УДК 517.2

С. Шарипов, К.С. Шарипов.

УРАВНЕНИЕ С РАЗДЕЛЯЮЩИМИСЯ ПЕРЕМЕННЫМИ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ.

Решение задачи вида:

$$f_1(y)dy + f_2(t)dt = 0,$$
$$y(t_0) = y_0$$

исследована впервые в случае, когда функция $f_1(y)$ является разрывной функцией по переменной (по искомой функции) y(t).

Рассмотрим уравнение вида $f_1(y)dy + f_2(t)dt = 0$.

Ранее такое уравнение в классе непрерывных функций исследовалось достаточно хорошо [1].

Многие практические задачи [2] сводятся к решению уравнения (1), в случае, когда функция $f_1(y)$ является разрывной функцией по y, а $f_2(t)$-разрывной функцией по t. Сначала даем понять, в каком классе разрывных функцией $f_1(y)$ и $f_2(t)$ исследуем решение уравнения (1).

Рассмотрим непрерывную функцию вида

$$C(t) = \begin{cases} \varphi(t), t_0 \le t \le a, \\ \psi(t), a \le t \le T \end{cases} \tag{2}$$

с условиями

$$1. \varphi(a-0) = \psi(a+0), \tag{3}$$
$$2. \varphi^1(a-0) \neq \psi^1(a+0) \tag{4}$$

Известно [3], что функция (2) в точке t=a имеет бесчисленное множество производных. Репродуцируя производную, для этих производных выведены формулы исправленных производных первого и второго порядка [4] для непрерывной функции.

$$C(t) = \begin{cases} 0, t_0 \le t \le a, \\ t-a, a \le t \le T \end{cases} \tag{5}$$

Они описываются формулами

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{c(t+\lambda_2) - c(t-\lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} = isc'(t), (\lambda_1 \succ 0, \lambda_2 \succ 0), \tag{6}$$

где

$$isc'(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \le t \prec a, \\ A, & t = a, \\ 1, & a \prec t \le T, \end{cases} \tag{7}$$

$$A = \lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}, 0 \le A \le 1 \tag{8}$$

В этом случае совокупность первых исправленных производных функции (2) имеет вид

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{c(t+\lambda_2) - c(t-\lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} = isc'(t), \tag{9}$$

где

$$isc'(t) = \begin{cases} \varphi'(t), & t_0 \le t \prec a, \\ \varphi'(a-0)(1-A) + \psi'(a+0)A, & t = a \\ \psi'(t), & a \prec t \le T \end{cases} \tag{10}$$

А совокупность вторых исправленных производных определяются по формуле

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{c'(t+\lambda_2) - c'(t-\lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} = isc''(t), \tag{11}$$

где

$$isc''(t) = \begin{cases} \varphi''(t), & t_0 \le t \prec a, \\ \varphi''(a-0)(1-A) + \psi''(a+0)A + [\psi'(a+0) - \varphi'(a-0)]\infty, & t = a, \\ \psi''(t), & a \prec t \le T \end{cases} \tag{12}$$

Совокупность вторых исправленных производных функции (5) равна

$$isc^{11}(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \le t \prec a, \\ +\infty, & t = a, \\ 0, & a \prec t \le T \end{cases} \tag{13}$$

Из формулы (10) и (12) видно, что эти производные можно разложить на простейшие исправленные производные по числам $A \in [0,1]$. Они являются однозначными разрывными функциями первого и второго рода.

Итак, в классе простейших исправленных производных исследуем решение уравнения (1). Начнем исследовать с простейшего уравнения вида

$$Y^1 = f(t), \tag{14}$$

где

$$f(t) = \begin{cases} -1, & t_0 \le t \prec a, \\ 0, & t = a, \\ 1, & a \prec t \le T \end{cases} \tag{15}$$

с начальным условием (16)

$$y(t_0) = y_0 :$$

$$y^1 = \begin{cases} -1, & t_0 \le t \prec a \\ 0, & t = a. \\ 1, & a \prec t \le T, \end{cases} \tag{17}$$

