УДК 51(07) 3713

Абдылдаев К.К., Салыков С.С.,Төлөгожоева Н.О.

К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ТРАНСЦЕНДЕНТТИК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ОКУТУУДА ОКУУЧУЛАРДЫН КОМПЕТЕНТТҮҮЛҮГҮН КАЛЫПТАНДЫРУУ

Макала айрым трансценденттик функцияларды жогорку класстарда окутууда окуучулардын компетенттүүлүгүн калыптандыруунун жолдорун жана каражаттарын талдоого арналган.

Педагогика илиминде жана окутуу практикасында кийинки кездерде компетенттүүлүктү калыптандыруу маселесине олуттуу көңүл бурулууда. Ошол эле учурда бул түшүнүктүн мазмуну боюнча, аны пайдаланылуучуларды толук ынандыра турган бирдиктеги пикир жок экендигин белгилөө керек. Маселен, компетенттүүлүк түшүнүгү ар түрдүү багытта каралышы мүмкүн экендиги белгиленүүдө (маселен, педагогдун профессионалдык компетенттүүлүгүн билим, маданият, сапат жана билгичтиктердин системасы ж.б. аспектилерде кароо сунушталат).

Биз компетенттүүлүк катарында билим берүүнүн стандартында белгилегендей, инсандын тигил же бул багытта ишмердүүлүгүн сапаттуу аткарууга мүмкүндүк бергендей деңгээлде топтолгон билимдердин, билгичтиктердин, көндүмдөрдүн жана адамдык сапаттардын динамикалуу комбинациясын түшүнөбүз. Мына ошентип, окуучулардын компетенттүүлүгүн калыптандырууда теориялык терең билимдин да мааниси чоң.

Биз макалабызда айрым трансценденттик функциялардын касиеттерин окутуунун мисалында, окутуунун салттуу жана азыркы методдорунун оптималдуу түрдө айкалыштырып колдонуу менен, жогорку класстын окуучуларынын компетенттүүлүгүн калыптандырууну улантуу маселесине талдоо жүргүзмөкчүбүз.

Программа жана окуу китептеринде [2, 13-14; 3, 213-228] көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялар сыяктуу трансценденттик функциялардын түрлөрүн окуп үйрөнүүгө өзгөчө көңүл бөлүнгөн. Жалпы билим берүүчү орто мектепте математиканы окутуунун өзгөчөлүгүн эске алуу менен, айрыкча, көрсөткүчтүү функция жана анын касиеттерин окутуу үстүртөдөн жүргүзүлөрү белгилүү. Маселен, иррационалдуу көрсөткүчтүү даража түшүнүгү жөн гана окуучулардын интуициясына жана функциянын графигине таянуу менен киргизилет да, натыйжада, көрсөткүчтүү функциянын касиеттери далилдөөсүз эле окуучуларга сунушталат. Бирок математиканы тереңдетип окутуучу класстарда (мектептерде) дидактиканын илимийлүүлүк принцибин жана окутуунун өзгөчөлүгүн эске алуу менен, көрсөткүчтүү функция жөнүндөгү маалыматтарды, биздин оюбузча, бир топ жогорку деңгээлде берүүгө мүмкүн. Макалада көрсөтүлгөн багытта окутуунун мазмуну, о.э. жолдору жана каражаттары талкууланмакчы. Сөз болуп жаткан функциялар жөнүндө окуучулардын акыл-сезиминде оң мотивди пайда кылуу үчүн алардын илимде жана практикада колдонулушу жөнүндө кыскача айтып берүү максатка ылайыктуу.

Илимий-методикалык адабияттарда [3, 429] адегенде рационалдуу сандардын көптүгүндөгү көрсөткүчтүү даража түшүнүгүн өтүү сунушталат. Төмөнкүдөй аныктаманы сунуштоого болот.

