УДК 532.546

М. У. Мурзакматов, К. А. Исабеков, Б.С. Джаныбеков

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ТЕЧЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Рассматривается неустановившееся трехмерное движение подземных вод. Разрабатывается алгоритм численного решения задачи, основанный на методе конечных элементов.

Для разработки теоретически обоснованных рекомендаций по осуществлению мер, связанных с рациональным и экономичным использованием, охраной от истощения и загрязнения запасов подземных вод, а так же для прогнозирования их режима с учетом естественных и искусственных факторов необходимо изучать динамику подземных вод в пространственной постановке.

Нестационарная фильтрация подземных вод в пространственной области описывается уравнением [1,5]

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial H}{\partial z} \right) + Q H = W, \quad (x, y, z) \in D, \ t > 0 \tag{1}$$

с начальным

$$H(x,y,z,0) = \varphi(x,y,z), \ (x,y,z) \in D \tag{2}$$

и граничным

$$K \frac{\partial H}{\partial n} - \beta H = \alpha, \quad (x,y,z) \in \Gamma, \ t > 0 \tag{3}$$

условиями, где $H=H(x,y,z,t)$ - функция напора; $K=K(x,y,z)$ - коэффициент фильтрации; $\mu=\mu(x,y,z)$ - коэффициент упругоемкости породы; $W=W(x,y,z,t)$ функция, описывающая влияние инфильтрации, испарения, источников и стоков; $\varphi=\varphi(x,y,z)$ - начальное распределение напоров; $Q=Q(x,y,z,t)$; $\alpha=\alpha(x,y,z,t)$; $\beta=\beta(x,y,z,t)$- заданные функции; D - область фильтрации, Γ - ее граница; $\vec{n}=(cos(n,^\wedge x),cos(n,^\wedge y),cos(n,^\wedge z))$ - внешняя нормаль к границе.

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial x}\cos(n,^\wedge x)+\frac{\partial}{\partial y}\cos(n,^\wedge y)+\frac{\partial}{\partial z}\cos(n,^\wedge z)$$ - производная по внешней нормали к границе области.

Задачу *(1) - (3)* решаем численно с помощью метода конечных элементов. Для этого область D разбиваем на m тетраэдральных элементов.

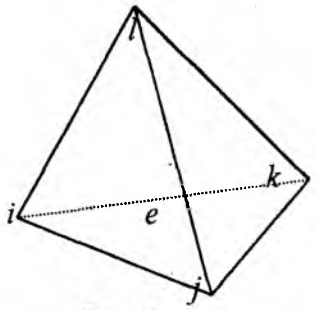

Рис. 1

На рис.1 показан типичный элемент *(e)* с вершинами *i, j, k, l,* которые имеют координаты (x_i, y_i, z_i), (x_j, y_j, z_j), (x_k, y_k, z_k) и (x_l, y_l, z_l).

Введем линейные базисные функции [2]

$$F_i^{(e)}(x,y,z)=(a_i+b_ix+c_iy+d_iz)/\det C,$$
$$F_j^{(e)}(x,y,z)=(a_j+b_jx+c_jy+d_jz)/\det C,$$
$$F_k^{(e)}(x,y,z)=(a_k+b_kx+c_ky+d_kz)/\det C,$$
$$F_l^{(e)}(x,y,z)=(a_l+b_lx+c_ly+d_lz)/\det C.$$

где

$$C=\begin{pmatrix} 1 & x_i & y_i & z_i \\ 1 & x_j & y_j & z_j \\ 1 & x_k & y_k & z_k \\ 1 & x_l & y_l & z_l \end{pmatrix},$$

$a_i, b_i, c_i, d_i, ..., a_l, b_l, c_l, d_l$ - элементы матрицы C^{-1}, обратной к матрице C:

$$C^{-1} = \frac{1}{detC}\begin{pmatrix} a_i & a_j & a_k & a_l \\ b_i & b_j & b_k & b_l \\ c_i & c_j & c_k & c_l \\ d_i & d_j & d_k & d_l \end{pmatrix}$$

