в плановом нестационарном потоке

Рассмотрим применение теории малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений к проблеме идентификации водопроводимости пористой среды. Пусть имеем начально–краевую задачу

$$\Delta h = f(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.46)$$

$$h(x, y, 0) = h_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (5.47)$$

$$lh = \alpha(x, y, t), \quad (x, y) \in S = \partial D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.48)$$

где

$$\Delta = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad l = T \frac{\partial}{\partial n} + \beta, \quad (5.49)$$

$h = h(x, y, t)$ – функция напора; $T = T(x, y) = mk(x, y) > 0$ – водопроводимость, m – мощность пласта; $\mu = \mu(x, y) > 0$ – упругая водоотдача; $f(x, y, t)$ – функция, характеризующая работу водозаборов с учетом перетоков из выше – и / или ниже лежащих водоносных горизонтов; $h_0(x, y)$, $\alpha(x, y, t)$ и $\beta = \beta(x, y, t)$ – заданные функции.

Задача заключается в идентификации водопроводимости $T(x, y)$, используя экспериментальные значения этой функции, заданные в некотором множестве точек:

$$T(x_s, y_s) = T^s(x_s, y_s), \quad s = 1, 2, \dots, p. \quad (5.50)$$

Методика решения этой задачи дана в работе [55], поэтому, не останавливаясь на подробностях, опишем кратко этапы ее решения.

Шаг 1. Используя внутренние условия (5.50), образуем начальное приближение водопроводимости $T^{(0)}(x, y)$, где $\min_i T_i^s \leq T^{(0)}(x, y) \leq \max_i T_i^s$.

Решая задачу (5.46)–(5.48) при заданной функции $T^{(0)}(x,y)$, приближенно вычислим поле функции напора $h^{(0)}(x,y,t) \approx h_n(x,y,t)$.

Разобьем область D на треугольные элементы с общим числом узлов n . Узлы располагаем таким образом, чтобы экспериментальные значения водопроницаемости (5.50) находились в узлах сетки ($p < n$). Решение задачи (5.46)–(5.48) ищется в виде

$$h_n(x,y,t) = \sum_{i=1}^n h_i(t)N_i(x,y), \quad (5.51)$$

где $h_i(t)$ – неизвестный коэффициент, $N_i(x,y)$ – линейная базисная функция, относящаяся к узлу i .

Используя обобщенный метод Галеркина, составим систему уравнений

$$\iint_D N_i(\Delta h_n - f)d\sigma + \int_S N_i(lh_n - \alpha)ds, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (5.52)$$

или, после применения формулы Грина получаем n уравнений

$$\iint_D \left[N_i \mu \frac{\partial h_n}{\partial t} + T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial h_n}{\partial y} \right) \right] d\sigma + \int_S N_i \beta h_n ds = \iint_D N_i f d\sigma + \int_S N_i \alpha ds, \quad (5.53)$$

$$i=1,2,\dots,n.$$

Подставляя в (5.53) вместо h_n ее разложение (5.51), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $dh_i(t)/dt$. Из начального условия (5.47) образуем n начальных условий $h_i(t)|_{t=0} = h_i^{(0)}$, $i=1,2,\dots,n$. Таким образом, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $h_i(t)$, $i=1,2,\dots,n$ имеем задачу Коши, которая на основании схемы Кранка–Никольсона сводится к системе алгебраических уравнений относительно вектора $\vec{h}(t) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$. Получаем хорошо обусловленную систему линейных алгебраических

уравнений (СЛАУ), которая решается с шагом по времени $\tau = t_k - t_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, m$ при $t \in (0, T_0)$.

Шаг 2. Составляется задача, сопряженная к задаче (5.46)–(5.48):

$$A^* h^* = p(x, y, t), \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.54)$$

$$l^* h^* = \alpha^*(x, y, t), \quad (x, y) \in S, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.55)$$

где

$$A^* = -\mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad l^* = T \frac{\partial}{\partial n} + \beta = l.$$

Как видно из формулировки задачи (5.54), (5.55), она является ретроспективной (т.е. задачей с обратным течением времени). «Начальное» условие для этой задачи определяется из условия

$$h_{T_0}^* = h^*(x, y, T_0) = h_0 h_0^* / h_{T_0}. \quad (5.56)$$

Поскольку начальное условие для задачи (5.54), (5.55) задается произвольно, то для простоты можно полагать $h_0^* = 0$, тогда за «начальное» можно брать условие

$$h_{T_0}^* = h^*(x, y, T_0) = 0. \quad (5.57)$$

Решая ретроспективную задачу (5.54), (5.55) с начальным условием (5.56) или (5.57) обобщенным методом Галеркина, вычислим поле сопряженной функции $h^{*(0)}(x, y, t) \approx h_n^*$.

Шаг 3. Придавая правым частям уравнений (5.46) и (5.548) вариации δf и $\delta \alpha$, приходим к краевой задаче относительно вариации напорной функции

$$A \delta h = \delta f, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.58)$$

$$l\delta h = T \frac{\partial \delta h}{\partial n} + \beta \delta h = \delta \alpha, \quad (x, y) \in S \quad (5.59)$$

с начальным условием

$$\delta h(x, y, 0) = 0. \quad (5.60)$$

Решение задачи (5.58)–(5.60) ищется в виде

$$\delta h_n = \sum_{i=1}^n \delta h_i(t) N_i(x, y), \quad (5.61)$$

где $\delta h_i(t)$ – искомые коэффициенты. Исходя из обобщенного принципа Галеркина, имеем

$$\iint_D N_i \left[\mu \frac{\partial \delta h_n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(T \frac{\partial \delta h_n}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(T \frac{\partial \delta h_n}{\partial y} \right) - \delta f \right] d\sigma + \int_S N_i \left(T \frac{\partial \delta h_n}{\partial n} + \beta \delta h_n - \delta \alpha \right) ds = 0, \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

Интегрируя с применением формулы Грина, получим

$$\iint_D \left[N_i \mu \frac{\partial \delta h_n}{\partial t} + T \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial \delta h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial \delta h_n}{\partial y} \right) - N_i \delta f \right] d\sigma = \int_S (N_i \delta \alpha - N_i \beta \delta h_n) ds, \quad (5.62) \\ i = 1, 2, \dots, n.$$

После подстановки в (5.62) вместо δh_n ее разложения (5.61) приходим к линейной системе n обыкновенных дифференциальных уравнений относительно узлов i :

$$\frac{d\delta h(t)}{dt} = \left(\frac{d\delta h_1}{dt}, \frac{d\delta h_2}{dt}, \dots, \frac{d\delta h_n}{dt} \right).$$

Из начального условия (5.60) получим n условий Коши для системы (5.62), которые представляются в виде

$$\delta h(x_i, y_i, 0) = \delta h_i(0) = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (5.63)$$

Мы пришли к задаче Коши для системы (5.62) с начальным условием (5.63), которая с помощью разностной схемы Кранка–Никольсона сводится к СЛАУ. После решения системы (5.62) образуем поле функции h' :

$$h'_n(x, y, t) = h_n^{(0)}(x, y, t) + \delta h_n(x, y, t), \quad t \in (0, T_0).$$

Шаг 4. Решаем ретроспективную краевую задачу

$$A^* \delta h^* = \delta p, \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.64)$$

$$l^* \delta h^* = T \frac{\partial \delta h^*}{\partial n} + \beta \delta h^* = \delta \alpha^*, \quad (x, y) \in S \quad (5.65)$$

с начальным условием

$$\delta h^*(x, y, T_0) = 0 \quad (5.66)$$

и находим поле сопряженной функции

$$h_n^{*'}(x, y, t) = h_n^*(x, y, t) + \delta h_n^*(x, y, t), \quad t \in (0, T_0).$$

