УДК 372.8

А.Р. Рыскулов

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИЗУЧЕНИЯ АСИМПТОТЫ КРИВЫХ

Данная работа посвящена методике изучения асимптоты кривых. Работа предназначена в помощь студентам, поэтому в ней расшифровывается и сопровождается чертежами определение асимптоты кривых.

Как известно [1-5], асимптоты кривых бывают вертикальные, горизонтальные и наклонные. При отыскании асимптот графика функции f (x) прежде всего надо обратить внимание на точки разрыва функции. Пусть точка x_0 - точка разрыва функции f (x) . Тогда говорят, что если хотя бы одно из предельных значений $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim f(x)$ равно "+ ∞" или "- ∞" , то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой.

Это определение, как нам кажется, является общим определением, и студенту сразу трудно представить роль асимптоты и графика функции. Поэтому, данное определение лучше расшифровать в сопровождении чертежа, это даст студентам конкретное представление об асимптоте кривых. Итак, данное определение сформулировать можно в виде:

Если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) =$ "+ ∞" или " - ∞", то очевидно прямая $x=x_0$ является вертикальной асимптотой для той части графика функции f(x), которая расположена справа от прямой $x = x_0$ (рис.1). Если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) =+\infty$ или "- ∞", то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой той части графика функции f(x), которая расположена слева от прямой $x = x_0$ (рис.2).

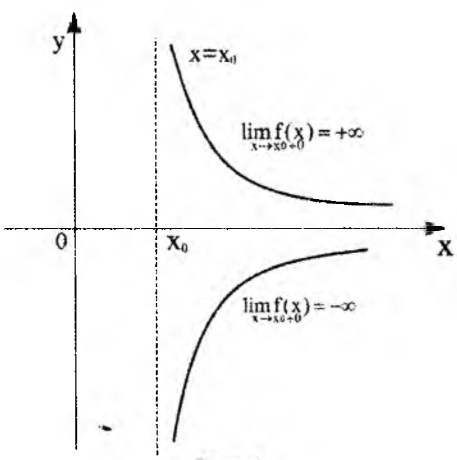

Рис.1

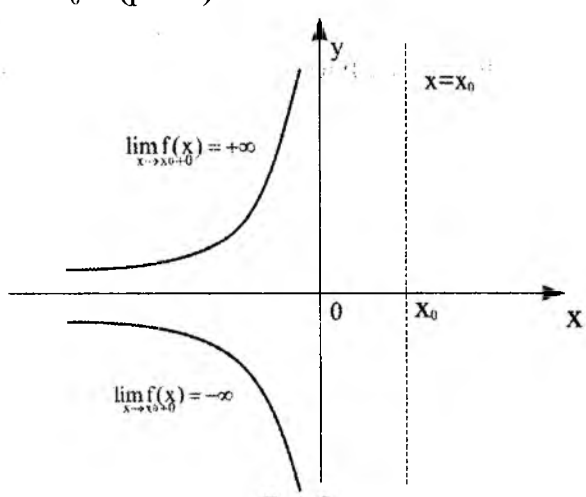

Рис.2

Практика показывает, что в этом определении студентами трудно усваиваются предельные значения $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=-8$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty$ т.е. студенты не всегда четко определяют, когда предельные значения равняются " + ∞" или " - ∞".

Так, например, для функции $f(x) = 1/(1-x)$ вертикальной асимптотой будет прямая $x = x_0 = 1$. Предельные значения этой функции при $x>1$ слева и справа соответственно равны: $\lim\limits_{x\to 1-0} 1/(1-x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = -\infty$. Для полного понимания студентами, почему предел функции равен "$+\infty$" или "$-\infty$" знак "$x\to 1-0$" следует заменить знаком "$x\to 1-\varepsilon$", где ε - малое положительное число. Тогда предельное значение $\lim\limits_{x\to 1-0} 1/(1-x)$ имеет вид $\lim\limits_{x\to 1-\varepsilon} 1/(1-x) =$ $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} 1/\varepsilon$.

Теперь, придавая ε малые различные значения, стремящиеся к нулю, мы убедимся, что предельное значение $\lim\limits_{x\to 1-0} 1/(1-x)$ увеличивается. Например, при $\varepsilon=10^{-1}$, $\lim\limits_{x\to 1-0} 1/(1-x) = \lim\limits_{x\to 1-\varepsilon} 1/(1-x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 10^{-1}} 1/\varepsilon = 0$ при $\varepsilon = 10^{-2}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 10^{-2}} 1/\varepsilon = 100$, и при $\varepsilon=10^{-n}$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 10^{-n}} 1/\varepsilon = 10^n$ $1/\varepsilon = 10^n$.

Отсюда видно, что если $n> +\infty$, то $10^n > +\infty$, то есть $\lim\limits_{x\to 1-0} 1/(1-x) = +\infty$.

Аналогичным образом, заменив знак "$x>1+0$" со знаком "$x>1+\varepsilon$" мы имеем предельное значение равное $\lim\limits_{x\to 1+0} 1/(1-x) = \lim\limits_{x\to 1+\varepsilon} 1/(1-x) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} 1/\varepsilon$. Это последнее равенство, очевидно, показывает, что $\lim\limits_{x\to 1+0} 1/(1-x) = -\infty$.

Здесь необходимо особо обратить внимание студентов, как определяется точка пересечения графика функции $f(x) = 1/(1-x)$ с осью ОУ. В данном примере при $x = 0$, $f(0) = 1$, т.е. в точке М (0,1) график функции пересекает ось ОУ.

Данный пример, кроме вертикальной асимптоты $x = x_0$ имеет и горизонтальную асимптоту У=0, то есть ось ОХ, так как

$$\lim_{x\to\infty} f(x)= \lim_{x\to\infty} 1/(1-x)=0$$

Графическое изображение показано на рис. 3

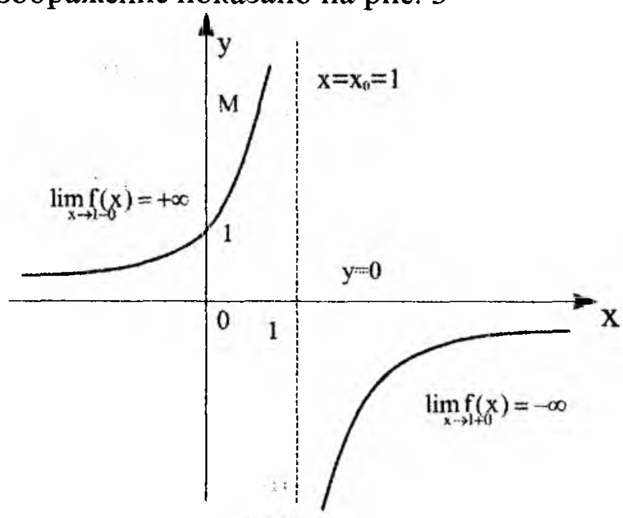

Рис. 3

ЛИТЕРАТУРА

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1971.

2. Никольский С.М. Курс математического анализа –М.: Наука, 1983.

3. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов В.Х. Математический анализ. –М.: Наука, 1979.

4. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ. –М.: Высшая школа, 1970.

5. Усубакунов Р. Математикалык анализ. –Фрунзе: Мектеп, 1978.