УДК51(07)

Кесмез Я.

ИГУ им. К. Тыныстанова

ДИДАКТИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

В статье проведен анализ приемов решения нестандартных математических задач. Приведены образы решения некоторых задач практического содержания.

Решить математическую задачу - это значит найти такую последовательность общих положений математики (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), применяя которые к условиям задачи или к их следствиям (промежуточным результатам решения), ученики получаютто, что требуется в задаче, - ее ответ [1].

Основными методами поиска решения задач являются анализ и синтез. Благодаря анализу осуществляется целенаправленная актуализация знаний (знания актуализируются не механически, наугад, «вслепую», а в связи с потребностью в них). В ходе анализа естественно определяются момент использования знаний, выбор знаний и умений (берутся лишь те, в которых возникла потребность при анализе), форма использования знаний (не так, как в учебнике, а в том виде, в каком это удобнее для решения задачи) и характер использования знаний (все сразу или поочередно).

Поэтому при решении задач можно выделить следующие общие приемы учебной исследовательской деятельности: *первый прием* - прием развертывания термина, он состоит в выведении всевозможных следствий из условия задачи или в выяснении всевозможных свойств объектов, о которых говорится в задаче. *Второй прием* - анализ через синтез - «челнок» состоит в чередовании восходящего анализа и синтетических рассуждений. Эти два приема подводят к формированию плана решения задачи. *Третий прием* - прием построения дедуктивных умозаключений. Именно эти приемы должны быть отработаны с учащимися.

Большинство приемов поиска решения задач базируется на достаточно серьезном логическом содержании, поэтому овладение ими учащимися возможно лишь при условии систематического и целенаправленного их применения. Полезно практиковать в этих целях краткий методологический комментарий, разъясняющий учащимся суть применяемых приемов поиска решения задач [2].

Научить школьников решать задачи - значит научить их устанавливать связи между данными и искомыми в соответствии с этим выбирать, а затем и выполнять математические действия. Чтобы добиться этого, учитель должен предусмотреть в методике обучения решению задач по крайней мере три вида ступеней, имеющие свои цели.

На *первой* ступени учитель ведет подготовку к решению задач рассматриваемого вида. На этой ступени школьники должны усвоить связи, на основе которых они будут выбирать действия при решении таких задач.

На *второй* ступени учитель знакомит учеников с решением задач рассматриваемого вида. Здесь они учатся переходить от конкретной ситуации, выраженной в задаче, к выбору соответствующего арифметического (или другого) действия.

На *третьей* ступени учитель формирует умение решать задачи рассматриваемого вида. Учащиеся должны научиться решать любую задачу независимо от ее конкретного содержания.

Особенность решения сюжетной задачи состоит в том, что в ней решаются, вообще говоря, две разные, хотя и взаимосвязанные проблемы: перевод содержания задач на язык математики (то есть математизация содержания) и решение собственно математической задачи средствами математики, что образует процесс сложной умственной деятельности. Чтобы овладеть им, надо знать основные этапы решения задачи и некоторые приемы их выполнения [3,5].

Структуру процесса решения сюжетной задачи можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 1.

Опыт использования ряда нестандартных задач показывает, что для формирования самостоятельности мышления, воспитания творческой активности лицеистов необходимо включать их в систему упражнений и задач,

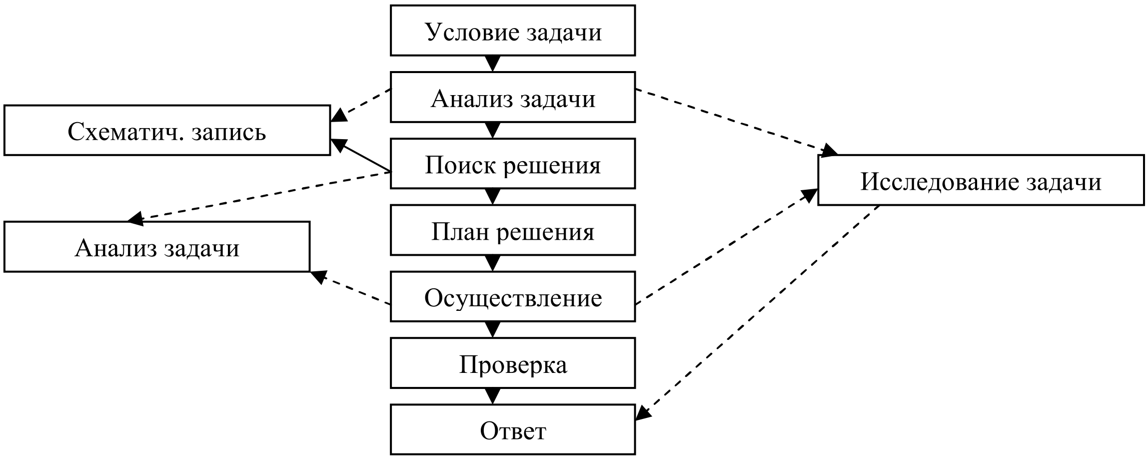


Рис. 1. Структура решения сюжетной задачи повышенной трудности.