Шаг 5. Наконец, подвергая возмущению оператор ретроспективной задачи, получаем краевую задачу относительно функции $h^*(x, y, t)$:

$$A^{*'} h^{*'} = p', \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.67)$$

$$l^{*'} h^{*'} = \alpha^{*'}, \quad (x, y) \in S, \quad (5.68)$$

где

$$A^{*'} = A^* + \delta L, \quad l^{*'} = l' + \delta l,$$

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta T \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta T \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

$$\delta l = \delta \Gamma \frac{\partial}{\partial n} + \delta \beta,$$

$$p' = p + \delta p, \quad \alpha^{*'} = \alpha^* + \delta \alpha^*.$$

Из задачи (5.67), (5.68) с учетом уравнений (5.46) и (5.48) приходим к задаче

$$\delta L h^{*'} = \delta p, \quad \delta h^{*'} = \delta \alpha^*, \quad (5.69)$$

или

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta \Gamma \frac{\partial h^{*'}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta \Gamma \frac{\partial h^{*'}}{\partial y} \right) = \delta p', \quad (x, y) \in D, \quad t \in (0, T_0), \quad (5.70)$$

$$\delta \Gamma \frac{\partial h^{*'}}{\partial n} + \delta \beta h^{*'} = \delta \alpha^{*'}, \quad (x, y) \in S. \quad (5.71)$$

Решение краевой задачи (5.70), (5.71) ищем в виде

$$\delta \Gamma_n(x, y) = \sum_{i=1}^n \delta \Gamma_i N_i(x, y), \quad (5.72)$$

где $\delta \Gamma_i = \delta \Gamma(x_i, y_i)$ – значения искомого коэффициента в точке (x_i, y_i) .

Применяя к задаче (5.70), (5.71) принцип Галеркина, приходим к СЛАУ относительно $\delta \Gamma$:

$$\sum_{j=1}^n \delta \Gamma_j \iint_D N_j \left(\frac{\partial h^{*'}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial h^{*'}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) d\sigma = \iint_D N_i \delta p' d\sigma + \int_S N_i (\delta \alpha^{*'} - h^{*'} \delta \beta) ds, \quad (5.73)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

верную при любом $t \in (0, T_0)$, что указывает на слабую зависимость водопроницаемости пласта от времени.

Система (5.73) является плохо обусловленной, поэтому для ее решения необходимо использовать количественную и качественную информацию об

искомой функции. Таковыми являются, в частности, внутренние условия (5.50) и предположение о дифференциальных свойствах функции водопроводимости. Считая функцию водопроводимости гладкой и учитывая условия (5.50), прибавим к левой части уравнений слагаемые

$$\mu \iint_D N_i \delta T_n d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^p (\delta T_s - T_s^{\circ} + \tilde{T}_s),$$

где \tilde{T} – значения T из предыдущей итерации,

γ и μ – положительные числовые параметры.

Тогда получаем СЛАУ относительно δT_j :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta T_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.74)$$

где

$$a_{ij} = \iint_D N_j q(h^*, N_i) d\sigma + \mu \iint_D N_i N_j d\sigma + \gamma_j,$$

$$f_i = \iint_D N_i \delta p' d\sigma + \int_S N_i (\delta \alpha^{*'} - h^{*'} \delta \beta) ds + \gamma \sum_{s=1}^p (T_s^{\circ} - \tilde{T}_s)$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \gamma, & \text{если значение } T_s^{\circ} \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } T_s^{\circ} \text{ не задано,} \end{cases} \quad s = i, j, k,$$

$$q(h^*, N_i) = \frac{\partial h^{*'}}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial h^{*'}}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y}.$$

Решив систему (5.74) *SVD* – методом [183], образуем поле вариации искомой функции $\delta T(x, y)$ и составляем первое приближение водопроводимости

$$T^{(1)}(x, y) = T^{(0)}(x, y) + \delta T(x, y).$$

2	12.31	12.31	12.16	12.65	11.81	12.81	11.63	12.27	11.10
4	12.52	12.68	11.86	12.43	12.25	12.59	11.94	12.05	11.34
7	11.23	11.56	11.77	11.23	11.22	11.23	11.26	10.93	10.96
8	11.63	11.58	11.85	11.32	12.26	11.49	11.95	10.95	11.35
9	12.52	12.52	12.51	12.52	12.56	12.52	12.69	11.75	11.02
13	10.41	10.40	10.35	11.25	12.19	11.42	11.92	10.88	11.33
14	11.20	11.30	11.83	11.21	11.71	11.30	11.14	11.21	11.15
15	12.52	12.52	12.55	11.94	11.78	12.11	11.62	11.56	10.95
19	10.00	10.00	9.65	10.00	9.03	10.00	8.94	10.67	9.39
20	10.40	11.27	11.91	11.01	11.46	11.18	11.42	10.64	10.71
Продолжение таблицы 5.4									
21	11.60	11.41	11.90	11.60	10.74	11.60	11.13	10.78	10.75
22	12.50	12.27	11.90	12.01	11.83	12.18	11.62	11.64	10.75
Отн. погр.в %	7.4	7.0	7.6	10.7	7.7	12.0	8.7	16.0	

Примечание : a –стационарный случай

b –нестационарный случай

§ 5. 4. Идентификация коэффициента фильтрации в стационарном пространственном потоке подземных вод

Рассмотрим применение теории малых возмущений к идентификации коэффициента фильтрации в трехмерном уравнении установившейся фильтрации.

Рассмотрим краевую задачу

$$Lh = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in V, \quad (5.75)$$

$$lh = \alpha(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \Sigma = \partial V, \quad (5.76)$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad l = k \frac{\partial}{\partial n} + \beta,$$

$h=h(x,y,z)$ – функция напоров подземных вод; $k=k(x,y,z)$ –коэффициент фильтрации пористой среды; $f(x,y,z)$ –функция источников и стоков; $\alpha(x,y,z)$ и $\beta = \beta(x,y,z)$ – заданные функции.

Задача заключается в вычислении поля коэффициента фильтрации $k(x,y,z)$ при наличии экспериментальных значений этой функции в нескольких точках, полученных путем наблюдений и измерений

$$k(x_s, y_s, z_s) = k^{\circ}(x_s, y_s, z_s), \quad s = 1, 2, \dots, p. \quad (5.77)$$

Алгоритм решения задачи состоит из следующих этапов.

Шаг 1. Область фильтрации V разбивается на m тетраэдральных элементов с общим количеством узлов n . Используя экспериментальные значения (3), образуем начальное приближение коэффициента фильтрации $k^{(0)}(x_i, y_i, z_i)$, где $\min k^{\circ} \leq k_i^{(0)} \leq \max k^{\circ}$, $i=1, 2, \dots, n$. Сеточную область строим так, чтобы экспериментальные значения находились в узловых точках. Решая краевую задачу (5.75), (5.76) методом конечных элементов (МКЭ) при приближенных значениях $k(x,y,z) \approx k^{(0)}(x,y,z)$, вычислим начальное приближение поля напорной функции $h^{(0)}(x,y,z)$.

Решение задачи (5.75), (5.76) ищется в виде

$$h(x, y, z) \approx h_n(x, y, z) = \sum_{s=1}^n h_s N_s(x, y, z), \quad (5.78)$$

где $h_s=h(x_s, y_s, z_s)$ – искомые коэффициенты, $N_s(x,y,z)$ –линейные базисные

функции МКЭ.