Аныктама. Иррационалдуу көрсөткүчтүү a^{α} даражасы деп $\lim\limits_{n\to\alpha} a^{r_n} = a^{\alpha}$ (1) пределин айтабыз. Мында r_n рационалдык сандардын α га умтула турган ар кандай удаалаштыгы. Бул аныктама мааниге ээ болуш үчүн (1) пределдин бар экендигин далилдөө талап кылынат. Бул фактыны далилдөө үчүн рационалдык сандардын α га жыйналуучу каалаган r_1, r_2 ... r_n... удаалаштыгы үчүн a^{r_1} , a^{r_2}, $a^{r_3}...a^{r_n}$ ...тиешелүү удаалаштыгы ошол эле бир пределге ээ болоорун далилдейбиз. Табылган предел a^{α} нын мааниси үчүн кабыл алынат. Чындыгында эле, α чекитинин каалаган аймагында рационалдуу чекиттер бар болгондуктан, α га жыйналуучу монотондуу өсүүчү $r'_1, r'_2, \ldots r'_n \ldots$ (2) удаалаштыгын түзүүгө болот. Сөз болуп жаткан удаалаштык катарында α нын кеми менен алынган ондук жакындашуусунун удаалаштыгын алууга болот, анда $a^{r_1'}, a^{r_2'}, \ldots, a^{r_n'} \ldots$ (3) сыяктуу тиешелүү удаалаштыгы, a>0 болгондо рационалдуу көрсөткүчтүү даражанын касиетине ылайык, монотондуу өсүүчү жана чектелген болот. r' саны α дан чоң болгон рационалдык сан болсо, көрсөтүлгөн удаалаштык $a^{r_1'}$ жогору жактан чектелет. Демек, (3) удаалаштык Вейерштрасстын теоремасынын негизинде чектүү пределге ээ болот, ал пределди А менен белгилесек, $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'} = A$ (4) болот. Эми α га жыйналуучу рационалдык сандардын каалаган (r_n) удаалаштыгын алалы, демек, $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = \alpha$ (5) болсун. Анда $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = A$ болорун далилдейбиз. (2)чи жана (5) чинин негизинде төмөнкү барабардык аткарылат: $\lim\limits_{n\to\infty}(r_n - r_n') = 0$ Бул учурда $\lim\limits_{r\to 0} a^r = 1$ (6) негизинде төмөнкү туура барабардыкты алабыз: $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - r_n'} = 1$.

Эми $a^{r_n - r_n'} \cdot a^{r_n'} = a^{r_n}$ теңдештигин пайдаланып, акыркы барабардыктын эки жагынан тең $n \to \infty$ да пределге өтсөк, төмөнкүдөй туура барабардыкка келебиз:

$\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n - r_n'} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'} = 1$ А=А (7) Эми (4) жана (7) ден төмөнкүдөй корутунду келип чыгат $\lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n'} = A$ Мына ошентип, (1) пределдин, б.а., оң сандын иррационалдуу көрсөткүчтүү даражасы жашай тургандыгы далилденди. Аналогия методун колдонуу менен (1) пределдин 0<a<1 учур үчүн да жашай тургандыгын далилдөөгө болорун белгилейли. Эми көрсөткүчтүү функциянын төмөнкүдөй аныктамасын кабыл алууга болот.

Аныктама $y=a^x$ (мында a>0, $a\neq 1$) формуласы менен берилген функция а негизиндеги көрсөткүчтүү функция деп аталат. Окутуу практикасы көрсөткөндөй, окуучулар бул аныктаманы мурдагы тажрыйбасына таянуу менен өздөрү бере алышат. Чындыгында эле, бардык элементардык функциялардын маңыздуу белгилери тиешелүү формула жана параметрлерине чектөө коюу аркылуу берилип келген, натыйжада, окуучулардын өз алдынчалуулугун өстүрүүгө аракет жасалып, алардын компетентүүлүгүн калыптандыруу багытында иштер ырааттуу түрдө жүргүзүлгөн болот. 10-класстын алгебра жана анализдин башталышы курсунда функцияларды изилдөөнүн жалпы схемасы берилгендиги белгилүү [3, 49], ал схеманы окуучулардын эстерине салып, айрым бир кошумчааларды киргизүү менен, көрсөткүчтүү функциянын касиеттерин алардын жогорку деңгээлдеги активдүүлүгүнө таянуу аркылуу берүүгө болот.

Окуу китебинде [3], $y= a^x$ функциясынын аныктоо жана маанилеринин областы негизделип берилсе, анын, жалпы учурда, логикалык математикалык- формулалар

$((\forall x\in Z)[x\in J]\Rightarrow(-x)\in Z)]\&\ (f(-x)= \pm f(x)$ $\Leftrightarrow$ f жуп (так) функция деп аталат.