Искомую функцию *H(x,y,z,t)* внутри элемента *(e)* аппроксимируем функцией

$$H^{(e)}(x,y,z,t) = H_i^{(e)}(t)F_i^{(e)}(x,y,z) + H_j^{(e)}(t)F_j^{(e)}(x,y,z) +$$
$$+ H_k^{(e)}(t)F_k^{(e)}(x,y,z) + H_l^{(e)}(t)F_l^{(e)}(x,y,z),$$

а приближенное решение начально - краевой задачи *(1) - (3)* ищем в виде

$$H_n(x,y,z,t) = \sum_{e=1}^{m} H^{(e)}(x,y,z,t) = \sum_{e=1}^{m}[H_i^{(e)}(t)F_i^{(e)}(x,y,z) + H_j^{(e)}(t)F_j^{(e)}(x,y,z) +$$
$$+ H_k^{(e)}(t)F_k^{(e)}(x,y,z) + H_l^{(e)}(t)F_l^{(e)}(x,y,z)] = \sum_{r=1}^{n} H_r(t)F_r(x,y,z) \qquad (4)$$

Здесь n = 4m, $H_i^{(e)}(t) = H^{(e)}(x_i,y_i,z_i,t)$, $H_j^{(e)}(t) = H^{(e)}(x_j,y_j,z_j,t)$,
$H_k^{(e)}(t) = H^{(e)}(x_k,y_k,z_k,t)$, $H_l^{(e)}(t) = H^{(e)}(x_l,y_l,z_l,t)$.

Для приближенного решения задачи образуем временную сетку с шагом $\Delta t_s = t_s - t_{s-1}$, $s=1, 2, \ldots$.Подставляя в задаче *(1) - (3)* вместо *H(x,y,z,t)* функцию $H_n(x,y,z,t)$ из формулы *(4)* и проведя интегрирование на отрезке $[t_{s-1}, t_s]$, по обобщенному принципу Галеркина получаем *[3,4]*

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_D F_i(LH_n - W)dv = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Gamma F_i(lH_n - \alpha)ds \qquad (5)$$

i=1,2,…,n,

где

$$L = \mu\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial}{\partial z}\right) + Q,$$

$$l = K\left[\frac{\partial}{\partial x}cos(n,\hat{\ } x) + \frac{\partial}{\partial y}cos(n,\hat{\ } y) + \frac{\partial}{\partial z}cos(n,\hat{\ } z)\right] - \beta(x,y,z,t).$$

Первое слагаемое в левой части формулы (5) преобразуется следующим образом :

$$\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_D F_i \mu \frac{\partial H_n}{\partial t} dv = \sum_{j=1}^{n} \iiint_D \mu F_i \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial}{\partial t}[H_j(t) F_j(x,y,z)] dt dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \iiint_D \mu(x,y,z) F_i(x,y,z) F_j(x,y,z) dv \int_{t_{s-1}}^{t_s} \frac{\partial H_j(t)}{\partial t} \partial t = \sum_{j=1}^{n} M_{ij} H_j^s - \sum_{j=1}^{n} M_{ij} H_j^{(s-1)}$$

где

$$M_{ij} = \iiint_D \mu(x,y,z) F_i(x,y,z) F_j(x,y,z) dv,$$

$$H_j^s = H(x_j, y_j, z_j, t_s) \qquad H_j^{s-1} = H(x_j, y_j, z_j, t_{s-1})$$

К остальным слагаемым объемного интеграла в равенстве *(5)* применяем первую формулу Грина. Имеем

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iiint_D F_i \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial H_n}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial H_n}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial H_n}{\partial z}\right) - QH \right] dv =$$

$$= -\sum_{j=1}^{n} \int_{t_{s-1}}^{t_s} H_j(t) dt \iiint_D F_i \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial F_j}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial H_j}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial H_j}{\partial z}\right) - QF_j \right] dv =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} [\sigma H_j(t_s) + (1-\sigma) H_j(t_{s-1})] \Delta t_s \iiint_D \left[K \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) + \right.$$

$$\left. + QF_i F_j \right] dv - \int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_\Gamma F_i K \frac{\partial H_n}{\partial n} ds = \sum_{j=1}^{n} \sigma H_j(t_s) N_{ij} \Delta t_s +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} (1-\sigma) H_j(t_{s-1}) N_{ij} \Delta t_s - \int_{t_{s-1}}^{t_s} K_i dt$$

