# МАТЕМАТИКА

УДК 517. 968

В.В. Булатаева.

## ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА – ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА ТИПА СВЕРКИ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

*Путем применения преобразования Фурье и ввода некоторых новых понятий в работе доказаны теоремы единственности для скалярных линейных уравнений Вольтерра-Фредгольма первого рода типа свертки со многими переменными и их систем.*

Вопросы единственности решения для скалярных линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода типа свертки и их систем были решены в работиах [1-4]. В работе [5] для скалярных интегральных уравнений первого рода с двумя независимыми переменными и их систем доказаны теоремы единственности.

В данной работе исследуются вопросы единственности решений для скалярного уравнения и для систем уравнений со многими переменными.

1.Скалярное уравнение.

Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{Au} \equiv \int_0^t K(t-s)U(s,x)ds + \int_0^t \int_{R^m} H(t-s,x-y)U(s,y)dyds = f(t,x_1,x_2,...,x_m) \qquad (1)$$

где (t,x) $\in G\times R^m, G=[0;T]\text{или} G=[0,\infty), K(t), H(t,x_1x_2,...,x_m)\text{и} f(t,x_1x_2,...,x_m)$

- известные непрерывные функции, U $(t,x_1,x_2,\dots,x_m)$ – неизвестная функция.

$R^m$ – множество, элементами которого являются всевозможные упорядоченные m действительных чисел, где расстояние между элементами x $=(x_1, x_2, \dots,x_m)$ и $y=(y_1, y_2,\dots,y_m)$, где $x_i,y_i\in R$ $(i=1,2,\dots,n)$, определяется формулой $p(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i-y_i)^2}$.

Пусть $x=(x_1,x_2,\dots, x_ь)$ и $\lambda= (\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$, тогда преобразование Фурье, рассмотренное для функций одной переменной, можно перенести на функцию многих переменных.

Пусть U $(t,x_1,x_2,\dots,x_m)$ - интегрируемая функция по всему m – мерному пространству $R^m$, тогда:

$$F(U)=\hat{U}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_ь), = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\cdots \int_{-\infty}^{\infty}\{ \int U(x_1,x_2,...,x_{m)} \cdot e^{-ш\pi x_2\ \lambda_2} dx_2 \cdot ...\right\}\cdot$$

$e^{-i\pi x|\lambda|}dx_m= \int_{R^m} e^{-i\pi(\lambda,x)}$ $U(t,x_1,x_2,\dots,x_m)dx$ – преобразование Фурье, где

$(\lambda,x)=\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i$

$$F^{-1}(U)=U(t,x_1x_2,\dots,x_m)= \int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} \hat{U}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\,\ell^{i\pi(x_1\lambda_1+x_2\lambda_2+...+x_m\lambda_m)}d\lambda_1...d\lambda_m = \int_{R^m}\ell^{i\pi(\lambda,x)}$$

$\hat{U}(t,\lambda)d\lambda$ – обратное преобразование Фурье.

Справедливы следующие равенства:

Если $U \otimes V = \int\limits_{R^m} U(x-y)V(y)dy$ - операция свертки по x, тогда преобразование Фурье свертки двух функций равно произведению преобразований Фурье этих функций, т.е. $F(U \otimes V) = F(U) \cdot F(V)$.

Тогда, если к уравнению (1) применим преобразование Фурье, то имеем: F(AU)=F(f), т.е.

$$\int\limits_0^t [K(t-s) + \hat{H}(t-s,\lambda)]\,\hat{U}(s,\lambda)ds = \hat{f}\ (t,\lambda) \qquad (2)$$

В силу теоремы Титчмарша [2] из (2) вытекает справедливость следующих теорем:

**Теорема 1.** Если K(t) + $\hat{H}(t,\lambda)$ тождество не равно нулю на $[0;\infty)$ почти при всех $\lambda \in R^m$, то решение уравнения (2), т.е. (1) единственно в пространстве C $([0;\infty); L_2(R^m))$.

**Теорема 2.** Пусть при почти всех $\lambda \in R^m$ не существует $\delta = \delta(\lambda) \in (0,T]$ такое , что $K(t) + \hat{H}(t,\lambda) \equiv 0$, $t \in (0,\delta)$,

Тогда решение уравнения (1) единственно в пространстве $C([0;T); L_2(R^m))$.

Пример 1. $K(t) = t^n$, $n>0$, $t \in [0,T]$.

$H(t,x_1,\dots,x_m) = t^m e^{-(1=e^2)(|x_1|+|x_2|+\dots+|x_m|\,)}, m > 0$

Так как

$$F\left(e^{-a|x|}\right) = \prod_{i=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^\infty 2e^{-a|x_i|} \cdot \frac{e^{ix_i\lambda_i} + e^{-ix_i\lambda_i}}{2} dx_i, \text{где} a. > 0; a = 1 + t^2,$$

то преобразуя последний интеграл, получим:

$$F\left(e^{-a|x|}\right) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \alpha^m \prod_{i=1}^m \frac{1}{\alpha^2 + \lambda^2_i}$$

$$\hat{H}(t,\lambda) = \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \alpha^m t^m \prod_{i=1}^m \frac{1}{\alpha^2 + \lambda^2_i}, t \in G, \lambda \in R^m.$$

Тогда $K(t) + \hat{H}(t,\lambda) = t^n + \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)^m \alpha^m t^m \prod_{i=1}^m \frac{1}{\alpha^2 + \lambda^2_i}$.