С помощью обобщенного метода Галеркина краевая задача (5.75), (5.76) сводится к системе уравнений

$$\iiint_V N_i(Lh_n - f)dv + \iint_{\Sigma} N_i(lh_n - \alpha)d\sigma = 0, \quad i=1,2,\dots,n. \quad (5.79)$$

Используя формулу Грина в равенстве (5.79), и подставляя вместо $h_n(x,y,z)$ ее разложение (5.78), приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [119]:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}h_j = f_i, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.80)$$

с коэффициентами

$$a_{ij} = \iiint_V k(x,y,z)q(N_i,N_j)du + \iint_{\Sigma} N_iN_j\beta(x,y,z)d\sigma,$$

$$f_i = \iiint_V N_i f(x,y,z)du + \iint_{\Sigma} N_i \alpha(x,y,z)d\sigma,$$

где

$$q(N_i,N_j) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial z} \frac{\partial N_j}{\partial z}.$$

Система (5.80) хорошо обусловлена, ее матрица симметрична с диагональным преобладанием. Решая ее методом Гаусса, находим начальное приближение функции напоров $h^{(0)}(x,y,z)$.

Шаг 2. Придаем правым частям уравнений (5.75) и (5.76) малые возмущения δf и $\delta \alpha$ соответственно. Тогда правые части примут вид $f' = f + \delta f$ и $\alpha' = \alpha + \delta \alpha$ и вместо задачи (5.75), (5.76) мы получим задачу

$$Lh' = f', \quad (x,y,z) \in V, \quad (5.81)$$

$$lh' = \alpha', \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (5.82)$$

где $h' = h + \delta h$.

Из (5.81), (5.82) с учетом задачи (5.75), (5.76) приходим к краевой задаче относительно вариации δh :

$$L\delta h = \delta f, \quad (x, y, z) \in V, \quad (5.83)$$

$$l\delta h = \delta\alpha, \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (5.84)$$

Решая задачу (5.83), (5.84) при заданных вариациях δf и $\delta\alpha$ МКЭ по изложенному алгоритму, вычисляем функцию

$$\delta h_n(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \delta h_i N_i(x, y, z) \quad (5.85)$$

и образуем функцию

$$h'_n(x, y, z) = h_n^{(0)}(x, y, z) + \delta h_n(x, y, z).$$

Шаг 3. Теперь придаем малые возмущения не только правым частям уравнений (5.81) и (5.82) но и их операторам:

$$L'h' = f'', \quad L' = L + \delta L, \quad f'' = f' + \delta f', \quad (x, y, z) \in V, \quad (5.86)$$

$$l'h' = \alpha'', \quad l' = l + \delta l, \quad \alpha'' = \alpha' + \delta\alpha', \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (5.87)$$

где

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\delta k \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$\delta l = \delta k \frac{\partial}{\partial n} + \delta\beta.$$

Из (5.86), (5.87) с учетом (5.81), (5.82) получаем краевую задачу

$$\delta Lh' = \delta f', \quad (x, y, z) \in V, \quad (5.88)$$

$$\delta h' = \delta \alpha', \quad (x, y, z) \in \Sigma, \quad (5.89)$$

Применяя к задаче (5.88), (5.89) обобщенный принцип Галеркина, приходим к системе уравнений

$$\iiint_V N_i (\delta Lh_n' - \delta f') du + \sum_{\Sigma} N_i (\delta h_n' - \delta \alpha') d\sigma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.90)$$

После использования формулы Грина получаем уравнения

$$\iiint_V \delta k \cdot q(N_i, h_i') du = \iiint_V N_i \delta f' du + \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - \delta \beta \cdot h_i') d\sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.91)$$

В этой системе все функции, кроме $\delta k(x, y, z)$, известны. Представляя эту функцию в виде

$$\delta k(x, y, z) \approx \delta k_n(x, y, z) = \sum_{j=1}^n \delta k_j \cdot N_j(x, y, z)$$

из (5.91) имеем СЛАУ относительно δk_j :

$$\sum_{j=1}^n \left(\iiint_V N_j q(N_i, h_n') du \right) \delta k_j = \iiint_V N_i \delta f' du + \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - \delta \beta \cdot h_n') d\sigma \quad (5.92)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Система (5.92) плохо обусловлена, оператор $q(N_i, h_n')$ не обеспечивает диагональное преобладание, так как напорная функция слабоизменяющаяся и ее производные по x и y практически постоянны. В такой ситуации внутренние условия (5.77) являются сильными регуляторами, но они задаются не во всех узлах, поэтому для ослабления некорректности системы (5.92) следует использовать дифференциальные свойства искомой функции.

В частности, предполагая, что вариация функции $\delta k(x, y, z)$ близка к нулю, перепишем систему (5.92) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\iiint_V N_i q(N_i, h_n') du \right) \delta k_j + \mu \iiint_V N_i \delta k_n d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^p (\delta k_s - k_s^{\text{э}} + \tilde{k}_s) = \\ = \iiint_V N_i \delta f' du + \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - h_n' \delta \beta) d\sigma, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5.93)$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \delta k_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.94)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} = \iiint_V N_j q(N_i, h_n') dv + \mu \iiint_V N_i N_j dv + \gamma_i, \\ f_i = \iiint_V N_i \delta f' du + \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - h_n' \delta \beta) d\sigma + \gamma \sum_{s=1}^p (k_s^{\text{э}} - \tilde{k}_s), \end{aligned}$$

γ и μ – параметры регуляризации, \tilde{k} – значения k из предыдущей итерации.

Решив систему методом сингулярного разложения матрицы (SVD–методом) [183], находим функцию $\delta k_n(x, y, z)$ и образуем первое приближение искомой функции

$$k^{(1)}(x, y, z) = k^{(0)}(x, y, z) + \delta k(x, y, z).$$

На этом одна итерация счета завершается.

Подставляя функции $k^{(1)}(x, y, z)$ в уравнения (5.75), (5.76) и повторяя шаги 1–3, получаем второе приближение $k^{(2)}(x, y, z)$ и т. д. Итерационный процесс продолжается до выполнения условия

$$\max_i |k_i^{(\nu)} - k_i^{(\nu-1)}| < \varepsilon,$$

где ε – заданное число, ν – номер итерации.

Систему уравнений (5.94) можно написать относительно искомой функции $k(x, y, z)$. Учитывая, что $\delta k = k - \tilde{k}$, где $\tilde{k} = \tilde{k}(x, y, z)$ – функция, полученная из предыдущей итерации, из (5.93) получаем систему

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \iiint_V N_j q(N_i, h_n') dv + \mu \iiint_V N_i N_j dv + \gamma_j \right\} k_j = \iiint_V N_i \delta f' dv +$$

$$+ \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - h_n' \delta \beta) d\sigma + \sum_{j=1}^n \left\{ \left[\iiint_V N_j q(N_i, h_n') dv + \mu \iiint_V N_i N_j dv \right] \tilde{k}_j + \gamma_j k_j^3 \right\}, \quad (5.95)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

или

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} k_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.96)$$

где

$$a_{ij} = \iiint_V N_i q(N_i, h_i') dv + \mu \iiint_V N_i N_i dv + \gamma_j$$

$$f_i = \iiint_V N_i \delta f' dv + \iint_{\Sigma} N_i (\delta \alpha' - h_n' \delta \beta) d\sigma + \mu \iiint_V N_i N_j \tilde{k} dv + \sum_{s=1}^p \gamma_s k_s^3,$$

$$\gamma_s = \begin{cases} \gamma, & \text{если значение } k_s^3 \text{ задано,} \\ 0, & \text{если } k_s^3 \text{ не задано, } s = i, j, k, l. \end{cases}$$

В целях проверки работы алгоритма и программы решена следующая тестовая задача. Область фильтрации представляет собой прямой круглый цилиндр высотой $z = 0.4$:

$$V = \{x^2 + y^2 \leq 0.25, \quad 0 \leq z \leq 0.4\},$$

который разбит на 108 призматических фрагментов высотой $\Delta z = 0.2$, а каждая призма – на 3 тетраэдра. Общее число узлов равно 111. Исходными данными задачи являются:

$$h(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 5,$$

$$f(x, y, z) = -20(5h - 22).$$

Искомая функция равна $k(x, y, z) = 10(x^2 + y^2 + z^2 + 1)$.

