

УДК 532.546+518.5

Мурзакматов М У., Исабеков К А.

БГУ им. К. Тыныстанова

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ БАЗИСОВ В НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧЕ ФИЛЬТРАЦИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Для разработки теоретически обоснованных рекомендаций по осуществлению мер, связанных с рациональным и экономичным использованием, охраной от истощения и загрязнения запасов подземных вод, а также для прогнозирования их режима с учетом естественных и искусственных факторов необходимо изучать динамику подземных вод в пространственной постановке.

Нестационарная фильтрация подземных вод в пространственной области описывается уравнением [3]:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H}{\partial z} \right) = W, \quad (1)$$

$$(x, y, z) \in V, t > 0$$

с начальным

$$H(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), (x, y, z) \in V \quad (2)$$

и граничными условиями,

$$k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, (x, y, z) \in \Sigma, t > 0 \quad (3)$$

где $\mu = \mu(x, y, z)$ - коэффициент упругоэластичности породы;

$\varphi = \varphi(x, y, z)$ - начальное распределение напоров; V - область фильтрации, Σ - ее

граница; $\vec{n} = (\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z))$ - внешняя нормаль к границе.

$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(n, z)$ - производная по внешней нормали к границе области.

Задачу (1) - (3) решаем численно с помощью метода конечных элементов. Для этого область V разбиваем на m тетраэдральных элементов.

В качестве базисных функций используем частные решения следующего однородного нестационарного уравнения

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} \right), \quad (4)$$

которые имеют вид

$$N_i(x, y, z, t) = e^{-3it} \cos v_i u, \quad i = 1, 2, \dots \quad (5)$$

где

$$u = x + y + z, \quad v_i = \sqrt{i\mu/k}.$$

С помощью этих базисов образуем функции формы

$$F_s(x, y, z) = a_s + b_s \cos v_1 u + c_s \cos v_2 u + d_s \cos v_3 u, \quad (6)$$

$$s = i, j, k, l$$

и в элементе (e) искомую функцию $H(x, y, z, t)$ аппроксимируем функцией

$$H^{(e)}(x, y, z, t) = H_i(t)F_i^{(e)}(x, y, z) + H_j(t)F_j^{(e)}(x, y, z) + H_k(t)F_k^{(e)}(x, y, z) + H_l(t)F_l^{(e)}(x, y, z),$$

а приближенное решение начально-краевой задачи (1) - (3) ищем в виде

$$H_n(x, y, z, t) = \sum_{e=1}^m H^{(e)}(x, y, z, t) = \sum_{e=1}^m [H_i(t)F_i^{(e)}(x, y, z) + H_j(t)F_j^{(e)}(x, y, z) + H_k(t)F_k^{(e)}(x, y, z) + H_l(t)F_l^{(e)}(x, y, z)] = \sum_{r=1}^n H_r(t)F_r(x, y, z). \quad (7)$$

Здесь

$$H_i^{(e)} = H^{(e)}(x_i, y_i, z_i, t), \quad H_j^{(e)} = H^{(e)}(x_j, y_j, z_j, t),$$

$$H_k^{(e)} = H^{(e)}(x_k, y_k, z_k, t), \quad H_l^{(e)} = H^{(e)}(x_l, y_l, z_l, t).$$

Для приближенного решения задачи образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s=1, 2, \dots$. Подставляя в задаче (1) - (3) вместо $H(x, y, z, t)$ функцию $H_n(x, y, z, t)$ из формулы (7) и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем [4,6]:

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i(LH_n - W)dv = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i(LH_n - \alpha)d\sigma, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$L = \mu \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

$$l = k \left[\frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y) + \frac{\partial}{\partial z} \cos(n, z) \right].$$

Первое слагаемое в левой части формулы (8) преобразуется следующим образом :

$$\begin{aligned} \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} dv &= \sum_{j=1}^n \iiint_V \mu F_i \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t} [H_j(t)F_j(x, y, z)] dt dv = \\ &= \sum_{j=1}^n \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial H_j(t)}{\partial t} dt = \sum_{j=1}^n M_{ij} H_j^s - \sum_{j=1}^n M_{ij} H_j^{(s-1)}, \end{aligned}$$