(18)

$$y(t_0) = y_0$$

Прежде чем решить задачу (17)-(18) сначала репродукцируем разрывную функцию (15) с простейшей исправленной производной, выделенной из (7) вида

$$isc^1(t) = \begin{cases} 0, & t_0 \le t \prec a, \\ \frac{1}{2}, & t = a, \\ 1, & a \prec t \le T \end{cases} \qquad (19)$$

Введем обозначение $isc^1(t) = h(\frac{1}{2},a,t)$. Тогда редукцируя форму (15) имеем

$$f(t) = -1 + 2h(\frac{1}{2},a,t) \qquad (20)$$

Редукция формы (15) является неединственной. Тогда имеем

$$y^1 = -1 + 2h(\frac{1}{2},a,t), \qquad (21)$$

$$y(t_0)=y_0 \qquad (22)$$

Ранее нами была разработана теория первообразной от исправленных производных. На основании этой теории решение задачи (21)-(22) можно представить так:

$$y = y_0 + \int_{t_0}^{t}[-1 + 2h(\frac{1}{2},a,s)]ds = y_0 - t \qquad t_0 + 2(t-a)h(\frac{1}{2},a,t), t \in [t_0,T] \qquad (23)$$

Значит непрерывная функция (23) является решением задачи (21)-(22) и она имеет однозначную исправленную производную. Отметим, что средствами классической математики нельзя получить результат вида (23). Этот факт указывает преимущество теории исправленных производных в исследовании решении задачи (21)-(22).

Теперь исследуем решение задачи вида

$$(-1+2h(a-y))dy=dt, \qquad (24)$$

$$y(t_0)=y_1, \qquad (25)$$

где

$$h(a-y) = \begin{cases} 0, y_0 \le y \prec a, \\ \frac{1}{2}, y = a, \\ 1, a \prec y \le Y \end{cases} \qquad (26)$$

является первой исправленной производной непрерывной функции.

$$c(y) = \begin{cases} 0, & y_0 \le y \le a, \\ y-a, & a \le y \le Y \end{cases} \qquad (27)$$

Значит функция

$$-1+2h(a-y)$$

является разрывной функцией по y. Предположим, что эта задача имеет решение в некоторой области Д. Подставив это решение в (24), получим тождество. Интегрируя его, имеем

$$\int_{y_1}^{y}(-1+2h(a-s))ds = t - t_0 \qquad (28)$$

Отсюда

$$-y+y_1+2(y-a)h(a-y)=t-t_0 \qquad (29)$$

Это выражение является частным интегралом задачи (24)-(25) на интервале $[t_0+y_1-a,+\infty)$, то есть в области $Д=\{t\in[t_0+y_1-a,+\infty), y\in(-\infty,\infty)\}$.

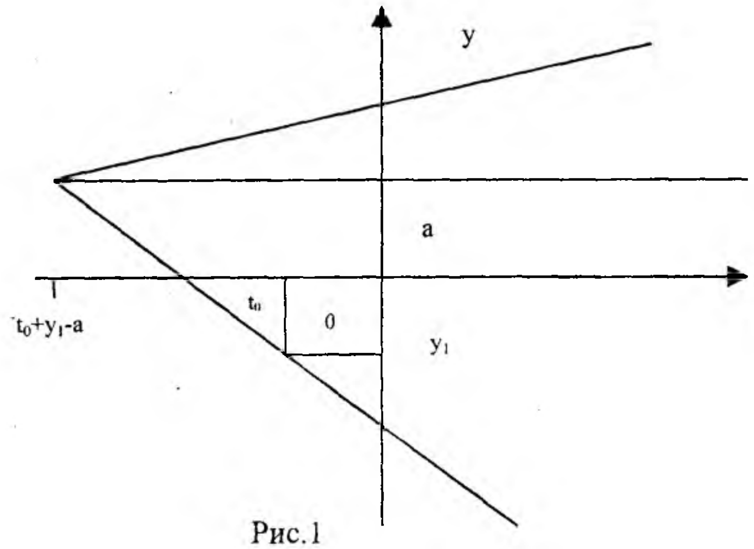


Рис.1

Рисунок –1 дает нам график решения задачи (24)-(25) в случае, когда a>0. Теперь рассмотрим задачу вида

$$(-1+2h(a-y))dy=tdt, \qquad (30)$$

$$y(t_0)=y_1 \qquad (31)$$

где h(a-y) есть функция (26).