В табл. 5.5 приведены точные и приближенные значения искомой функции, соответствующие первому октанту, полученные методом малых возмущений (столбец *a*) и методом регуляризации (столбец *b*).

Таблица 5.5

Сравнение точных и приближенных значений
коэффициента фильтрации

Знач. z	Узлы	Точн. знач.	Приближенные значения					
			$p=51$		$p=27$		$p=12$	
			<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>a</i>	<i>b</i>
$z=0$	2	12,31	12,31	12,31	11,75	11,72	11,80	12,50
	4	12,52	12,01	11,82	11,76	11,75	11,00	12,51
	7	11,23	12,02	11,81	11,23	11,22	11,10	12,56
	8	11,63	12,01	11,82	11,75	11,75	10,87	12,49
	9	12,52	12,52	12,52	12,52	12,52	10,97	12,52
	13	10,41	10,41	10,41	11,75	11,80	11,11	11,42
	14	11,21	11,21	12,50	11,76	11,72	11,21	12,52

	15	12,52	12,52	12,52	10,97	11,75	11,23	12,49
	21	11,60	12,02	11,81	11,60	11,60	10,97	12,53
	22	12,50	12,01	11,82	11,75	11,74	10,65	12,50
$z=0.2$	39	12,71	12,71	12,71	12,15	12,15	11,37	12,90
	41	12,92	12,24	12,23	12,16	12,17	12,12	12,95
	44	11,63	12,24	12,25	11,63	11,62	11,34	12,89
	45	12,03	12,92	12,23	12,15	12,15	11,57	12,84
	46	12,92	11,81	12,92	12,92	12,92	11,37	12,91
	50	10,81	12,00	10,81	12,14	12,16	11,34	12,50
Продолжение таблицы 5.5								
	51	11,61	12,92	12,23	12,16	12,15	10,40	12,96
	52	12,92	12,24	12,92	12,15	12,14	11,37	12,92
	58	12,00	12,26	12,25	12,00	11,99	11,13	12,80
$z=0.4$	59	12,90	12,24	12,24	12,15	12,14	11,37	12,93
	76	13,91	13,91	13,91	13,35	13,35	12,57	14,55
	78	14,11	13,42	13,43	13,34	13,36	13,56	14,11
	81	12,83	13,40	13,42	12,83	12,83	12,58	14,10
	82	13,23	13,42	13,41	13,35	13,35	12,89	14,21
	83	14,12	14,12	14,12	14,12	14,12	12,03	14,12
	87	12,01	12,01	12,00	13,35	13,35	12,57	13,98
	88	12,81	13,43	13,42	13,34	12,37	12,81	14,33
	89	14,12	14,12	14,12	13,35	13,35	12,57	14,12
	95	13,20	13,43	13,42	13,20	13,19	13,00	14,13
	96	14,10	13,42	13,44	13,35	13,32	13,12	14,54
Отн.погр. %			11,2	11,5	12,9	13,3	14,8	16,4

Из табл. 5.5 видно, что методом малых возмущений получается более точное решение по сравнению с методом регуляризации, к тому же метод регуляризации требует огромного количества вычислений, пропорциональных количеству узлов сетки. Например, в данном случае в методе регуляризации прямая задача (5.75), (5.76) решается 60 – 80 тысяч раз, поэтому данная идентификационная задача требует около 5 часов 20 минут машинного времени Pentium II, тогда как эта же задача методом малых возмущений решается за время меньше минуты.

Выводы

1. Путем использования качественной и количественной информации об искомым функциях и более современных методов решения систем линейных алгебраических уравнений разработана усовершенствованная методика идентификации гидрогеологических параметров, позволяющая свести некорректные задачи к комплексу устойчивых вычислительных алгоритмов.

2. На основе теории малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений разработаны и реализованы эффективные алгоритмы идентификации основных гидрогеологических параметров пористых сред (коэффициентов фильтрации, водопроницаемости, упругой водоотдачи, диффузии, пористости и т.д.).

3. Комплекс алгоритмов идентификации отличается простотой и технологичностью, он состоит всего из двух блоков: первый блок решает прямую и сопряженную (ретроспективную) задачи (причем по одному и тому же алгоритму), второй – плохо обусловленную СЛАУ относительно вариации искомой функции, где используются регуляризирующие факторы.

4. Работа комплекса алгоритмов отлажена на решении ряда двумерных и трехмерных стационарных и нестационарных тестовых задач. Сравнение точных и приближенных значений идентифицируемых функций показывает достаточную для практики гидрогеологических расчетов эффективность предполагаемой методики.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построены и реализованы алгоритмы приближенного решения пространственных нестационарных задач фильтрации подземных вод совместно с уравнениями переноса загрязнителей МКЭ и МФ с граничными условиями общего вида. Разработанная методика дает возможность моделировать движение напорного комплекса подземных вод совместно с грунтовым потоком в гидродинамической постановке. Путем использования качественной и количественной информации об искомых функциях и более современных методов решения систем линейных алгебраических уравнений разработана усовершенствованная методика идентификации гидрогеологических параметров, позволяющая свести некорректные задачи к комплексу устойчивых вычислительных алгоритмов.

2. При решении натуральных задач о плановых и пространственных потоках подземных вод в однородных и кусочно-однородных пластах целесообразно применять метод фрагментов, при этом объем вычислений в МФ существенно сокращается (до 25%) по сравнению с МКЭ, а точность аппроксимации коэффициентов СЛАУ в обоих методах имеет одинаковый порядок. В объектах со сложными границами МФ следует использовать совместно с МКЭ с тем, чтобы конечные элементы дополняли фрагменты до границ области фильтрации.

3. Впервые в практике гидрогеологических расчетов на основе метода регуляризации, теории малых возмущений и теории сопряженных дифференциальных уравнений разработаны и реализованы эффективные алгоритмы идентификации основных гидрогеофизических параметров пористых сред (коэффициентов фильтрации, водопроницаемости, упругой водоотдачи, диффузии, пористости и т.д.).

Комплекс алгоритмов идентификации отличается простотой и технологичностью, он состоит всего из двух блоков: первый блок решает прямую и сопряженную (ретроспективную) задачи (причем по одному и тому же алгоритму), второй – плохо обусловленную СЛАУ относительно вариации искомой функции, где используются регуляризирующие факторы.

4. Работа комплекса алгоритмов апробирована на решении ряда многомерных стационарных и нестационарных модельных задач. В прогнозных задачах точность аппроксимации использованных методов хорошо согласуется с теоретическими оценками, а результаты решения идентификационных задач показывают достаточную для практики гидрогеологических расчетов эффективность предлагаемой методики.