где

$$M_{ij} = \iiint_V \mu(x, y, z) F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) dv, \quad H_j^s = H(x_j, y_j, z_j, t_s),$$

$$H_j^{s-1} = H(x_j, y_j, z_j, t_{s-1}).$$

К остальным слагаемым объемного интеграла в равенстве (8) применяем первую формулу Грина. Имеем

$$- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H_n}{\partial z} \right) \right] dv =$$

$$\begin{aligned}
 &= - \sum_{j=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} H_j(t) dt \iiint_V F_i \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial F_j}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial H_j}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial H_j}{\partial z} \right) \right] dv = \\
 &= \sum_{j=1}^m [\sigma H_j(t_s) + (1-\sigma)H_j(t_{s-1})] \Delta t_s \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv - \\
 &\quad - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i k \frac{\partial H_n}{\partial n} d\sigma = \sum_{j=1}^n \sigma H_j(t_s) N_{ij} \Delta t_s + \\
 &\quad + \sum_{j=1}^n (1-\sigma) H_j(t_{s-1}) N_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt.
 \end{aligned}$$

Здесь $0 < \sigma \leq 1$,

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= \iiint_V k \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv, \\
 k_j &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) k(x, y, z) \frac{\partial H}{\partial n} d\sigma.
 \end{aligned}$$

В правой части формулы (8) получаем

$$\begin{aligned}
 &- \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Sigma} F_i (lH_n - \alpha) d\sigma = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i \left(k \frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha \right) d\sigma dt = \\
 &= - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt + \sum_{j=1}^n \int_{t_{s-1}}^{t_s} \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) (\beta F_j H_j + \alpha) d\sigma dt = - \int_{t_{s-1}}^{t_s} k_i dt + \\
 &+ \sum_{j=1}^n [\sigma B_{ij}^{(s)} H_j^{(s)} + (1-\sigma) B_{ij}^{(s-1)} H_j^{(s-1)}] \Delta t_s + \sum_{j=1}^n [\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma) A_i^{(s-1)}] \Delta t_s,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_{ij} &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) F_j(x, y, z) \beta(x, y, z, t) d\sigma, \\
 A_i &= \iint_{\Sigma} F_i(x, y, z) \alpha(x, y, z, t) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения в равенство (8), получаем СЛАУ относительно неизвестных $H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s)$:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} H_j^{(s)} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Таблица 1

Точные и приближенные значения напоров

<i>z, м</i>	Расст. от оси <i>l</i>	<i>30 сут</i>		<i>180 сут</i>		<i>360 сут</i>		Отн. погр. в %
		Точные значения Прибл. значения		Точные значения Прибл. значения		Точные значения Прибл. значения		
		Лин.базис	Нелин.бази с	Лин.базис	Нелин.бази с	Лин.базис	Нелин.бази с	
<i>0</i>	<i>3000 м</i>	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	1000.00	
		988.03	990.01	980.00	975.00	975.00	970.00	3.0
	<i>2000 м</i>	979.45	979.45	876.71	876.71	753.43	753.42	
		967.70	968.68	861.81	867.94	733.09	730.06	3.1
	<i>1000 м</i>	967.12	967.12	802.74	802.74	605.48	605.48	
962.29		960.35	792.30	878.49	586.71	589.13	3.1	
<i>50</i>	<i>3000 м</i>	999.90	999.90	999.39	999.38	998.74	998.77	
		989.00	980.00	974.40	979.39	963.81	966.81	3.5
	<i>2000 м</i>	979.35	979.35	876.10	876.10	752.19	752.19	
		970.54	964.66	852.44	851.32	731.88	729.62	3.3
	<i>1000 м</i>	967.02	967.02	802.12	802.12	604.25	604.25	
957.35		958.32	786.08	788.48	582.52	625.78	3.7	
<i>100</i>	<i>3000 м</i>	999.59	999.59	997.54	997.53	995.07	995.07	
		982.60	972.60	970.61	968.60	954.27	955.27	4.0
	<i>2000 м</i>	979.04	979.04	874.24	874.25	748.49	748.49	
		954.56	956.52	849.77	848.02	722.28	717.80	4.1
	<i>1000 м</i>	966.71	966.71	800.27	800.27	600.55	600.55	
959.94		959.94	781.86	784.26	581.93	583.13	3.1	