Легко можно показать, что частным интегралом является выражение вида

$$-y+y_1+2(y-a)h(a-y)=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}t_0^{\,2} \qquad (32)$$

Отметим, что данная задача имеет решение только при выполнении неравенства вида

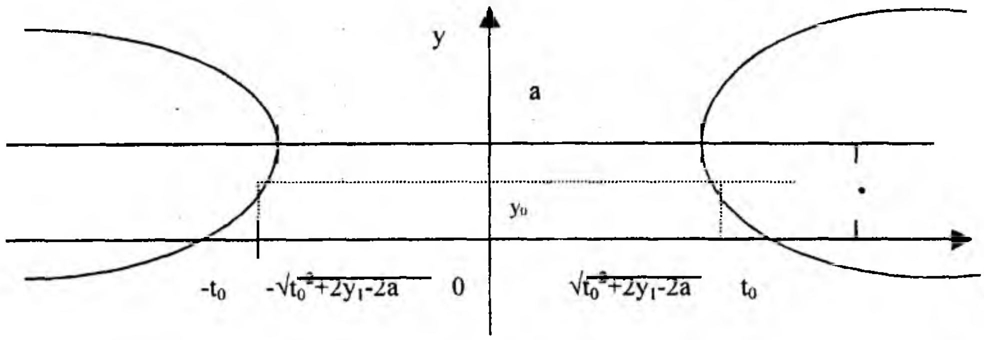
$$t^2_0+2y_1\geq 2a \qquad (33)$$

Частные решения, удовлетворяющие начальному условию (31) лежат в областях

$$D_1=\left\{t\in(-\infty,-\sqrt{t_0^2+2y_1-2a}],y\in(-\infty,a]\right\}$$

$$D_2=\left\{t\in[\sqrt{t_0^2+2y_1-2a},+\infty\},y\in[a,+\infty)\right\}$$

Эти решения задачи (30)-(31) являются взаимно симметричными относительно точки t=0. Приведен график решения задачи (30)-(31) при a>0:



Из этих простейших примеров видно, что решение уравнения вида (1), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0)=y_0$, имеет сложную структуру.

С помощью теории исправленных производных можно успешно исследовать решение задач более общего вида.

$$E(h(a-y))dy=f(t)dt, \tag{33}$$

$$y(t_0)=y_0, \tag{34}$$

здесь

$$E(h(a-y))=\begin{cases} E(0), & y_0 \le y \prec a, \\ E(\frac{1}{2}), & y=a, \\ E(1), & a \prec y \le Y, \end{cases} \tag{35}$$

где $E(0)\neq 0$, $E(1)\neq 0$, $f(t)$-непрерывная функция.

Предположим, что в некоторой области существует решение задачи. Подставляя его в уравнение (33), имеем тождество. Интегрируем полученное тождество. Тогда имеем

$$(y-a)E(h(a-y))+(a-y_0)E(0)=\int_{t_0}^{t} f(s)ds \tag{36}$$

Это и есть частный интеграл задач (34)-(35). Он определяет искомое частное решение в неявной форме. Решение неравенства

$$\int_{t_0}^{t} f(s)ds-(a-y)E(0)\le 0 \tag{37}$$

является областью определения частного решения задачи (33)-(34). В точках $t_1,t_2,\ldots,t_n$ как решение алгебраического уравнения

$$\int_{t_0}^{t} f(s)ds=0$$

удовлетворяется начальное условие

$$y(t_i)=y_0,\ i=1,2,\ldots,n.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А.Н, Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальное уравнение -М.:Наука,1980.
2. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.- М.: Наука,1985.

3. Байокки К., Капело А. Вариационные и квази-вариационные неравенства-М.наука,1988.
4. Шарипов С. Методы решения нерегулярных интегральных уравнений типа Вольтерра первого рода: Автореф. Дисс. Канд.Ф.-М.Н.-Фрунзе,1990.