5. Адекватность использованных математических моделей, экономичность и надежность методики решения прогнозных и идентификационных задач, достоверность полученных результатов проверены на отдельных МПВ, расположенных в Кыргызстане, путем сопоставления результатов счета с данными наблюдений по этим объектам. Выводы исследований дают основание полагать, что предлагаемая методика решения задач фильтрации подземных вод найдет применение в гидрогеологических расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абуталиев Ф.Б., Баклушин М.Б., Ербаков Я.С. и др. Анализ динамики подземных вод аналитическими и численными методами.-Ташкент: ФАН, 1975.-151 с.
2. Абуталиев Ф.Б., Вахитов Г.Г. Разностные методы решения задач разработки нефтяных месторождений.-Л.: Недра, 1970.-257 с.
3. Абуталиев Ф.Б., Мавлюдов С.Н., Эшанкулов Э. Идентификация параметра водопроводимости неоднородного водоносного грунта // В кн.: Вопросы вычислительной и прикладной математики. Вып.42.-Ташкент, 1976.- С.143-148.
4. Абуталиев Ф.Б. и др. Методы математического моделирования гидрогеологических процессов. –М.: Недра, 1972.- 64 с.
5. Авилина И.В. Краткий обзор методов решения обратных задач геофильтрации // В кн.: Материалы 6-й конференции аспирантов и молодых ученых. Охрана геол. среды 1979. – М.: Изд-во МГУ, 1979. – С. 20-31.
6. Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В. Экспериментальные методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1988.
7. Андреев В.Б., Кряквина С.А. О функции источника сеточного оператора Лапласа // ЖВМ и МФ, 1972, 12, №2, С. 364-373.
8. Андреев В.Б., Кряквина С.А. Аппроксимация задачи о совершенной скважине. В сб.: “Исследования по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений.” - М.: Изд-во МГУ, 1973.
9. Аравин В.И., Нумеров С.Н. Теория движения жидкостей и газов в недеформируемой пористой среде. М.: Гостехиздат, 1953. – 616 с.

10. Бабушка И., Витасек Э., Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1969. – 368 с.
11. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968.
12. Белякова В.К. Неустановившийся приток грунтовых вод к скважинам // Прик. мат. и мех. 20, № 1, 1956, С. 109-115.
13. Бондаренко Н.Ф. Физика движения подземных вод. – Л.: Гидрометеоиздат, 1973. – 215 с.
14. Боровский Б.В., Самсонов Б.Г., Язвин Л.С. Методика определения параметров водоносных горизонтов по данным откачек. – М.: Недра, 1973. – 304 с.
15. Boulton N. The Drawdown of the water – table under nonsteady conditions near a pumped well in a unconfined formation // Proc. Inst. Civil Engrs, 1954, № 3, pp. 564-579.
16. Бочеввер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М. Основы гидрогеологических расчетов. – М.: Недра, 1969. – 367 с.
17. Бочеввер Ф.М., Лапшин Н.Н., Орадовская А.Е. Защита подземных вод от загрязнения. – М.: Недра, 1979.
18. Бочеввер Ф.М., Орадовская А.Е. Гидрогеологическое обоснование защиты вод и водозаборов от загрязнения. – М.: Недра, 1972.
19. Бреббия К., Уокер С. Применение метода граничных элементов в технике. – М.: Мир, 1974. – 126 с.
20. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-механические основы фильтрации воды. – М.: Мир, 1971. – 452 с.
21. Васильев С.В. и др. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод. – М.: Колос, 1979. – 336 с.
22. Васильев С.В. и др. Методы фильтрационных расчетов гидромелиоративных систем. – М.: Колос, 1970. – 440 с.

- 23.Вахитов Г.Г. Эффективные способы решения задач разработки нефтеводоносных пластов методом конечных разностей. –М.: Гостехиздат, 1963.
- 24.Веригин Н.Н. Стационарный режим фильтрации и конвективного рассеяния вещества в потоке подземных вод при наличии инфильтрации и испарения // В кн.: Методы расчета процессов массопереноса в гидрогеологических исследованиях. - М.:1984.-С.22-25
- 25.Веригин Н.Н. Некоторые вопросы химической гидродинамики, представляющие интерес для мелиорации и гидротехники // Изв. АН СССР, ОТН, 1953, №10, С.1369–1382.
- 26.Веригин Н.Н. О кинетике растворения солей при фильтрации воды в грунтах. Растворение и выщелачивание горных пород. –М.: Госстройиздат, 1957.- С. 84–114.
- 27.Веригин Н.Н. Основы теории растворения и вымыва солей при фильтрации воды в горных породах и грунтах // В кн.: Инженерно–геологические свойства горных пород и методы их изучения. –М.: Изд-во АН СССР, 1962, С. 59–70.
- 28.Веригин Н.Н. О фильтрации растворов и эмульсий в пористой среде. 2–й Всес. съезд по теор. и прикл. мех. Аннот. докл.–М.: Наука, 1964.- С. 50.
29. Веригин Н.Н., Шержуков Б.С. Диффузия и массообмен при фильтрации жидкостей в пористых средах // В кн.: Развитие исследований по теории фильтрации в СССР.– М.: Наука, 1969.–С. 237–313.
- 30.Веселов В.В., Мирлас В.М., Степаненко В.М. Задачи оптимального управления геофильтрационными системами //В кн.: Вычислительные методы в геологоразведке.-Новосибирск, 1986.- С.53-73
- 31.Владимиров В.С. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1981. – 512 с.

32. Гавич И.К. Применение моделирования к обработке гидрогеологической информации.-М.: Недра, 1971.-89 с.
33. Гавич И.К. Теория и практика моделирования в гидрогеологии. - М.: Недра, 1980.-385 с.
34. Гавич И.К., Шестаков В.М. Вопросы постановки и методики моделирования водозаборов и дренажей подземных вод на орошаемых территориях.- В кн.: Некоторые вопросы развития мелиорации в СССР.- М.,1975.- С.129-144.
35. Георгиевский В.Б. Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров.-Киев: Наукова думка, 1971.-327с.
36. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород. Под ред. Н.Н. Веригина. -М.: Недра, 1977.-272 с.
37. Гидродинамические основы прогноза режима грунтовых вод.-М.: Изд-во АН СССР, 1960.-190с.
38. Гласко В.Б., Захаров М.В., Колп А.Н. О применении метода регуляризации к решению одной обратной задачи нелинейной теории теплопроводности // ЖВМ и МФ, 1975, 15, №6, С.1607-1611.
39. Гончарский А.В., Черепашук А.М., Ягола А.Г. Численные методы решения обратных задач астрофизики.-М.:Наука, 1978.-335 с.
40. Гороховский В.М. Некоторые проблемы решения обратных задач на сеточных моделях // В кн.: Гидрогеология и инженерная геология. - Новочеркасск, 1977, С.60-67.
41. Гороховский В.М., Язвин Л.С. К вопросу определения коэффициентов фильтрации в многослойных водоносных горизонтах // Тр. ВСЕГИНГЕО, вып. 32, 1970.- С. 57-63.
42. de Marsily, G., J. P. Delhomme, F. Delay, A. Abuoro, An overview on forty years of inverse problems in hydrogeology, *C. R. Acad. Sci., Ser. IIa*, 329(2) 73-87 1999.

