УДК 532.546

М.У. Мурзакматов, Б.Т. Тултуков

К ОПТИМАЛЬНОМУ УПРАВЛЕНИЮ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД

В работе рассматривается задача оптимального управления уровнем грунтовых вод с помощью функции вертикального водообмена и притока грунтовых вод на горизонтальную дрену.

Мелиоративное состояние почвы зависит от уровня грунтовых вод (УГВ), поэтому управление им является важнейшей задачей. Понижение или поддержание УГВ на заданной глубине осуществляется путем отбора воды скважинами или горизонтальными дренами.

Движение грунтовых вод в неоднородной пористой среде описывается нелинейным уравнением параболического типа [1]

$$\mu \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(y-b)\frac{\partial y}{\partial x}\right] + W(x,t), \tag{1}$$

$$(x,t)\in D\ \{0<x<L,\ 0<t\leq T\},$$

с дополнительными условиями

$$\begin{aligned} &y(x,0)=f(x),\ \ 0\leq x\leq L,\\ &k(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = g_1(t),\ x=0,\ 0<t\leq T,\\ &k(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = g_2(x),\ x=L,\ 0<t\leq T, \end{aligned} \tag{2}$$

где $y(x,t)$ - УГВ; $k(x)$ - коэффициент фильтрации; $b(x)$ - поверхность водоупора; $w(x,t)$ - функция вертикального водообмена; μ - водоотдача или недостаток насыщения; $f(x)$ - начальное положение УГВ; $g_1(t)$ и $g_2(t)$ - приток и отток грунтовых вод.

Управление УГВ можно производить с помощью функций $w(x,t)$, $g_1(t)$ и $g_2(t)$. Для простоты изложения считаем, что УГВ $y(x,t)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению безнапорной фильтрации в однородной среде [2] и на левом конце области фильтрации отсутствует приток подземных вод, т.е. считаем, что в задаче (1)-(2) $b(x)=0$, $k(x)=k$, $g_1(t)=0$, $g_2(t)=g(t)$. Требуется, управляя величиной водоотбора и оттока, к заданному моменту $T>0$ установить наиболее благоприятный в мелиоративном отношении УГВ. Задача сводится к минимизации функционала

$$\Phi(u)=\int_0^L\left[y(x,T,u)-\bar{y}(x)\right]^2dx \tag{3}$$

при условии, что $y(x,T,u)$ является решением краевой задачи

$$\frac{\partial y}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 y}{d x^2}+\omega(x,t),\ (x,t)\in D,$$

$$y(x,0)=f(x),\quad 0\le x\le L,$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0,\quad 0<t\le T,$$

$$\frac{\partial y(L,t)}{\partial x}=\gamma g(t),$$

Здесь $\alpha^2=ky_{cp}/\mu$; $\omega(x,t)=w(x,t)/\mu$; $\gamma=1/(ky_{cp})$; y_{cp} - средняя глубина потока, принятая при линеаризации уравнения (1); $\bar{y}(x)$ - заданное распределение УГВ.

Предполагается, что управлением является вектор - функция $u=(g(t),\omega(x,t))\in U$, где U - множество допустимых управлений

$$U=\left\{u=(g,\omega)\mid g_{\min}\le g(t)\le g_{\max};\ \iint_D\omega^2(x,t)dxdt\le S^2\right\}, \tag{5}$$

где $g_{min}<g_{max}$, $s>0$ - заданные числа. Обозначим через $H=L_2[0,T]\times L_2[D]$ - гильбертово пространство пар $u=(g(t),\omega(x,t))$ со скалярным произведением

$$\langle u_1,u_2\rangle_H=\int_0^T g_1(t)g_2(t)dt+\iint_D\omega_1(x,t)\omega_2(x,t)dxdt$$

и с нормой $\|u\|_H=(\langle u,u\rangle_H)^{1/2}=(\|g\|^2+\|\omega\|^2)^{1/2}$.

При каждом фиксированном управлении $u=(g,\omega)$ из краевой задачи (4) однозначно определяется соответствующее решение $y(x,t)=y(x,t,u)$. Поскольку управление $u=(g,\omega)$ может иметь бесконечно много разрывов, решение задачи (4) будем понимать в обобщенном смысле.

Задачу (3)-(5) решаем методом условного градиента [3]. Для применения этого метода требуется найти производную функционала (3). Возьмем произвольные управления $u=(g,\omega)$, $u+\Delta u=(g+\Delta g,\omega+\Delta\omega)\in H$. Соответствующие этим управлениям решения задачи (4) обозначим через $y(x,t,u)$, $y(x,t,u+\Delta u)$, а их разность - через Δy:

$\Delta y(x,t)=y(x,t,u+\Delta u)-y(x,t,u)$, где Δy является обобщенным решением краевой задачи

$$\frac{\partial\Delta y}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2\Delta y}{\partial x^2}+\Delta\omega,\ (x,t)\in D,$$

$$\frac{\partial \Delta y}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,\ \frac{\partial \Delta y}{\partial x}\Big|_{x=0} = \gamma \Delta g(t),\ 0 < t \le T, \tag{6}$$

$$\Delta y(x,0)=0,\ 0 \le x \le L$$

Тогда приращение функционала (3) можно записать в виде

$$\Delta\Phi(u) = \Phi(u+\Delta u) - \Phi(u) = \int_0^L \left\{ \left[y(x,T,u) + \Delta y(x,T) - \bar{y}(x) \right]^2 - \left[y(x,T,u) - \bar{y}(x) \right]^2 \right\} dx = 2\int_0^L \left[y(x,T,u) - \bar{y}(x) \right] \Delta y(x,T) dx + \int_0^L \Delta y^2(x,T) dx \tag{7}$$

Теперь составим функцию Лагранжа задачи (3)-(4):

$$L(y,g,\omega,\psi) = \int_0^L \left[y(x,T) - \bar{y}(x) \right]^2 dx + \iint_D \psi(x,t) \left[-\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \omega(x,t) \right] dx dt \tag{8}$$

и находим ее вариацию, которая имеет вид

$$\delta L = \int_0^L 2\left[y(x,T) - \bar{y}(x) \right] \delta y(x,T) dx + \iint_D \psi(x,t) \left(-\delta \frac{\partial y}{\partial t} + a^2 \delta \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \delta\omega \right) dx dt, \tag{9}$$

где $\psi(x,t)$ - множитель Лагранжа.