используемых на уроке и во внеклассной работе. Решение нестандартных задач вызывает у учащихся наибольшие затруднения. Остановимся на понятии "нестандартная задача" или «задача повышенной трудности».

"Нестандартные задачи - это такие, для которых в курсе математики не имеется общих правил и положений, определяющих точную программу их решения", - считает Л.М.Фридман [1, 43]. Однако следует заметить, что понятие "нестандартная задача" является относительным. Одна и та же задача может быть стандартной или нестандартной в зависимости от того, знакомы ли ученики со способами решения таких задач.

Нестандартная задача - это задача, алгоритм решения которой учащимся неизвестен, т.е. они не знают заранее ни способов её решения, ни того, на какой учебный материал опирается решение. Как учитель может помочь учащимся решать нестандартные задачи? Универсального метода, позволяющего решить любую нестандартную задачу, нет, т.к. нестандартные задачи в какой-то степени неповторимы [4].

Рассмотрим отдельные методические приемы обучения учащихся решать нестандартные задачи:

1. Прежде всего, отметим, что научить учащихся решать задачи (в т.ч. нестандартные) можно только в том случае, если у учащихся будет желание их решать, т.е. если задачи будут содержательными и интересными с точки зрения ученика. Поэтому задача учителя - вызвать у них интерес к решению той или иной задачи. Необходимо тщательно отбирать интересные задачи и делать их привлекательными для учащихся. Это могут быть задачи-шутки, задачи-сказки, старинные задачи и т.п. Одно бесспорно: наибольший интерес у школьников вызывают задачи, взятые из окружающей жизни, задачи, связанные со знакомыми вещами, опытом.

2. Задачи не должны быть слишком легкими, но и не слишком трудными, т.к. ученики, не решив задачу или не разобравшись в решении, предложенном учителем, могут потерять веру в свои силы. В этом случае очень важно соблюсти меру помощи. Прежде всего, учитель не должен знакомить учащихся с уже готовым решением. Подсказка должна быть минимальной.

Рассмотрим примеры решения задач повышенной трудности, с тем, чтобы выяснить особенности процесса их решения.

Задача 1.В магазин "Цветы" привезли 30 желтых тюльпанов и столько же красных.

Каждые 3 желтых тюльпана стоили 20 руб., а каждые 2 красных тюльпана стоили 30 руб. Продавец сложила все эти тюльпаны вместе и решила сделать букеты по 5 тюльпанов и продавать их по 50 руб. Правильно ли она рассчитала?

Решение.Найдем стоимость всех тюльпанов, если бы продавец не складывала тюльпаны вместе (реальную стоимость) $20 \cdot 30 : 3 + 30 \cdot 30 : 2 = 650$ руб. Найдем стоимость тюльпанов в том случае, когда продавец сложила их по 5 в букеты и стала продавать по 50 руб. (предполагаемая стоимость) $[(30 + 30) : 5] \cdot 50 = 600$ руб. Сравниваем реальную и предполагаемую стоимость тюльпанов 650 руб. > 600 руб. Обнаруживаем, что расчет продавца ошибочен, т.к. при сложении всех тюльпанов и продажи их по 5 шт. в букетах она теряет 50 руб. Процесс решения этой нестандартной задачи состоит в следующем: данную задачу мы разбили на такие подзадачи:1) нахождение реальной стоимости; 2) нахождение предполагаемой стоимости; 3) сравнение полученных стоимостей и вывод о расчете продавца. Решив эти стандартные подзадачи, мы в конечном итоге решаем и исходную нестандартную задачу. По мнению Л.М. Фридмана, процесс решения любой нестандартной задачи состоит в последовательном применении двух основных операций:

• сведение (путем преобразования или переформулирования) нестандартной задачи к другой, ей эквивалентной, но уже стандартной (способ моделирования);

• разбиение нестандартной задачи на несколько стандартных вспомогательных подзадач (способ разбиения). Для того чтобы легче было осуществлять способы разбиения и моделирования, мы считаем полезным построение вспомогательной модели задачи - схемы, чертежа, рисунка, графа, графика, таблицы.