Здесь $0 < \sigma \leq 1$,

$$N_{ij} = \iiint_D K \left(\frac{\partial F_i}{\partial x} \frac{\partial F_j}{\partial x} + \frac{\partial F_i}{\partial y} \frac{\partial F_j}{\partial y} + \frac{\partial F_i}{\partial z} \frac{\partial F_j}{\partial z} \right) dv + \iiint_D QF_i(x,y,z) F_j(x,y,z) dv,$$

$$K_i = \iint_{\Gamma} F_i(x,y,z)K(x,y,z)\frac{\partial H_n}{\partial n}ds.$$

В правой части формулы *(5)* получаем

$$-\int_{t_{s-1}}^{t_s} dt \iint_{\Gamma} F_i(lH_n - \alpha)ds = -\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_{\Gamma} F_i(K\frac{\partial H_n}{\partial n} - \beta H_n - \alpha)dsdt =$$

$$= -\int_{t_{s-1}}^{t_s} K_i dt + \sum_{j=1}^{n}\int_{t_{s-1}}^{t_s}\iint_{\Gamma} F_i(x,y,z)(\beta F_j H_j + \alpha)dsdt = -\int_{t_{s-1}}^{t_s} K_i dt +$$

$$+\sum_{j=1}^{n}[\sigma B_{ij}^{(s)}H_j^{(s)} + (1-\sigma)B_{ij}^{(s-1)}H_j^{(s-1)}]\Delta t_s + \sum_{j=1}^{n}[\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma)A_i^{(s-1)}]\Delta t_s$$

где
$$B_{ij} = \iint_{\Gamma} F_i(x,y,z)F_j(x,y,z)\beta(x,y,z,t)ds,$$

$$A_i = \iint_{\Gamma} F_i(x,y,z)\alpha(x,y,z,t)ds.$$

Подставляя полученные выражения в равенство *(5)*, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных

$H_j^{(s)} = H(x_j, y_j, z_j, t_s)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}H_j^{(s)} = b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,n, \qquad (6)$$

где

$$a_{ij} = M_{ij} + \sigma(N_{ij}^{(s)} - B_{ij}^{(s)})\Delta t_s,$$

$$b_i = [\sigma W_i^{(s)} + (1-\sigma)W_i^{(s-1)}]\Delta t_s + \sum_{j=1}^{n}\{[M_{ij} - (1-\sigma)(N_{ij}^{(s-1)} -$$

$$- B_{ij}^{(s-1)}\Delta t_s]H_j^{(s-1)} + [\sigma A_i^{(s)} + (1-\sigma)A_i^{s-1}]\Delta t_s\},$$

$$W_i = \iiint_D F_i(x,y,z)W(x,y,z,t)dv.$$

Система уравнений *(6)* решается шаг за шагом при значениях $s=1, 2, \ldots$. При $s=1$ вместо $H^{(0)} = H(x,y,z,0)$ берется начальное распределение напоров из условия *(2)* и находятся значения функции H при $t = t_1$. Используя полученную функцию $H^{(1)} = H(x,y,z,t_1)$ в качестве начальных условий, вычисляются значения функции $H^{(2)} = (x,y,z,t_2)$ и т. д. На каждом временном слое матрица системы *(6)* является симметричной с диагональным преобладанием, поэтому ее можно решать одним из точных методов (например, методом Гаусса).

Алгоритм решения задачи *(1) - (5)* отлаживался на следующем тестовом примере.

В цилиндрической области

$$D=\left\{x^2+y^2\leq 0.25,\ \ 0\leq z\leq 0.4\right\}$$

ищется функция $H(x,y,z,t)$ при следующих данных :

$$K(x,y,z)=x+y+z+2, \qquad Q(x,y,z,t)=2t,$$
$$W(x,y,z,t)=e^t[(2t+1)(x^2+y^2+z^2+1)-8(x+y+z+2)+4].$$