43. Гудзь В.И. О принципах построения алгоритмов решения обратных задач теории фильтрации на гибридных вычислительных устройствах. – В кн.: Результаты и методы исследований. – М., 1975. – С. 120–127.
44. Джаманбаев М.Дж. Методы решения и идентификации параметров математической модели процессов переноса. – Бишкек: Илим, 1996. – 121 с.
45. Джаманбаев М.Дж., Бийбосунов Б., Джаныбеков Ч. и др. Методы идентификации и решения задач гидрогеодинамики // VI всесоюз. съезд по теорет. и прикл. мех. Ташкент, 24-30 сентября 1986 г.: Аннотация докл. – Ташкент, 1986. – С. 105.
46. Джаманбаев М.Дж., Джолдошева Д.О. Об одном подходе к идентификации коэффициента фильтрации // В кн.: Материалы VIII Межресп. конф. молодых ученых. – Фрунзе: Илим, 1986. – С. 40.
47. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. – Фрунзе: Илим, 1982. – 280 с.
48. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989. – 183 с.
49. Джаныбеков Ч., Джаманбаев М.Дж., Бекболотов Д. Методы фильтрационных расчетов в слоистых средах. – Фрунзе: Илим, 1983. – 144 с.
50. Джаныбеков Ч.Д., Джаманбаев М.Д., Дуйшоков К.Д. Определение водопроводимости пласта численно–аналитическим методом // Проблемы автоматизации и управления. – Бишкек: Илим, 1997. №1. – С. 86–91.
51. Джаныбеков Ч.Д., Дуйшоков К.Д. Идентификация параметров переноса в модели переноса загрязнителей в пористых средах // Материалы Международной научно–практич. конф. «Проблемы механики и прикладной математики», посв. памяти проф. Ф.И. Франкля. Том 1. Механика. – Бишкек: БВК, 1995. – С. 36–39.
52. Джаныбеков Ч., Карагулов Д. Об одном эффективном методе приближенного решения самосопряженной краевой задачи с подвижными

- границами. – Фрунзе: 1974. – 20 с. Рукопись предст. ред. жур. «Известия АН Кирг. ССР». – Деп. в ВИНТИ 16.07.74, №1946–74.
53. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Вариационно-разностный метод решения задач подземной фильтрации // ВИНТИ АН СССР, 1974, №182-74, ДЕП.
54. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Идентификация коэффициента фильтрации пористой среды методом теории возмущений // Вестник ИГУ, №7, 2002. – С.24–34.
55. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Идентификация гидрогеологических параметров среды в нестационарных течениях подземных вод // Вестник ИГУ, №7, 2002. – С. 72–84.
56. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Идентификация параметров в задаче о переносе загрязнителей в пористой среде // Вестник ИГУ, №8, 2002. – С. 38–50.
57. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Алгоритмы для определения коэффициента диффузии и пористости грунта // Вестник ИГУ, №8, 2002. – С. 50–58.
58. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. – Бишкек: Илим, 2005. – 180с.
59. Джаныбеков Ч., Токтогулов Б.А. К приближенному исследованию прямых и обратных задач без напорной фильтрации // Динамика многофазных сред (VI Всесоюз. сем. «Численные методы решения задач фильтрации многофазной несжимаемой жидкости»). – Новосибирск: Ин-т. теорет. и прикл. мех. , 1983. – С. 127-131.
60. Джаныбеков Ч., Уралиев А.А., Картанова А.Дж. Об одном экономичном методе решения задач неустановившейся фильтрации // Проблемы

- автоматики и управления: Научно–технический журнал НАН КР. – Бишкек: Илим, 1999.–С.116–121.
61. Winter, G., J. Periaux, M. Galan, E. Cuesta, *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Sciences*, John Wiley New York, 1995. Winter, G., J. Periaux, M. Galan, E. Cuesta, *Genetic Algorithms in Engineering and Computer Sciences*, John Wiley New York, 1995.
62. Дуйшоков К.Д. Решение двумерной задачи солепереноса в пористой среде // Тезисы докладов Респ. науч. конф. «Матем. моделирование и проблемы автоматизации». – Фрунзе: Илим, 1990. –С. 47.
63. Emsellem Y., G. De Marsily. Automatic solution for the in inverse problem. «Water Resources Research», v.7, 1971 №5, pp. 1264-1280.
64. Gates C.S. , Kisiel C.C. Worth of Additional Data to a Digital Computer Model of a Groundwater Basin. –Water Resour. Res., 1974, 10, №5, p. 1031–1038.
65. Gomez-Hernandez, J. J., A. Sahuquillo, J. E. Capilla, Stochastic simulation of transmissivity fields conditional to both transmissivity and piezometric data, 1, Theory, *J. Hydrol.*, 203 162-174 1997.
66. Haims Y.Y., Perrine R.L., Wister D.A. Identification of Aquifer Parameters by Decomposition and Multilevel Optimization : Contribution №123. – University of California, Water Resources Center, 1968.
67. Hill, M. C., R. L. Cooley, D. W. Pollock, A controlled experiment in groundwater flow model calibration, *Ground Water*, 36(3) 520-535 1998.
68. Holland, J., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, Univ. of Mich. Press Ann Arbor, 1975.
69. Жернов И.Е., Павловец И.Н. Моделирование фильтрационных процессов.-Киев: Вища школа, 1976.-192 с.
70. Жернов И.Е., Шестаков В.М. Моделирование фильтрации подземных вод.-М.: Недра, 1971.-224 с.

71. Жуковский Н.Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод. –М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.–с. 184–206.
72. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов в технике . –М.: Мир, 1975. 541 с.
73. Karpouzou D. K., Delay F., Katsifarakis K. L., de Marsily G. A multipopulation genetic algorithm to solve the inverse problem in hydrogeology. *Water Resour. Res.*, 37 (9) 2291-2302 2001.
74. Kleinecke D. Use of Linear Programming for Estimating Geohydrologic Parameters of Groundwater Basin. –*Water Resour. Res.*, 1971, 7, №2, p. 367–381.
75. Климентов П.П., Кононов В.М. Методика гидрогеологических исследований. –М.: Высшая школа, 1978. - 408 с.
76. Коннор Дж., Бреббия К. Метод конечных элементов в механике жидкости. – Л.: Судостроение, 1979. – 264 с.
77. Костяков А.Н., Фаворин Н.Н., Аверьянов С.Ф. Влияние оросительных систем на режим грунтовых вод. –М.: Изд–во АН СССР, 1956.
78. Крашин И.И. Моделирование фильтрации и теплообмена в водонапорных системах.–М.: Недра, 1976.–159с.
79. Куранов Н.П. Теория массопереноса в безнапорных фильтрационных потоках / В кн.: Методы расчета процессов массопереноса в гидрогеологических исследованиях.– М.: 1984.- С. 14–18.
80. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Васильев В.Г. Многомерные обратные задачи.–М.: Наука, 1969.–67 с.
81. Латтес Р., Лионс Ж.Л. Метод квазиобращения и его приложения.–М.: Мир, 1970.
82. Lavenue, A. M., A new pilot point inverse method in hydrogeology: Generating an ensemble of conditionally-simulated transmissivity fields, Ph.D. thesis, Sch. of Mines Paris, 1998.

83. Lavenue, A. M., B. S. RamaRao, G. de Marsily, M. G. Marietta, Pilot point methodology for automated calibration of an ensemble of conditionally simulated transmissivity fields, 2, Applications, *Water Resour. Res.*, 31(3) 495-516 1995.
84. Лифшиц В.М., Красс М.С. Сравнительный анализ некоторых методов численных расчетов задач стационарной фильтрации // *Водные ресурсы*, 1979. №4. –С. 130-145.
85. Ломакин Е.А., Мироненко В.А., Шестаков В.М. Численное моделирование геофильтрации.–М.: Недра, 1988.–220. с.
86. Lovell R., Duckstein L., Kisiel C.C. Use of subjective Information in Estimation of Aquifer Parameters. –*Water Resour. Res.*, 1972,8, №3, p. 680–690.
87. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование миграции подземных вод.– М.:Недра, 1976.–208 с.
88. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации . – М.: Недра , 1976. – 407 с.
89. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. -М.:Наука, 1980.- 536 с.
90. Марчук Г.И. О постановке некоторых обратных задач // *ДАН СССР*, 1964, 156, №3, - С. 503–506.
91. Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. –М.: Наука, 1982.- 319 с.
92. Марчук Г.И. Применение сопряженных уравнений к решению задач математической физики // *Успехи механики*, 1981, №1.
93. Марчук Г.И., Орлов В.В. К теории сопряженных функций / В кн. *Нейтронная физика*. – М.: Госатомиздат, 1961.- С. 30–45.
94. Математические методы в гидрогеологии.– Киев, 1977.–21с. (Об–во «Знание» УССР).