Задача 2.Сколько всего различных незамкнутых ломаных можно построить с вершинами в точках A, B, C, D,показаннойна рисунке 2а?

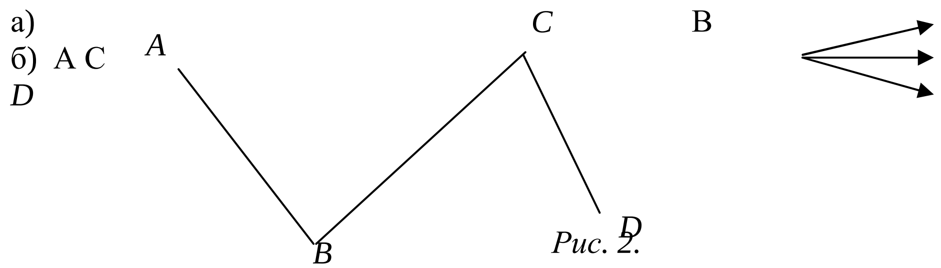
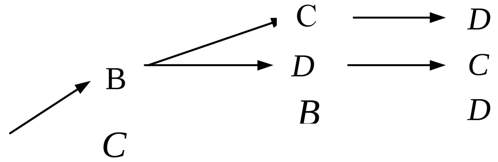


Рис. 2.

Решение. Даннаязадача – это фактически задача на перебор вариантов. Ее цель состоит в том, чтобы дать учащимся возможность накопить некоторый опыт по подсчету числа вариантов и по построению дерева вариантов. После обсуждения ответов и решений учащихся учитель может сказать примерно следующее: «Вы получили разные ответы, но никто не смог доказать, что он перебрал **все** возможные случаи. Давайте попробуем разработать такой способ подсчета, при котором можно быть уверенным в том, что мы перебрали все возможные варианты». Тогда словосочетание «перебор … вариантов» появляется в таком контексте, что смысл его объяснять не надо, тем более, что используемые слова учащимся к этому моменту уже знакомы из других жизненных ситуаций.

Далее им предлагается сначала посчитать, сколько можно построить ломаных с началом в точке *A*. Рассуждаем так: из точки *A* можно пойти в точку *B* или в точку *C* или в точку *D*. Чтобы ничего не пропустить, сделаем рисунок 2б.

Теперь подумаем, куда мы можем пойти из точки *B*, из точки С, из точки D, и т.д. В результате рассуждений получаем рис. 3.



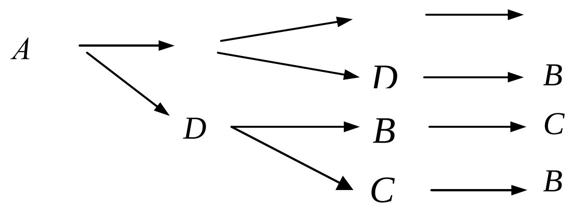


Рис. 3.

«Итак, мы видим, что можно построить 6 ломаных с началом в точке *A*. Как вы думаете, сколько всего ломаных мы получим, если проделаем такую же работу с остальными точками? Проверьте свое предположение дома».

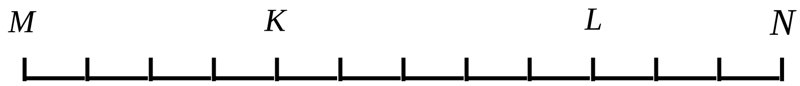
Здесь работа над задачей в классе заканчивается и учащимся предлагается закончить ее дома: изобразить все ломаные с началом в точке *A* и, рассуждая аналогично (сделав такой же рисунок), выписать и изобразить все ломаные с началом в точках *B*, *C* и *D*. В процессе выполнения этой работы ученики заметят, что каждая ломанная повторяется дважды, поскольку, например, *ABCD* и *DCBA* – это одна и та же ломаная. Поэтому всего различных ломаных получится не $6 \cdot 4 = 24$, а вдвое меньше – 12.

Далее учащимся предлагается дома на альбомном листе изобразить все 12 ломаных.

Задача 3. Изобразите отрезок MN. Отметьте на нем точки K и L так, чтобы отрезок KN составлял 2/3, а отрезок ML –3/4 отрезка MN. Какую часть отрезков MN, NK, ML, MK и NL составляет отрезок KL? Прежде чем решать задачу подумайте, какой длины удобно взять отрезок MN.