$(\exists\ т >0)\ (\forall x\in J)\ [(x\pm т)\in J\ \&f\ (x\ \pm т) = T]$ $\Leftrightarrow$ Т саны f тин мезгили деп аталат) менен маңызы ачылып берилген касиеттер орун албай тургандыгын “аныктамага келтирүү” операциясын колдонуу менен көрсөтүүгө болот. Мисалы, мезгилдүү функциянын аныктамасындагы биринчи коньюнктивдик мүчө орун алса да $f(x\pm T)=f(x)$ барабардыгы аткарылбагандыктан, $y= a^x$ функциясы мезгилсиз болот.

Кошумча түрдө көрсөткүчтүү функциянын аныктоо областында үзгүлтүксүз экендигин математиканы тереңдетип окутуучу класстардын окуучуларына көрсөтүп коюу керек. Ал үчүн аргументтин өсүндүсү нөлгө умтулганда функциянын өсүндүсү дагы ошол эле тандалып алынган чекитте нөлгө умтуларын далилдөө жетиштүү экендигин белгилеп, далилдөөнүн бул идеясын ишке ашырууну окуучулардын өздөрүнө сунуштоого болот. Окуучулар мурдагы сабактарда алган билимдерине таянуу менен функциянын өсүндүсүнө байланыштуу болгон төмөнкүдөй формулаларды жазышат. $y+\Delta y= a^{x+\Delta x}$ $\Delta y= a^{x+\Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} -1)$ андан ары функциянын x_0 чекиттеги өсүндүсүнүн предели нөлгө барабар экендигин төмөнкүдөй теңдеш өзгөртүп түзүү аркылуу далилдешет: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0} a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)=0$. Натыйжада, көрсөткүчтүү функция бүткүл аныктоо областында үзгүлтүксүз болот деген корутунду алынат.

Кошумча түрдө көрсөткүчтүү функциянын томпоктугун, иймектигин жана ийилүү чекиттерин изилдөөнү көрсөтүү дагы максатка ылайыктуу. Албетте, окуучулар томпок жана иймек ийри сызыктын төмөнкү аныктамаларын эске тутушуп, аны функцияны изилдөөдө колдоно алышат:

$(\forall x_1,x_2\in J\ )\ (x_1\neq x_2\Rightarrow \frac{f(\tilde{o}_1)+(\tilde{o}_2)}{2} < f(\frac{\tilde{o}_1+\tilde{o}_2}{2})\Leftrightarrow y = f(x)$ функциянын графиги Jде томпок ийри сызык деп аталат. Экинчиден, $\frac{f(\tilde{o}_1)+f(\tilde{o}_2)}{2} > f(\frac{\tilde{o}_1+\tilde{o}_2}{2})$ барабарсыздыгы кандайдыр бир аралыктан алынган аргументтин x_1 жана x_2 (мында $x_1\neq x_2$) маанилери үчүн аткарылса, функциянын графиги берилген аралыкта иймек ийри сызык деп аталат. Эми ушул аныктамага таянуу менен, окуучулар аны чыгармачылык менен жаңы шартта төмөндөгүчө колдонушуп, көрсөткүчтүү функциянын графиги дайыма иймек (демек, ийилүү чекити жок) болот деп корутунду чыгарышат:

$$A= \frac{\grave{a}^{\tilde{o}_1}+\grave{a}^{\tilde{o}_2}}{2}-\grave{a}^{\frac{x_1+x_2}{2}}=\frac{1}{2}(\grave{a}^{\tilde{o}_1}+\grave{a}^{\tilde{o}_2}-2\grave{a}^{\frac{x_1+x_2}{2}})=\frac{1}{2}(\grave{a}^{\frac{\tilde{o}_1}{2}}-\grave{a}^{\frac{\tilde{o}_2}{2}})^2>0 .$$

Жалпы билим берүүчү мектептерде окуучуларга үстүртөдөн гана бериле турган дагы бир касиет - функциянын чексиздигинин өзгөрүшү болуп эсептелет, албетте, математиканы тереңдетип окутуучу класстарда бул касиетти негиздеп берүү зарыл экендиги табыйгый иш. Мында a>1 болсо $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=+\infty$ жана $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$ ошондой эле $0<a<1$ шарты аткарылганда, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=+\infty$ жана $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x=0$ барабардыктары орун аларын тиешелүү аныктамаларды пайдалануу менен негиздеп көрсөтүү керек.

