

## ЗАВИСИМОСТЬ РЕШЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРОВ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Впервые краевые задачи и усовершенствованные краевые задачи решены по средствам зависимости решений от параметров.

Рассмотрим задачу Коши для одного уравнения или их системы с параметром вида

$$y' = f(t, y, \beta), t \in [t_0, T] \quad (1)$$

с начальным условием

$$y(t_0) = y_0 \quad (2)$$

Здесь  $\beta$  – параметр (произвольная постоянная).

Отметим, что в теории дифференциальных уравнений доказана весьма важная теорема о существовании решения задачи Коши (1)-(2) и о непрерывности его по  $t$  и параметру  $\beta$ :

**Теорема 1 [1-3].** Если функции  $f(t, y, \beta)$  и  $f'(t, y, \beta)$  непрерывны по всем независимым  $t$  и  $\beta$  в области  $D = \{ |t - t_0| \leq a, |y - y_0| \leq b, |\beta - \beta_0| \leq c \}$ , то решение задачи Коши (1)-(2) непрерывно по  $t$  и параметру  $\beta$ .

Доказательство данной теоремы проведено методом последовательных приближений и ломанных Эйлера (см. [1-3]).

Ранее, эту теорему использовали в регулярных и сингулярных возмущениях.

Теперь нами данная теорема использована в решении краевых и усовершенствованных краевых задач для дифференциальных (в том числе и в частных производных) и интегральных уравнений.

Итак, мы впервые исследуем задачу: о зависимости решений от краевых условий и параметров.

С этой целью предлагаем усовершенствовать задачу Коши (1)-(2), это можно сделать, в частности, так: потребуем от решения этой задачи, чтобы оно в точке  $t=T$  принимает заданное значение:

$$y(T) = y_1 \quad (3)$$

Тогда имеем краевую задачу вида

$$y' = f(t, y, \beta), t \in [t_0, T] \quad (4)$$

граничные условия

$$y'(t_0) = y_0, y(T) = y_1 \quad (5)$$

Ее сведем к усовершенствованной задаче Коши с параметром вида

$$y' = f(t, y, \beta), t \in [t_0, T] \quad (6)$$

1) начальное условие

$$y(t_0, \beta) = y_0, \quad (7)$$

2) плюс, заданное условие в точке  $t=T$

$$y(T, \beta) = y_1 \quad (8)$$

Значит решение усовершенствованной задачи Коши (6)-(8) является также решением краевой задачи (4)-(5).

Задача Коши (6)-(7), по вышеприведенной теореме, имеет непрерывное решение

$$y = y(t, y_0, \beta), t \in [t_0, T] \text{ в области } D. \quad (9)$$

Отсюда, согласно условию (8), имеем при  $t=T$  алгебраическое уравнение относительно параметра  $\beta$

$$y(T, y_0, \beta) = y_1, \quad (10)$$

которое выражается с граничными условиями  $y_0$  и  $y_1$ !

Здесь может быть два случая:

1) Пусть уравнение (9) имеет единственное решение,

$$\beta = m(y_0, y_1), y_0 \in D(y_0), y_1 \in D(y_1) \quad (11)$$

Значит, параметр  $\beta$  порождается граничными условиями  $y_0$  и  $y_1$ . Такой факт установлен впервые. Подставляя (11) в (9) имеем непрерывную функцию

$$y=y(t,y_0,m(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1) \quad (12)$$

которая является единственным решением усовершенствованной задачи Коши

$$y'=f(t,y,m(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1) \quad (13)$$

1. Начальное условие

$$y(t_0)=y_0, y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1) \quad (14)$$

2. Плюс, заданное условие в точке  $t=T$

$$y(T)=y_1, y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1) \quad (15)$$

Поэтому полученная функция (12) также является единственным решением краевой задачи.

$$y'=f(t,y,m(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1) \quad (16)$$

граничные условия

$$y(t_0)=y_0, y(T)=y_1, y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1) \quad (17)$$

**Теорема 2.** При соблюдении теоремы 1, решение  $y(t,\beta)$  задачи Коши (6)-(7) на корне

$$\beta=m(y_0,y_1), y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1)$$

Уравнение (10) удовлетворяет условию

$$y(T,m(y_0,y_1))=y_1, y_0 \times y_1 \in D_1(y_0) \times D_2(y_1)$$

Отметим, что краевая задача (16)-(17) имеет решение на специальном параметре  $\beta$  вида (11)!