Поэтому условия теоремы 1 и 2 выполняются.

**2.Система уравнений.**

Рассмотрим систему

$$Au \equiv \int\limits_0^t K(t-s)U(s,x)ds + \int\limits_0^t \int\limits_{R^m} H(t-s,x-y)U(s,y)dyds = f(t,x_1,x_{2,\dots,x_m}), \qquad (3)$$

где(t,x)

$\in G = [0,T) \times R^m, T \in (0,\infty], K(t) = (K_{ij}(t)), H(t,x_1,x_2,\dots,x_m) = (H_{ij}(t,x_1,x_2,\dots,x_m))$

Известные $n\times n$ – матричные непрерывные функции, $f(t,x_1,x_2,\dots,x_m))$ и $U(t,x_1,x_2,\dots,x_m) = (U_i(t,x_1,x_2,\dots,x_m))$ соответственно известная и неизвестная n – мерные вектор – функции.

Рассмотрим $n\times n$ квадратную матричную функцию.

$$A(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = \begin{pmatrix} a_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)a_{12}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)...a_{1n}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) \\ a_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)a_{22}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)...a_{2n}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)a_{n2}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)...a_{nn}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) \end{pmatrix},$$

где элементы $a_{ij}$ $(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ $(1\le i,j\le m)$ - непрерывные вещественные функции, определенные в области $G\times R^m$.

Определим следующие операции:

1.Сверточное произведение матрицы A $(t,\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ на функцию $\alpha(t)$ есть $n\times n$ – матрица $C(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ с элементами

$$C_{ij} = a * a_{ij} = \int_0^t a(t-s)a_{ij}(s,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)ds = a * A$$

т.е. $C=\alpha*A$.

2.Сверточное произведение $n\times n$ – матрицы A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ на $n\times n$ – матрицу $B(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ есть матрица C $(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ с элементами

$$C_{ij}(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} * b_{kj}, \qquad \text{т.е. } C=A*B$$

Определим теперь понятие сверточного (св.) определителя для $n\times n$ – матричной функции A $(t,\lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$. Рассмотрим свертки элементов из A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ вида $\alpha_{1j_1} * \alpha_{2j_2} * \ \dots * \alpha_{nj_n}$,

где $j_1, j_2,\dots, j_n$ перестановка p чисел $1,2,\dots,n$.

Перестановка p приводится к возрастающему порядку чисел с помощью t(p) транспозиций.

Таким образом, каждое такое сверточное произведение содержит один и только один элемент из каждой строки A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ и один из каждого столбца $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$.Существует n! таких сверточных произведений. Введем теперь функцию св. определителя матрицы A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$, в записи св. det $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$, посредством

$$\text{св. det } A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m) = \sum_p (-1)^{t(p)} \alpha_{1j_1} * \alpha_{2j_2} * \dots * \alpha_{nj_n}, \tag{4}$$

где p пробегает все n! перестановок чисел $1,2,\dots,n$.

Если $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ – постоянная матрица при $t\in G$, то

$$\text{св. det } A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\det A(t,\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m).$$

Так как каждый член в (4) содеожит элемент из i-той строки, собирая вместе члены, содержащие $a_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ для $j=1,2,\dots,n$, получим выражение вида:

св.det $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)=a_{i1}*A_{i1}+a_{i2}+\dots+a_{in}$,

где коэффициенты $A_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$, при $a_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$ называем сверточными (св.)алгебраическими дополнениями для $a_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots, \lambda_m)$. Очевидно, что существует подобное выражение для разложения св.det A по его j-му столбцу.

Из определения св. определителя следует, что если

$a_1(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$, $a_2(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$,…$a_n(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$ – столбцы матрицы A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$ и, например,

$a_1(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m) = \alpha(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)*b_1+\beta(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m) * b_2$, то

св. det $(\alpha(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m) * b_1+ \beta(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m) * b_2,a_2,\ldots,a_n)$ = св. det $(b_1,a_2,\ldots,a_n)+ \beta*$св.det$(b_2,a_2,\ldots,a_n)$ и подобно этому для столбца матрицы $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$, т.е. можно сказать, что св.det$A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_m)$ – аддитивная и св. однородная функция от j-го столбца матрицы $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ $(j=1,\ldots,n)$. Подобное утверждение справедливо для строк матрицы A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$.

Сформулируем теперь наиболее важные свойства сверточных определителей, имеющих аналогию со свойствами определителей.

Матрица $A'(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ обозначает транспонированную матрицу к матрице $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$.

**Свойство1.** Св. det $A' (t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m) = A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$, $t\in G$.

**Свойство2.** Если матрица $B(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ получается из $n\times n$ – матрицы A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ перестановкой двух строк (или столбцов), то

св.det $B(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$=-св.det $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$, $t\in G$.