Учитывая, что вариации переменных y,g,ω должны удовлетворять дополнительным условиям задачи (4) и интегрируя двойной интеграл в (9) по частям, из условия стационарности δL=0 получаем задачу, сопряженную задаче (4):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \qquad (x,t) \in D,$$

$$\frac{\partial \psi(0,t)}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial \psi(L,t)}{\partial x} = 0,\quad 0 < t < T, \tag{10}$$

$$\psi(x,T) = 2\left(y(x,T,u) - \bar{y}(x) \right), \qquad 0 \le x \le L$$

Тогда с учетом (6) и (10) получим:

$$2\int_0^L \left[y(x,T,u) - \bar{y}(x) \right] \Delta y(x,T) dx = \int_0^L \psi(x,t) \Delta y(x,T) dx = \int_0^L \left(\int_0^T \frac{\partial}{\partial t} (\psi \Delta y) dt \right) dx =$$

$$= \iint_D \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \Delta x + \psi \frac{\partial \Delta y}{\partial t} \right) dx dt = \iint_D \left(-a^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Delta y + \psi a^2 \frac{\partial \Delta y}{\partial x^2} + \psi \Delta\omega \right) dx dt =$$

$$= a^2 \iint_D \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta y + \psi \frac{\partial \Delta y}{\partial x} \right) dx dt + \iint_D \psi \Delta\omega dx dt = a^2 \int_0^T \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \Delta y + \psi \frac{\partial \Delta y}{\partial x} \right) \Big|_{x=0}^{x=L} dt +$$

$$+ \iint_D \psi \Delta\omega dx dt = a^2 \gamma \int_0^T \psi(L,t,u) \Delta g(t) dt + \iint_D \psi(x,t,u) \Delta\omega(x,t) dx dt$$

Подставляя полученное выражение в (7), будем иметь

$$\Delta\Phi(u) = \int_0^T a^2 \gamma \psi(L,t,u) \Delta g(t) dt + \iint_D \psi(x,t,u) \Delta\omega(x,t) dx dt + \int_0^L \Delta y^2(x,t) dx$$

Отсюда следует, что градиент функционала (3) имеет вид

$$\Phi'(u)=(a^2\gamma\psi(L,t,u);\ \psi(x,t,u)) \tag{11}$$

Теперь можно написать условия оптимальности для задачи (3-5). По методу условного градиента решение задачи (3-5) сводится к построению последовательности $\{u_k=(g_k(t),\omega_k(x,t))\}$ по правилу

$$g_{k+1}(t)=g_k(t)+\alpha_k(g_k^-(t)-g_k(t)),\ 0\le t\le T,$$

$$\omega_{k+1}(x,t)=\omega_k(x,t)+\alpha_k\left(\omega_k^-(x,t)-\omega_k(x,t)\right),\ (x,t)\in D, \tag{12}$$

где $$g_k^-(t)=\begin{cases} g_{\min} \text{ при } \psi(L,t,u_k)\ge 0,\\ g_{\max} \text{ при } \psi(L,t,u_k)<0, \end{cases} \tag{13}$$

$$\omega_k^-(x,t)=\frac{s\psi(x,t,u_k)}{\left(\iint\limits_D \psi^2(x,t,u_k)dxdt\right)^{1/2}} \tag{14}$$

Вспомогательное приближение $u_k^-=\left(g_k^-(t),\omega_k^-(x,t)\right)\in U$ здесь определено из условия минимума линейного функционала

$$\left\langle \Phi'(u_k),u\right\rangle=\int_0^T a^2\gamma\psi(L,t,u_k)g(t)dt+\iint\limits_D \psi(x,t,u_k)\omega(x,t)dxdt$$

Параметр α_k $(0\le\alpha_k\le 1)$ выбирается из условия $f_k(\alpha_k)=\inf\limits_{0\le\alpha\le 1} f_k(\alpha)$, (15)

где $f_k(\alpha)=\Phi(u_k+\alpha(u_k-u_k))$

В рассматриваемой задаче для параметра α_k можно получить явное выражение [3] $\alpha_k=\min(1;\ \alpha_k)$, где

$$\alpha_k=\frac{\int_0^T a^2\gamma\psi(L,t,u_k)\left(g_k^-(t)-g_k(t)\right)dt}{2\int_0^L\left[y(x,T,u_k^-)-y(x,T,u_k)\right]^2dx}+\frac{\iint\limits_D \psi(x,t,u_k)\left(\omega_k^-(x,t)-\omega_k(x,t)\right)dxdt}{2\int_0^L\left[y(x,T,u_k^-)-y(x,T,u_k)\right]^2dx}$$

Если $\alpha^*_k=0$, то $u_k=u_k(t)$ - оптимальное управление в задаче (3)-(4)

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. и др. Математические методы в вопросах орошения. -М.: Наука, 1969.

2. Бочевер Ф.М. и др. Основы гидрогеологических расчетов. - М.: Недра, 1969.

3. Васильев Ф.П. Методы решения экстремальных задач. -М.:Наука, 1981.