Теперь рассмотрим когда уравнение (10) имеет более одного корня. Пусть имеем два корня

$$\beta_1=d_1(y_0,y_1), y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1) \quad (18)$$

$$\beta_2=d_2(y_0,y_1), y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (19)$$

Подставляя (18) в (9) имеем непрерывную функцию

$$y=y(t,y_0,d_1(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1), \quad (20)$$

которая является единственным решением усовершенствованной задачи Коши вида

$$y'=f(t,y,d_1(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1) \quad (21)$$

1) Начальное условие

$$y(t_0)=y_0, y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1). \quad (22)$$

2) Плюс, заданное условие в точке  $t=T$

$$y(T)=y_1, y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1) \quad (23)$$

Она также является решением краевой задачи

$$y'=f(t,y,d_1(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1) \quad (24)$$

граничные условия

$$y(t_0)=y_0, y(T)=y_1, y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1) \quad (25)$$

Теорема доказана.

**Теорема 3.** При соблюдении теоремы 1, решение  $y(t,\beta)$  задача Коши (6)-(7) на корне

$$\beta_1=d_1(y_0,y_1), y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1) \quad (26)$$

Уравнения (10) удовлетворяет условию

$$y(T,d_1(y_0,y_1))=y_1, y_0 \times y_1 \in Q_1(y_0) \times Q_2(y_1)$$

Аналогично, поставляя (19) в (9) также имеем непрерывную функцию

$$y=y(t,y_0,d_2(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1), \quad (27)$$

которая является единственным решением усовершенствованной задачи Коши вида

$$y'=f(t,y,d_2(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (28)$$

1) Начальное условие

$$y(t_0)=y_0, y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (29)$$

2) Плюс, заданное условие в точке  $t=T$

$$y(T)=y_1, y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (30)$$

Она также является решением краевой задачи

$$y'=f(t,y,d_2(y_0,y_1)), t \in [t_0,T], y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (31)$$

граничные условия

$$y(t_0)=y_0, y(T)=y_1, y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (32)$$

**Теорема 4.** При соблюдении **теоремы 1**, решение  $y(t, \beta)$  задачи Коши **(6)-(7)** на корне  $\beta_2 = d_2(y_0, y_1)$ ,  $y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1)$  **(33)**

уравнение **(10)** удовлетворяет условию

$$y(T, d_2(y_0, y_1)) = y_1, y_0 \times y_1 \in Q_3(y_0) \times Q_4(y_1) \quad (34)$$

Аналогично можно показать, что если алгебраическое уравнение **(10)** имеет  $n$  корней, то краевая задача **(1)-(5)** распадается на  $n$  краевых задач, каждая из которых имеет единственное решение.

Теперь мы можем говорить о том, что параметр  $\beta$  входящий в уравнение **(4)** в то же время зависит от граничных условий  $y_0$  и  $y_1$ .

Теперь рассмотрим обычную задачу Коши вида

$$y' = f(t, y), t \in [t_0, T] \quad (35)$$

начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \quad (36)$$

Известно, что при некоторых условиях, наложенных на функцию  $f(t, y)$ , данная задача имеет единственное решение.

Теперь для уравнения **(35)** задаем граничные условия

$$y(t_0) = y_0, y(T) = y_1 \quad (37)$$

Тогда имеем краевую задачу

$$y' = f(t, y), t \in [t_0, T] \quad (38)$$

граничные условия

$$y(t_0) = y_0, y(T) = y_1 \quad (39)$$

Ее решаем сведением к усовершенствованной задаче Коши

$$y' = f(t, y(t)), t \in [t_0, T], \quad (40)$$

1) Начальное условие

$$y(t_0) = y_0. \quad (41)$$

2) Плюс, заданное условие в точке  $t = T$

$$y(T) = y_1. \quad (42)$$

Решение данной задачи можем исследовать, если ее можно свести к усовершенствованной задаче Коши с параметром **(6)-(8)**. Значит, в функцию  $f(t, y(t))$  каким-то образом, надо ввести параметр  $\beta$ . Это можно сделать посредством функции, входящей в  $f(t, y(t))$ . Тем самым, мы построим решение усовершенствованной задачи Коши соответствующее ей. Такую функцию принято называть управляющей.

Способ введения параметра был рассмотрен нами, на примере задачи Коши вида **[4]**

$$y' + p(t)y = q(t), t \in [t_0, T], \quad (43)$$

начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \quad (44)$$

Лишь отметим, что аналогично исследуется, в частности, задача с параметрами вида.

$$y' = f(t, y, \beta_1, \beta_2), t \in [t_0, T], \beta_1 \in [d_1, d_2], \beta_2 \in [C_1, C_2] \quad (45)$$

с условиями

$$y(t_0) = y_0, y(a) = y_1, y(T) = y_2 (a \in (t_0, T)) \quad (46)$$

Продолжение этой статьи следует.

#### Литература:

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. –М.,1958.
2. Тихонов А.Н., Васильева А.Б. Дифференциальные уравнения. –М.,1979.
3. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. -М.,1982.
4. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциальных и интегральных уравнений// Вестник ИГУ, №12, 2004.