**Свойство3.** Если $n\times n$ – матрица A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ имеет две одинаковые строки (или столбца), то св.det $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)=0$, $t\in G$.

**Свойство4.** Если $s\neq r$, то $a_{s1}*A_{r1}+a_{s2}*A_{r2}+\ldots+a_{sn}*A_{rn}=0$, $t\in G$ и $\lambda\in R^m$ и

$A_{1s}*A_{1r}+a_{2s}*A_{2r}+\ldots+a_{ns}*A_{nr}=0$, $t\in G$ $\lambda\in R^m$.

Если A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ - $n\times n$ – матрица, то св. Минор порядка $n-1$ матрицы A $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ – это сверточный определитель матрицы, получаемый из $A(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$ выбрасыванием одной строки и одного столбца. Сверточный минор, получаемый выбрасыванием строки i и столбца j, обозначается через $M_{ij}$ $(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$.

**Свойство5.** $A_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m) = (-1)^{i+j} M_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$, $t\in G$ называется св. Алгебраическим дополнением элемента $a_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m)$.

Доказательство вышеуказанных свойств определителей аналогично доказательству свойств определителей.

Св. определитель произведения двух квадратных матриц равен св. произведению св. определителей множителей.

Перейдем к изучению системы (3). Применяя к системе (3) преобразование Фурье, имеем:

$$\int_0^t [K(t-s) + \hat{H}(t-s,\lambda)]\hat{U}(s,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)ds \equiv \hat{f}(t, \lambda_1, \lambda_2,\ldots \lambda_m),$$

т.е.

$$\int_0^t A(t-s,\lambda)\hat{U}(s,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)ds \equiv \hat{f}(t,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m), \qquad (5)$$

где $\hat{U}(t,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) = (\hat{U}_i(t,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m))$,

$\hat{f}(t,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m) = (\hat{f}_i(t,\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m))$

$$A(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)=\begin{pmatrix} a_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)a_{12}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots a_{1n}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ a_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)a_{22}(t\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots a_{2n}(t,\lambda_1,\lambda_2\dots,\lambda_m) \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ a_{n1}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)a_{n2}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots a_{nn}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \end{pmatrix},$$

где $a_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)=K_{ij}(t)+ \hat{H}_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$, $i,j=1,\dots,n$.

Определим матрицу:

$$\bar{A}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=\begin{pmatrix} A_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)A_{12}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots A_{1n}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ A_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)A_{22}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots A_{2n}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ A_{n1}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \quad A_{n2}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots A_{nn}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \end{pmatrix},$$

где $A_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$ – св. алгебраическое дополнение элементов $a_{ij}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$.

Через $\bar{A}'(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$ обозначим транспонированную матрицу к $\bar{A}(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$, т.е.

$$\bar{A}'(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)=\begin{pmatrix} A_{11}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)A_{21}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots A_{n1}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ A_{12}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)A_{22}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots A_{n2}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \\ A_{1n}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)A_{2n}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\dots A_{nn}(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \end{pmatrix},$$

Св. умножая систему (4) слева на матрицу $\bar{A}'(t, \lambda_1, \lambda_2,\dots \lambda_m)$ и используя свойство 4 и определение св. алгебраического дополнения, получим

$$\int_0^t \begin{pmatrix} K(t-s,\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & K(t-s,\lambda)\dots & & 0 \\ 0 & 0 & & \dots K(t-s,\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{U}_1(s,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ \hat{U}_2(s,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ \hat{U}_n(s,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \hat{f}_1(t,\lambda\lambda_1,\lambda_2\dots,\lambda_m) \\ \hat{f}_2(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \\ \hat{f}_n(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m) \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где $K(t,\lambda)=св.\det A(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m),(t,\lambda)\in G\times R^m$.

В силу теорем 1 и 2 справедливы следующие теоремы:

**Теорема 3.** Если $K(t,\lambda)$ тождественно не равно нулю на $[0;\infty)$ почти при всех $\lambda\in R^m$, то решение системы (3) единственно в пространстве $C([0;\infty); L_2^n(R^m))$, где

$$U(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)=(U_1(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m),\dots,U_n(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m))\in C([0;\infty);L_2^n(R^m))$$

тогда и только тогда, когда $U_i(t,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)\in C([0;\infty);L_2^n(R^m)), i=1,2,\dots,n.$

**Теорема 4.**Пусть при почти всех $\lambda\in R^m$ не существует $\delta=\delta(\lambda)\in(0;T]$ такое, что $K(t,\lambda)\equiv 0; t\in(0;\delta)$, тогда решение системы (3) единственно в пространстве $C([0,T];L_2^n(R^m))$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. –М.: Гостехиздат, 1948, -415с.
2. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. –М.: Высшая школа, 1975, -407с.
3. Асанов А.А. Обратные задачи для дифференциальных уравнений математической физики. –Новосибирск, 1978, с. 26-34.
4. Асанов А.А. Исследование по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 1985, с.9-17.
5. Булатаева В.В. Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Фредгольма первого рода типа свертки // Вестник Технологического университета «Дастан». 1999, №2, с. 37-42.