Математиканы тереңдетип окутуучу класстарда тескери функция жөнүндө түшүнүк бир далай жогорку деңгээлде берилгендиктен, мугалим окуучулардын ушул билимдерине таянуу менен, логарифмалык функциянын тиешелүү касиеттерин кыскача берүүгө болот. Аныктоо областы оң чыныгы сандардын көптүгү, ал эми маанилердин областы бардык чыныгы сандар боло тургандыгы, ошондой эле логарифмалык функциянын жуп, тактыгы, үзгүлтүксүздүгү жөнүндөгү тиешелүү кортутундуларды чыгарышат.

Окуучулар үчүн жаңы жана маанилүү касиеттердин бири монотондуулугу болуп эсептелет. Ал касиетти $0<x_1<x_2<\omega \& a>1$; шарттарын эске алуу менен, карама-каршысынан далилдөө методун колдонуп жүргүзүүгө болот. Далилдөө логикалык-математикалык символду колдонуу менен төмөндөгүдөй барабарсыздыктардан турушу мүмкүн:

$\overline{\log_a x_2 > \log_a x_1} \Rightarrow \log_a x_2 \le \log_a x_1$. Андан ары a>1 болгондо, $y=a^x$ өсүүчү функция болгондуктан, окуучулар төмөнкүдөй барабарсыздыкты жазышат:

$a^{\log_a x_2} \leq a^{\log_a x_1}$. Эми оң сандын логарифми жөнүндөгү түшүнүккө таянуу менен төмөнкүдөй эки барабардыктын орун аларын негиздеп көрсөтүшөт. $a^{\log_a x_2} = x_2, a^{\log_a x_1} = x_1$. Ал эми бул барабардыктан жогоруда жазылган барабарсыздыкты эске алуу менен, $x_2 \leq x_1$ деген алгачкы божомолдоого карама-каршы болгон барабарсыздыкты алышат. Анда логиканын $p \Rightarrow q \equiv p \& \overline{q} \Rightarrow \overline{p}$ деген законуна таянуу менен берилген теоремага эквиваленттүү болгон экинчи сүйлөм далилденгени белгиленип, негизи бирден чоң болгондо логарифмалык функция өсүүчү функция боло тургандыгы жөнүндө корутунду чыгарабыз.

Окуучулардын таанып билүү активдүүлүгүн жогорулатуу максатында логарифмалык функциянын негизи нөлдөн чоң, бирок бирден кичине болгондо кемүүчү функция боло тургандыгын өз алдынча далилдөөгө сунуш кылуу максатка ылайыктуу. Толуктук үчүн бул учурдагы далилдөөнү символикалык формада кыскача жазып келтирели: $0<x_1<x_2<+\infty$ & $0<a<1$ болсун,

$\overline{loq_a x_2 < loq_a x_1} \Rightarrow \log_a x_1 \leq \log_a x_2 \Rightarrow a^{\log_a x_2} \geq a^{\log_a x_1} f \Rightarrow x_1 > x_2$ (Бул учурда көрсөткүч- түү функция кемүүчү)

Ал эми функциянын томпоктугун, ийиектигин жана ийилүү чекиттерин изилдөөнүн планын окуучуларга сунуштоо менен мурдакы сабактарда алардын өздөштүргөн билимдерине таянып, өз алдынча иштөөнү уюштурууга аракет кылуу максатка ылайыктуу. Планды келтирелик.

1. $x_1, x_2 > 0 \Rightarrow \sqrt{x_1 \cdot x_2} < \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ барабарсыздыгын оозеки интерпретациялоону сунуштайбыз.Окуучулардан эки оң сандын орто арифметикалыгы менен орто геометриялыгынын арасындагы байланышты көрө билүү талап кылынат .

2. $a>1$ учуру болсун деп тактоо киргизип коебуз.