Решение. Подсказка содержится в тексте задачи. Учащимся предлагается в классе прочитать первые два предложения и подумать над подсказкой. Изобразим отрезок и отметим на нем указанные точки (см. рис. 4а). Отрезок *KL* составляет 5/12 длины отрезка *MN*, 5/8 длины отрезка *NK*, 5/9 длины отрезка *ML*, 5/4 длины отрезка *MK*, 5/3 длины отрезка *NL*.

а)



б)

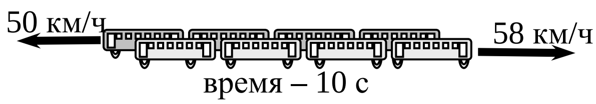


Рис. 4.

Задача 4. Пассажир поезда, идущего со скоростью 50 км/ч заметил, что встречный поезд шел мимо него в течение 10 секунд. Определите длину встречного поезда, если его скорость – 58 км/ч.

Решение.Какие величины в задаче известны? Сделаем рисунок 4б. Длина поезда – это расстояние от начала головного вагона до конца хвостового вагона. Какие величины мы обычно используем, чтобы найти расстояние? Как бы вы решали задачу, если бы поезд, в котором сидел пассажир, стоял на месте?

1) 50 + 58 = 108 км/ч скорость, с которой встречный поезд проехал мимо пассажира.

2) 108 (км/ч) = (108· 1000) : 3600 (м/с) = 30 (м/с).

3) 30 · 10 = 300 (м) – длина поезда. Ответ: 300 м.

Задача 5. На отдельном листе бумаги, используя чашку вместо циркуля, проведите карандашом окружность. Вырежьте получившийся круг и подумайте, как при помощи перегибания найти его центр. Подумайте, как найти центр круга в случае, если круг перегнуть нельзя.

Решение.Выполнение первого задания – найти центр вырезанного круга перегибанием, как правило, затруднений не вызывает. Если же круг перегнуть нельзя, то центр найти сложнее. Здесь учащимся следует предложить подумать, какие из свойств углов и окружностей, с которыми они знакомы, можно использовать в этой задаче. Оказывается, достаточно построить прямой угол *BAC*, где точки *A, B, C* принадлежат окружности, тогда *BC* будет её диаметром, а его середина – центр окружности.

Эти модели способствуют развитию у лицеистов конкретного и абстрактного мышления во взаимосвязи между собой, т.к. модель задачи, с одной стороны, дает возможность школьнику в наглядной форме конкретно представить зависимости между величинами, входящими в задачу, а с другой - способствует абстрагированию, помогает отвлечься от сюжетных деталей, от предметов, описанных в тексте задачи.

Методика преподавания математики рассматривает несколько методов решения задач - арифметический, алгебраический, графический, практический, метод предположения, метод перебора. Они могут применяться как при решении стандартных задач, так и нестандартных (повышенной трудности). Арифметический метод решения требует большого умственного напряжения, что положительно сказывается на развитии умственных способностей, математической интуиции, на формировании умения предвидеть реальную жизненную ситуацию. Алгебраический метод решения задач развивает теоретическое мышление, способность к обобщению, формирует абстрактное мышление и обладает такими преимуществами, как краткость записи и рассуждений при составлении уравнений, экономит время.

В математике нет каких-либо общих правил, позволяющих решить любую нестандартную задачу, т.к. задачи повышенной трудности в какой-то степени неповторимы. Нестандартная задача в большинстве случаев воспринимается как вызов интеллекту лицеиста и порождает потребность реализовать себя в преодолении препятствия.

Литература:

1. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике: -М.: Флинта, 1998., -С. 224.
2. Кострикина Н.П. Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7-9 классов: Кн. для учителя. -М.: Просвещение, 1991. -С. 237.
3. Пойа Д. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение, преподавание /Пер. с англ. В.С.Бермана, под ред. И.М. Яглома. -М.: Наука, 1976. -С. 448.
4. Ефремов В.П., Ефремова Л.И. Нестандартные задачи на уроках и после //Математика, 2003. -№ 7. -С. 56-58; Задачи повышенной трудности по алгебре.
5. Мааткеримов Н.О., КезмезЯхия. Формирование творческой личности лицеиста на основе исследовательского подхода в обучении. //Байтурсыновские чтения: Мат-лымеждунар. науч.-практ. конф. -Костанайский гос. ун-т. -Ч.2, 2013. -С. 210-214.
6. Ивлев Б. И началом анализа: Учебное пособие для 10-11 классов средней школы. -М.: Просвещение, 1993. -С.46.