$$\begin{aligned}
 a_{ij} &= M_{ij} + (N_{ij}^{(s)} - \sigma B_{ij}^{(s)}) \Delta t_s, \\
 b_i &= [\sigma W_i^{(s)} + (1 - \sigma) W_i^{(s-1)}] \Delta t_s + \sum_{j=1}^n \{ [M_{ij} - (1 - \sigma) B_{ij}^{(s-1)}] \Delta t_s H_j^{(s-1)} + \\
 &\quad + [\sigma A_i^{(s)} + (1 - \sigma) A_i^{s-1}] \Delta t_s \}, \\
 W_i &= \iiint_V F_i(x, y, z, \mathcal{W}(x, y, z, t)) dv.
 \end{aligned}$$

Система уравнений (9) решается шаг за шагом при значениях $s=1, 2$. При $s=1$ вместо $H^{(0)} = H(x, y, z, 0)$ берется начальное распределение напоров из условия (2) и находятся значения функции H при $t = t_1$. Используя полученную функцию

$H^{(1)} = H(x, y, z, t_1)$ в качестве начальных условий, вычисляются значения функции $H^{(2)} = H(x, y, z, t_2)$ и т. д. На каждом временном слое матрица системы (9) является симметричной с диагональным преобладанием, поэтому ее можно решать одним из точных методов (например, методом Гаусса).

Пример. В качестве тестового примера рассмотрим неустановившееся движение подземных вод в водоносном горизонте мощностью $m=100$ м и с коэффициентом фильтрации $k=10$ м/сут. Область фильтрации представляет собой прямой круговой цилиндр радиуса $r=3000$ м, на боковой поверхности которого задано краевое условие

$$k \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \text{ с } \alpha = 0 \text{ м/сут, } \beta = -\frac{3}{500 + 5 \cdot 10^{-5} z^2} \text{ (1/сут),}$$

а на верхней и нижней основаниях – условие непроницаемости $\frac{\partial H}{\partial n} = 0$. Считаем, что перетоков из выше- и нижележащих пластов нет, т.е $Q = 0$ (1/м·сут) и

$$f = -10^3 + 5 \cdot 10^5 (9 \cdot 10^6 - x^2 - y^2 + z^2) \text{ (1/сут).}$$

В данном случае напорная функция имеет вид

$$H(x, y, z, t) = H_0 - \varepsilon_0 (l^2 - x^2 - y^2 + 10z^2) \cdot t,$$

где $\varepsilon_0 = 10^{-6} / 73$, а t измеряется в сутках.

В табл. 1. приведены точные и приближенные значения напоров в различные моменты времени в точках, расположенных на оси цилиндра (узлы № 20,59,98) и на расстояниях 1000 м (узлы № 14,53,92), 2000 м (узлы № 9,47,48,86,87), 3000 м (узлы № 2,3,5,41,42,44,80,81,83) от оси цилиндра на глубине $z=0$ м, $z=50$ м, $z=100$ м. Причем в первом столбце даны значения полученные с применением линейного базиса, а во втором столбце-с применением нелинейного базиса.

Из сравнения данных видно, что значения почти одинаковые. Но применение нелинейного базиса имеет преимущество в плане экономии памяти ЭВМ и упрощения сеточной области. В реальных условиях область фильтрации разбивается на крупные фрагменты. В табл. 1. приводятся результаты в одном и том же узле, полученные применением различных базисов. Поэтому применение нелинейного базиса при решении подобных задач имеет не только теоретический, но и весьма значительный практический интерес.

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. –М.: Наука, 1977. -664 с.
2. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. -Бишкек: Илим, 2005. -180 с.