3. Экинчи кадамдын негизинде, логарифмалык функциянын өсүүчү экендигин эске алып, биринчи кадамда көрсөтүлгөн барабарсыздыкты логарифмалоону сунуштайбыз. Натыйжада, төмөнкүдөй барабарсыздыкты окуучулар жазышат:

$$\log_a \sqrt{x_1 \cdot x_2} < \ell og_a \frac{x_1 + x_2}{2}$$

4. Төртүнчү кадам - функциянын ийиектигин жана томпоктугун изилдөөнүн натижасын колдонуу менен, аргументтин тиешелүү маанилери аркылуу түзүлгөн функционалдык айырманын белгисин аныктоого арналат. Сөз төмөнкү айырма жөнүндө бара жатат:

$$\ell og_a \sqrt{x_1 \cdot x_2} - \ell og_a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$$

Биздин пикирибизче, математиканы тереңдетип окутуучу класстардын окуучуларынын графиктик элестөөлөрүнүн тиешелүү деңгээлде, программанын талабына ылайык калыптандырылганын эске алуу менен, мугалим тарабынан берилген жогоркудай тапшырмалар сапаттуу аткарылат деп күтүүгө болот. Ошондой болсо да дидактиканын аң-сезимдүүлүк принцибин эске алуу менен, жогорку айырмадагы кемүүчүгө жана кемитүүчүгө графиктик талдоо жүргүзүүнү окуучуларга сунуштоого болот. Жалпы алганда, көрсөтүлгөн айрыма аркылуу кандайдыр бир функциянын (x_1, x_2) аралыгындагы графигине жүргүзүлгөн хорданын тең ортосу болгон чекиттин абциссасынын тиешелүү ординаталарын салыштырууга мүмкүндүк бере турган закон ченемдүүлүк берилгенин белгилөө зарыл. Бул учурда кемүүчү катарында биз карап жаткан интервалдын учтарындагы функциянын маанилеринин жарым суммасы, демек, хорданын тең ортосу болгон чекиттин ординатасы кабыл алынган болсо, ал эми кемитүүчү-функциянын ошол эле чекиттеги ординатасы экендигин окуучулар белгилешет. Натыйжада, изилденип жаткан учурда айырманын терс белгиге ээ болору ачык айтылат да, функциянын графигинин томпок экени жөнүндө корутунду чыгарылат. Ал эми логарифманын негизине коюлган экинчи чектөөлөргө ылайык айырманын оң экендигин негиздеп көрсөтүү менен, графиктин бүткүл аныктоо областында иймек экендиги белгиленет.

Өз ара тескери функциялардын графиктери биринчи жана үчүнчү координаталык чейректердин биссектрисасына карата симметриялуу боло тургандыгы жөнүндөгү теоремага таянуу менен окуучулар, кошумча түрдө, жогорудагы изилдөөлөрдүн натыйжасын эске алышып, логарифмалык функциянын графигин сызышат. Графикке таянуу менен, функциянын нөл чекитинин аймагындагы өзгөрүшү, нөлдөрдү жана белгилери турактуу аралыктары ж.б.у.с. касиеттери жөнүндө тиешелүү корутундуларды чыгарышы күтүлөт. Мисалы, логарифманын аныктамасына жана даражанын касиетине таянуу менен $x=1$ чекити функциянын нөлү боло тургандыгы, ал эми аргументтин да, негиздин да маанилери бирден чоң болсо, логарифмалык функциянын маанилери $1<x<\infty$ болгондо оң, аргументтин мааниси нөлдөн бирге чейинки аралыктан алынса, функциянын терс белгиге ээ боло турганы жөнүндөгү корутундуну окуучулар мугалимдин минималдуу жардамына таянып чыгарышы мүмкүн.

Жыйынтыктап айтканда, көрсөткүчтүү жана логарифмалык функциялардын касиеттерин жогоруда сунушталгандай тиешелүү илимий деңгээлде берүү менен математиканы тереңдетип окутуучу класстардын окуучуларынын билимдеринин толук, ийкемдүү, аң-сезимдүү жана бекем болушуна жетишүүгө болот.

Адабияттар:

1. Бекбоев И.Б. Инсанга багыттап окутуу технологиясынын теориялык жана практикалык маселелери. -Б.: Педагогика, 2003.
2. Бекбоев И.Б. ж.б. Жалпы билим берүүчү мектептер үчүн программа. Математика 5-11-кл. -Б.: Педагогика, 2007.
3. Колмогоров А.Н. ж.б. Алгебра жана анализдин башталышы. Орто мектептин 10-11-класстары үчүн окуу китеби. -Бишкек, 2003.
4. Мусаев С.М. Элементардык функциялар жана аларды изилдөө. -Ф.: Мектеп, 1987.