На поверхности цилиндра задается краевое условие

$$K\frac{\partial H}{\partial n}=\beta H+\alpha,$$

где на боковой поверхности

$$\alpha(x,y,z,t)=0, \qquad \beta(x,y,z,t)=\frac{K(x,y,z)}{1.25+z^2};$$

на верхнем основании цилиндра

$$\alpha(x,y,z,t)=0, \qquad \beta(x,y,z,t)=0;$$

на нижнем основании -

$$\alpha(x,y,z,t)=0, \qquad \beta(x,y,z,t)=\frac{2zK(x,y,z)}{x^2+y^2+z^2+1}.$$

Основание цилиндра разбито на 56 треугольных элементов. Шаги по x и y меняются от 0.1 до 0.2. Шаг по z равняется $\Delta z=0.2$, т. е. цилиндрическая область заменяется областью, состоящей из 112 треугольных прямых призм высотой $h=0.2$ или из 336 тетраэдров. Общее число узлов области (вершин тетраэдров) равно 111. Шаг по времени $\Delta t=0.01$.

Точным решением задачи является функция

$$H(x,y,z,t)=(x^2+y^2+z^2+1)\cdot e^t.$$

В таблице приведены точные и приближенные значения этой функции в узлах второй четверти круга

$$x^2+y^2\leq 0.25 \quad (x\leq 0,\ y\geq 0),$$

причем узлы *1, 2, 4, 9, 16, 38, 39, 41, 46, 53, 75, 76, 78, 83, 90* лежат на боковой поверхности цилиндра, а узлы *19, 56* и *93* - на его оси. Наибольшие отклонения от точного значения наблюдаются в узлах *2, 5, 53, 83, 84, 90,* так как треугольные элементы, прилежащие к этим узлам, имеют наибольшие размеры : $\Delta x=\Delta y=\Delta z=0.2$, а ребра тетраэдра являются диагоналями этих треугольников.

Номера	z	t = 0.1		t= 0.2		t = 0.3	
узлов		Точное знач.	Прибл. знач.	Точное знач.	Прибл. знач.	Точное знач.	Прибл. Знач.
2	0	1.264	1.353	1.277	1.415	1.290	1.469
4	0	1.258	1.306	1.270	1.362	1.283	1.416

5	0	1.174	1.239	1.186	1.293	1.198	1.343
9	0	1.264	1.269	1.277	1.318	1.290	1.371
10	0	1.174	1.215	1.186	1.263	1.198	1.313
11	0	1.091	1.133	1.102	1.176	1.113	1.220
16	0	1.263	1.258	1.275	1.306	1.288	1.360
18	0	1.050	1.066	1.061	1.102	1.072	1.142
19	0	1.010	1.039	1.020	1.070	1.030	1.101
39	0.2	1.305	1.327	1.318	1.373	1.331	1.422
41	0.2	1.298	1.342	1.311	1.393	1.324	1.447
42	0.2	1.215	1.243	1.227	1.287	1.239	1.333
46	0.2	1.305	1.343	1.318	1.401	1.331	1.460
47	0.2	1.215	1.250	1.227	1.301	1.239	1.353
48	0.2	1.131	1.157	1.143	1.196	1.154	1.238
53	0.2	1.303	1.369	1.316	1.438	1.329	1.502
55	0.2	1.091	1.105	1.102	1.140	1.113	1.180
56	0.2	1.050	1.063	1.061	1.081	1.072	1.107
76	0.4	1.426	1.406	1.440	1.447	1.455	1.496
78	0.4	1.419	1.451	1.433	1.507	1.448	1.567
79	0.4	1.336	1.366	1.349	1.409	1.363	1.459
83	0.4	1.426	1.510	1.440	1.587	1.455	1.657
84	0.4	1.336	1.407	1.349	1.471	1.363	1.532
85	0.4	1.252	1.270	1.265	1.310	1.278	1.356
90	0.4	1.424	1.494	1.438	1.577	1.453	1.648
92	0.4	1.212	1.204	1.224	1.242	1.237	1.286
93	0.4	1.172	1.128	1.183	1.134	1.195	1.157

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова - Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. - М.: Наука, 1977.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов.-М.: Мир, 1979.
3. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ. - Фрунзе: Илим, 1989.
4. Джаныбеков Ч. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. -Фрунзе: Илим. 1982.
5. Шестаков В.М. Динамика подземных вод. –М.: Изд.МГУ, 1973.