УДК.532.546

Т.А.Муканов

ОБОБЩЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА

В статье обобщена известная производная Шварца и дана формула вычисления производной.

Определение производной по Шварцу [1]

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} \qquad (1)$$

Определение 1. Если предел (1) существует, то говорят, что функция дифференцируема по Шварцу в точке x_0.

Теорема 1.

Если функция в точке x_0 дифференцируема по Ньютону, то она в данной точке дифференцируема по Шварцу и имеет место формула

$$f'(x_0)=1/2\left[f'(x_0+0)+f'(x_0-0)\right]. \qquad (2)$$

Доказательство.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0+}(f(x_0+h)-f(x_0-h)\ )/2h=1/2\lim_{h\to 0+}[(f(x_0+h)+f(x_0))/h+$$

$$+(f(x_0)-f(x_0-h))/h]=1/2\left[\lim_{h\to 0+}(f(x_0+h)-f(x_0))/h+\lim_{h\to 0+}f(x_0)-(xh))/h\right]=$$

$$=1/2\left[\lim_{h\to 0+}(x_0+h)-f(x_0))/h+\lim_{h\to 0+}f(x_0)-f(x_0-h))/h=1/2\left[f'(x_0+0)+f'(x_0-0)\right]\right.$$

Обратное не верно. Например: функция f(x)=|x| в точке $x_0=0$ не дифференцируема по Ньютону, но дифференцируема по Шварцу. Действительно

$$y=|x|=\begin{cases} x, & \text{если } x\ge 0 \\ -x, & \text{если } x<0 \end{cases}$$

$$y'=\lim_{h\to 0+}f(0+h)-f(0-h))/2h=1/2\lim_{h\to 0+}(h-0)/h+(0-h)/h=1/2(1-1)=0\,.$$

Замечание. Исправленная производная по Шарипову – ни что иное, как производная Шварца.

Определение 3. Обобщением производной Шварца в точке x_0 называется предел

$f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0+}(f(x_0+\alpha h)-f(x_0-\beta h))/(\alpha+\beta)h$, где $\alpha,\beta\ne 0$ - заданные действительные числа и $\alpha\ne-\beta$.

Теорема 2. Если функция f(x) дифференцируема в точке x_0 по Шварцу, то имеет место формула:

$f'(x_o)=1/(\alpha+\beta)[\alpha f'(x_o+0)+\beta f'(xo+0)+\beta f'(x_o-0)]$, (3)

где α,β - действительные числа.

Доказательство. Рассмотрим случаи:

1. Пусть $\alpha = n$ – натуральное число, $\beta=1$.

Тогда имеем:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0+}(f(x_0+nh)-f(x_0-h))/(n+1)h=1/(n+1)\lim_{h\to 0+}[(f(x_0+nh)-(f(x_0+$$
$$+(n-1)h))/h+(f(x_0+(n-1)h)-f(x_0+(n-2)h))+\ldots+(f(x_0+h)-f(x_0))/h+$$
$$+(f(x_0)-(f(x_0-h))/h]=1/(n+1)\left[n f'(x_0+0)+f'(x_0-0)\right]$$

2. Пусть $\alpha = n$ и $\beta = k$ – натуральные числа. Доказательство аналогично случаю 1.

3. Пусть α и β - целые числа. Доказательство аналогично случаю 1.

4. В общем случае мы можем предположить, что α и β - действительные числа.

Рассмотрим примеры:

1) $$f(x)=\begin{cases}-\alpha x, & \text{если } x<0,\ \alpha>0\\ \beta x, & \text{если } x\geq 0,\ \beta>0.\end{cases}$$

Найдем производную Шварца этой функции в точке $x_0=0$.

Согласно формуле (3) имеем

$f'(0)=1/(\alpha+\beta)[+\alpha f'(0+0)+\beta f'(0-0)]=1/(\alpha+\beta)(\alpha\beta-\beta\alpha)=0$

$$f(x)=\begin{cases}-\beta x, & \text{если } x<0,\ \beta>0\\ \alpha x, & \text{если } x\geq 0,\ \alpha>0.\end{cases}$$ 2)

Найдем $f'(0)=1/(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=(\alpha-\beta)$.

Учитывая, что $k_1=\alpha$ - угловой коэффициент прямой $y=-\beta$, заключаем, что производная Шварца функции $f(x)$ в точке $x_0=0$ равна $f'(0)=k_1+k_2$, т.е. производная Шварца функции $f(x)$ в точке $x_0=0$ есть угловой коэффициент прямой $y=(k1+k2)x$. В частности, пусть $\alpha=1$, $\beta=-2$, тогда $f'(0)=1-2=-1$

3) $$f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & \text{если } x<x_0,\\ \alpha, & \text{если } x=x_0,\\ \psi(x), & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

и функция непрерывна в точке x_0, т.е. имеет место равенство $\varphi(x_o-0)=\psi(x_o+0)=a$.

Теорема 3.

Если функция $\varphi(x)$ имеет левостороннюю производную, а функция $\psi(x)$ правостороннюю производную в точке x_0, то функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 по Шварцу и имеет место формула

$$f'(x_o)=1/2[\psi'(x_o+0)+\varphi'(x_o-0)] \quad (5)$$

Доказательство.

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0+}\left(f(x_0+h)-f(x_0-h)\right)/(2h)=\lim_{h\to 0+}1/2[(f(x_0+h)-f(x_0))/(h)+f(x_0)-$$

$$-f(x_0-h))/h]=1/2\lim_{h\to 0+}[(\psi(x_0+h)-a)/(h)+(a-\varphi(x_0-h))/(h)]=1/2\left[\psi'(x)+\varphi'(x)\right]$$

Геометрическая интерпретация теоремы 3.

В точке x_o функция (4) не дифференцируема по Ньютону, но дифференцируема по Шварцу.

$|\alpha|$ - касательный вектор к кривой $y=\varphi(x)$ в точке A.

$|\beta|$ - касательный вектор к кривой $y=\psi(x)$ в точке A.

Производная Шварца функции $f(x)$ в точке x_o есть разность векторов $|\beta|$ и $|\alpha|$, т.е. $f`(x_o)=|\beta|-|\alpha|$.

В случае, когда $f(x)$ дифференцируема в точке x_o по Ньютону и в этой точке имеет экстремум, то $f`(x_o)=\psi`(x_o+0)=\varphi`(x_o-0)$.

Отсюда

$f`(x_o)=|\beta|-|\alpha|=\psi`(x_o-0)=0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. –М.: Наука. - 1974.