95. Математическое моделирование для решения гидрогеологических задач. - Ташкент: Фан, 1971.-245 с.
96. Материалы межведомственного совещания по вопросам прогнозирования гидрогеологических, инженерно-геологических и почвенно - мелиоративных условий. Вып.1.-М.,1977.-143с. (ВНИИГИМ, Минводхоз СССР).
97. Материалы 3-го семинара по применению геофизических и математических методов при гидрогеологических и инженерно-геологических исследованиях.-М., 1970.-242с.(ВСЕГИНГЕО).
98. Методы геохимического моделирования и прогнозирования в гидрогеологии. -М.: 1988. -254 с.
99. Методы охраны подземных вод от загрязнения и истощения. Под ред. И.К. Гавич. -М.: Недра, 1985.- 320 с.
100. Мироненко В.А. Оценка фильтрационных параметров по данным дренажных работ // Изв. ВУЗов. Геология и разведка, 1972, №10.-С. 71-76.
101. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Теория и практика интерпретации опытно-фильтрационных работ.-М.: Наука, 1978.-325 с.
102. Мироненко В.А., Шестаков В.М. Основы гидрогеомеханики . - М.: Недра , 1974 - 295 с.
103. Michalewicz, Z., Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs, 2nd ed. Springer-Verlag New York 1994.
104. Моделирование и управление водно-солевым режимом почв. -Алма-Ата: Наука, 1976.-180 с.
105. Моделирование нестационарных процессов.-Киев: 1977. -196с. (Ин-т математики АН УССР).
106. Морозов В.А. Методы регуляризации неустойчивых задач.-М.: Изд.- во МГУ, 1987.-216 с.

107. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач.-М.: Изд.-во МГУ, 1974.-359 с.
108. Морозов В.А. О принципе невязки при решении несовместных уравнений // ЖВМ и МФ, 13, №5, 1973.-С. 1999-2011.
109. Морозов В.А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации // ЖВМ и МФ, 8, №2, 1968,- С.296-309.
110. Морозов В.А. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. -М.: Наука, 1987.
111. McLaughlin, D., L. R. Townley, A reassessment of the groundwater inverse problem, *Water Resour. Res.*, 32(5) 1131-1161 1996.
112. Morshed, J., J. J. Kalaurachchri, Application of artificial neural network and genetic algorithm in flow and transport problem, *Adv. Water Resour.*, 22(2) 145-158 1998a.
113. Morshed, J., J. J. Kalaurachchri, Parameter estimation using artificial neural network and genetic algorithm for free-product migration, *Water Resour. Res.*, 34(5) 1101-1113 1998b.
114. Мурзакматов М.У. О решении граничной обратной задачи фильтрации методом регуляризации // Респ. научно–техн. конф. по вопросам технологии и автоматизации гидромелиоративных систем. –Фрунзе, 1977. С. 29–31.
115. Мурзакматов М.У. Определение фильтрационного сопротивления дрены методом регуляризации // Тезисы докладов Всесоюзного научно–техн. семинара «Матем. моделирование гидрогеологических процессов». –М.: ВСЕГИНГЕО, 1981.– С. 47–48.
116. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М. Об идентификации коэффициента фильтрации в неоднородном водоносном горизонте // Вестник ИГУ, №3, 1999.-С. 73-77.

117. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Байболотов Б.А. Об одном приближенном методе идентификации течения жидкости в пористых средах // Вестник ИГУ, №4, 2000.-С. 94-99.
118. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Исабеков К.А. Приближенное решение задач фильтрации подземных вод с использованием фрагментности области // Вестник ИГУ, №4, 2000.- С. 104-108.
119. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Имангазиева К. Краевая задача для пространственной квазистационарной фильтрации // Материалы научно-практич. конф., посвященной 5-летию образования НГУ: Нарын, 2001.
120. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А., Джаныбеков Б. Нестационарное пространственное течение подземных вод // Вестник ИГУ, №5, 2001.-С. 152-159.
121. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Исабеков К.А. Приближенное решение задачи напорной фильтрации методом конечных элементов с квадратичными базисами // Материалы международной науч. конф. «Модернизация высшей школы в переходный период: состояние и перспективы », посвященной 50-летию образования КГПУ им. И. Арабаева, Бишкек, 2002. –С. 362-367.
122. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М., Сартов Б.К. Об определении расхода грунтовых вод // Вестник ИГУ, №6, 2002.- С. 15-20.
123. Мурзакматов М.У., Ажыгулова Н.Т., Иманбердиева Г.Э. Одномерная задача массопереноса // Вестник ИГУ, №7, 2002.-С. 61-66.
124. Мурзакматов М.У., Ажыгулова Н.Т. Плановая задача переноса загрязнителей в подземных водах // Материалы респ. науч.-практич. конф. «Проблемы социально-экономического развития горных районов Кыргызстана».- Жалал-Абад, 2002.

125. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой задачи для пространственной нестационарной фильтрации подземных вод методом фрагментов // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 21 – 26.
126. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Применение метода конечных элементов с квадратичными базисами к решению задач напорной фильтрации подземных вод // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 26-33.
127. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Об идентификации водопроводимости напорного потока методом теории возмущений. // Вестник ИГУ, №9, Каракол, 2003. –С. 49-54.
128. Мурзакматов М.У. Приближенное решение стационарного уравнения массопереноса //Вестник ИГУ, №11, 2004.-С. 10 – 13.
129. Мурзакматов М.У. Математическая модель переноса загрязнителей в подземных водах при нестационарном режиме // Вестник ИГУ, №11, 2004.-С. 14 – 19.
130. Мурзакматов М.У. Идентификация водопроводимости пористых сред в плановом нестационарном потоке // Проблемы спектроскопии и спектрометрии: Межвузовский сборник научных трудов. - Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004. Вып.17, - С. 74 – 83.
131. Мурзакматов М. У., Мамыров Ж.М. Приближенное решение уравнения Буссинеска методом конечных элементов // Проблемы спектроскопии и спектрометрии: Межвузовский сборник научных трудов. - Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2004. Вып.17, -С. 83 – 89.
132. Мурзакматов М. У., Исабеков К. А. Приближенное решение краевой задачи пространственной стационарной фильтрации подземных вод // Вестник ИГУ, № 10, Каракол, 2004,- С. 209-213.
133. Мурзакматов М. У. Математическое моделирование в процессе обучения (на примере моделирования динамики подземных вод) // Вестник ИГУ, №10, 2004. – С. 200-204.

134. Мурзакматов М. У., Байболотов Б. А. Об идентификации водопроводимости напорного потока методом теории возмущений // Материалы Международного научно – технического симпозиума «Образование через науку», т. 1. – Бишкек, 2004. – С. 188-192.
135. Мурзакматов М.У., Асанакунова Ж.Т. Приближенная идентификация коэффициента диффузии в плановом напорном потоке подземных вод // Вестник ИГУ, №13, Каракол, 2005. – С.65-70.
136. Мурзакматов М.У., Мамыров Ж.М. Идентификация водопроводимости пласта методом регуляризации // Доклады НАН Республики Казакстан, Алматы, №6, 2004. – С. 82-87.
137. Мурзакматов М. У., Ажыгулова Н. Т. Математическая модель переноса загрязнителей в подземных водах при стационарном режиме // Вестник Оренбургского государственного университета, № 4 (42), Оренбург, 2005. – С. 119-123.
138. Мурзакматов М.У., Исабеков К.А. Приближенное решение краевой задачи пространственной стационарной фильтрации подземных вод // Вестник Оренбургского государственного университета, №5 (43), Оренбург, 2005.– С.93-102.
139. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации напорного пласта методом регуляризации // 2nd international conference on electronics and computer in Kyrgyzstan, Bichkek, 2005. – pp. 186 -191.
140. Мурзакматов М.У. Идентификация водопроводимости пласта в стационарном потоке подземных вод // Вестник ИГУ, № 15, Каракол, 2005. – С. 105–110.
141. Назаретов В.М. Применение методов адаптации и обучения для уточнения характеристик нефтяных пластов // Нефтяное хозяйство, 1971, №5, - С.53-37.

142. Nelson R.W. In place determination of permeability distribution for heterogeneous porous media through analysis of energy dissipation.-J. Soc.,Petrol/ Eng., 1968,1,p. 33-42.
143. Nelson R.W. In place measurement of permeability in heterogeneous media 2. Experimental and computational consideration.-J. Geophys. Res., 1961,2(3),p. 2469-2478.
144. Некорректные задачи математической физики и анализа. - Новосибирск: Наука, 1984.
145. Некорректные задачи естествознания, -М.: Наука, 1990.
146. Nestor D., Amitav R. An Identification Approach to subsurface Hydrological Systems. *Water Resour. Res.*, 1975, v. 11, №6, pp. 1005–1012.
147. Neuman S. Calibration of Distributed Parameter Groundwater Flow Models. «*Water Resour. Res.*»,v.9.,1973,№4, p.1006-1021.
148. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1978.-400 с.
149. Огильви Н.А. Расчет процессов водообмена на основе принципа наименьшего действия // *Водные ресурсы*, 1974.-№2.-С. 17-28.
150. Огильви Н.А. Физические и геологические поля в гидрогеологии.-М.: Наука, 1974.-160 с.
151. Огильви Н.А., Семендяева Л.В. Математическая модель водообмена в слоистых структурах артезианских бассейнов // *Водные ресурсы*, 1978.-№1.- С. 29-40.
152. Oliveira, R., D. P. Loucks, Operating rules for multi-reservoir systems, *Water Resour. Res.*, 33(4) 839-852 1997.
153. Полубаринова – Кочина П.Я. Некоторые задачи плоского движения грунтовых вод. -М.– Л.: Изд. АН СССР, 1942.–144 с.
154. Полубаринова – Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. - М.:Наука,1977.-664 с.

155. Полубаринова-Кочина П.Я., Пряжинская В.Г., Эмих В.Н. Математические методы в вопросах орошения. - М.: Наука, 1969.- 414 с.
156. Применение вычислительной техники при гидрогеологических исследованиях.– М.: Недра.1969.–220с.
157. Применение математических методов при гидрогеологических и инженерно–геологических исследованиях. Вып.34.–М., 1970.–109с. (ВСЕГИНГЕО).
158. Развитие исследований по теории фильтрации в СССР. –М.: Наука, 1969.–545с.
159. Рекомендации по применению ЭВМ для фильтрационных расчетов. – М.,1971.–84с. (ВОДГЕО).
160. Philipson G.A. Identification of Distributed Systems.–New York: American Elsevier Publishing Company, Ins., 1971.
161. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики.–М.: Наука, 1984.-269с.
162. Руководство к электроинтегратору ЭИ–12.–М.: Изд–во АН СССР, 1953.–223с.
163. RamaRao, B. S., A. M. Lavenue, G. de Marsily, M. G. Marietta, Pilot point methodology for automated calibration of an ensemble of conditionally simulated transmissivity fields, 1, Theory and computational experiments, *Water Resour. Res.*, 31(3) 475-493 1995.
164. Самарский А.А. Теория разностных схем.–М.:Наука, 1977. - 656 с.
165. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений.–М.: Наука, 1978 с.
166. Capilla, J. E., J. J. Gomez-Hernandez, A. Sahuquillo, Stochastic simulation of transmissivity fields conditional to both transmissivity and piezometric data, 2, Demonstration on a synthetic aquifer, *J. Hydrol.*, 203 175-188 1997.

167. Сегерлинд Л. Применение методов конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
168. Системный подход к управлению водными ресурсами. –М.: Наука, 1985.– 392 с.
169. Sun, N. Z., Inverse Problems in Groundwater Modeling, Kluwer Acad. Norwell, Mass., 1994.
170. Тихонов А.Н. Об устойчивости обратных задач // ДАН СССР 39, №5, 1943 - С. 195-198
171. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач // ДАН СССР 153, №1, 1963 - С. 49-52
172. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // ДАН СССР 151, №3, 1963 - С. 501-504
173. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.- М.: Наука, 1974.-233 с.
174. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. О применении метода регуляризации в задачах геофизической интерпретации // Физика Земли, 1975, №1, - С. 38-48.
175. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах // ЖВМ и МФ, 1965, 5, №3, - С.463-473.
176. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1990.
177. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1977. -736 с.
178. Труды координационных совещаний по гидротехнике. ВНИИГ им. Б. Веденеева.–Л.:Энергия,1965, вып.21.–229с.; 1966, вып.25.–248с.; 1967,вып.35.–432с.
179. Успенский А.Б., Федоров В.В. О постановке и решении задачи планирования эксперимента для некоторых обратных задач

- математической физики / В кн.: Приближенные методы решения задач оптимального управления и некоторых некорректных обратных задач.-М., 1972, - С. 82-97.
180. Уилкинсон Дж., Райнш К. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. – М.: Машиностроение, 1976 . – 390 с.
181. Файбишенко Б.А. Водно–солевой режим грунтов при орошении. – М.: Недра, 1986.–3002 с.
182. Физическое и математическое моделирование в мелиорации.–М.: Колос, 1973.–414с.
183. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. - 279 с.
184. Фрид Ж. Загрязнение подземных вод.– М.: Мир, 1981.–225 с.
185. Frind O., Pinder G. Galerkin Solution of the Invers Problem for Aquifer Transmissivity. "Water Resources Reseach". V.9,1973,№5, pp.1397-1410.
186. Vemuri V., Karplus W.J. Identification of Nonlinear Parameters of Groundwater Basins by Hybrid Computations.–Water Resour. Res., 1969, 5, №1,p. 172–185.
187. Шестаков В.М. Теоретические основы оценки подпора, водопонижения и дренажа.-М.: Изд-во МГУ, 1965.-233 с.
188. Шестаков В.М. Динамика подземных вод . –М.: Изд-во МГУ, 1973. – 334 с.
189. Щелкачев В.Н Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Гостехиздат, 1959.–467 с.
190. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.-М.: Мир, 1975.-676 с.
191. Язвин Л.С., Карулина В.Ф., Фаренгольц З.Д. К вопросу определения основных расчетных гидрогеологических параметров // Тр. ВСЕГИНГЕО, вып. 17, 1969.– С. 113–136.

192. Winter, G., J. Periaux, M. Galan, E. Cuesta, Genetic Algorithms in Engineering and Computer Sciences, John Wiley New York, 1995.
193. Yeh, W. W. G., Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology: The inverse problem, *Water Resour. Res.*, 22(1) 95-108 1986.
194. Zimmerman, D. A., et al., A comparison of seven geostatistically based inverse approaches to estimate transmissivities for modeling advective transport by groundwater flow, *Water Resour. Res.*, 34(6) 1373-1413 1998.