

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ПЛАСТИНКИ МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Рассматривается применение метода регуляризации к обратной задаче по определению коэффициента теплопроводности плоского тела.

Задача идентификации коэффициента теплопроводности неоднородной пластинки сводится к решению коэффициентной обратной задачи для уравнения теплопроводности. Для обеспечения единственности решения должны быть заданы значения температуры и искомого коэффициента теплопроводности в некотором дискретном множестве точек, полученные наблюдением или экспериментом.

Установившийся процесс распространения тепла в неоднородной пластинке описывается уравнением (толщина пластинки не учитывается) [1]

$$LT \equiv -\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (1)$$

с граничным условием

$$lT \equiv r \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha + \beta T, \quad (x, y) \in \Gamma = \partial D, \quad (2)$$

где $T(x, y)$ – температура пластинки в точке (x, y) ; $k(x, y)$ – коэффициент теплопроводности материала из которого изготовлена пластинка; $f(x, y)$ – функция источников тепла, расположенных в области его распространения; $\alpha(x, y)$ и

$\beta(x, y)$ – заданные функции; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к границе области

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial}{\partial y} \cos(n, y);$$

n – единичный вектор нормали к границе с составляющими $(\cos(n, x), \cos(n, y))$; D – область пластинки, $\Gamma = \partial D$ – ее граница.

Сначала изложим алгоритм решения прямой задачи (1), (2). Предположим, что решение задачи (1), (2) существует и единственно; оно является классическим и принадлежит пространству Соболева $W_2^{(1)}$, которое состоит из функции $L_2(D)$, имеющих в области D суммируемые с квадратом обобщенные производные. Приближенное решение задачи (1), (2) ищем с помощью метода Галеркина, согласно которому невязки уравнений (1) и (2) должны быть ортогональны функциям, используемым при аппроксимации.

Если функции $N_1, N_2, \dots, N_j, \dots$ образуют базис в рассматриваемом пространстве и для всех $j = 1, 2, \dots$ выполняются равенства [2]

$$\iint_D N_j (LT - f) d\sigma + \int_\Gamma N_j (lT - \alpha) ds = 0, \quad (3)$$

то невязки уравнений (1) и (2) обрабаются в нуль. Поскольку в практических задачах множество базисных функций конечно, равенства (3) выполняются приближенно и мы обычно добиваемся минимизации функционала, стоящего в левой части равенств (3). Минимум этого функционала находится с помощью метода конечных элементов.

Сущность метода конечных элементов заключается в том, что плоская область D произвольным образом разбивается на треугольные элементы (рис.1), из-за

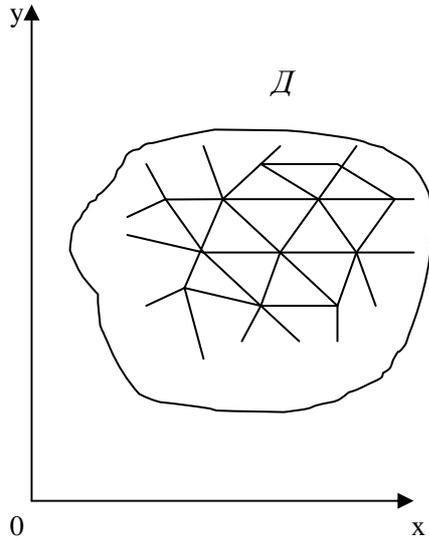


Рис.1. Разбиение области D на треугольные элементы

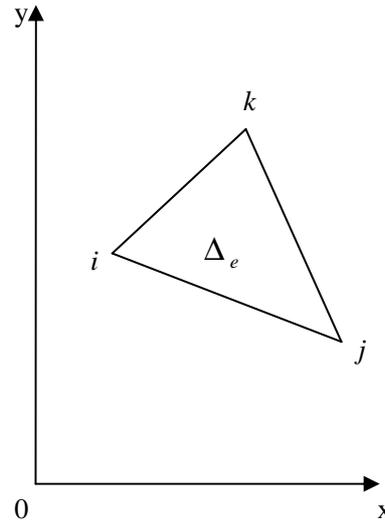


Рис.2. Координаты элементарного

гибкости треугольных элементов аппроксимация области D с помощью треугольников более удобна, чем аппроксимация ее четырехугольниками (или теми и другими одновременно).

Пусть треугольник Δ_e имеет своими вершинами точки i, j, k с координатами $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ (рис. 2). Внутри элементарного треугольника Δ_e решение задачи ищется в виде линейной функции

$$T^e(x, y) = N_i(x, y)T_i + N_j(x, y)T_j + N_k(x, y)T_k \quad (4)$$

где

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y, \quad N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y, \quad N_k(x, y) = a_k + b_k x + c_k y, \quad (5)$$

$$a_i = (x_j y_k - x_k y_j) / \Delta, \quad b_i = (y_j - y_k) / \Delta, \quad c_i = (x_k - x_j) / \Delta,$$

$$a_j = (x_k y_i - x_i y_k) / \Delta, \quad b_j = (y_k - y_i) / \Delta, \quad c_j = (x_i - x_k) / \Delta,$$

$$a_k = (x_i y_j - x_j y_i) / \Delta, \quad b_k = (y_i - y_j) / \Delta, \quad c_k = (x_j - x_i) / \Delta,$$

$$\Delta = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad (6)$$

Δ – площадь треугольника Δ_e , $T_i = T(x_i, y_i)$, $T_j = T(x_j, y_j)$, $T_k = T(x_k, y_k)$ – искомые значения функции $T(x, y)$ в точках i, j, k соответственно.

Составляя для каждого элемента (рис. 2) выражение вида (4) и суммируя их по всем элементам, получаем разложение для искомой функции

$$T(x, y) = \sum_{e=1}^m T^e(x, y) = \sum_{i=1}^n T_i N_i(x, y), \quad (7)$$

где m – число элементов, n – число всех узлов сетки. В первом слагаемом в левой части равенства (3) применяем формулу Грина и после упрощения получаем равенства

$$\iint_D K \left(\frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \int_{\Gamma} N_j \beta T ds = \iint_D N_j f d\sigma + \int_{\Gamma} N_j \alpha ds, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

В равенствах (8) вместо функции $T(x, y)$ подставим ее разложение (7) и приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно T_i :

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \iint_D K \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \int_{\Gamma} N_j N_i \beta ds \right\} T_i = \iint_D N_j f d\sigma + \int_{\Gamma} N_j \alpha ds, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

или

$$\sum_{i=1}^n a_{ji} T = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (9)$$

где

$$a_{ji} = \iint_D K \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) d\sigma + \int_{\Gamma} N_j N_i \beta ds, \\ b_j = \iint_D N_j f d\sigma + \int_{\Gamma} N_j \alpha ds \quad (10)$$

Для вычисления коэффициентов и правых частей системы (9) интегралы по области D разбиваются на m интегралов по треугольникам и вычисляются лишь по элементам, номера вершин которых соответствуют индексам коэффициентов. То же самое можно сказать о контурных интегралах.

Вычислив коэффициенты a_{ji} и b_j , получим замкнутую систему алгебраических уравнений, матрица которой имеет ленточную структуру и является симметричной. Каждый узел сетки является общей вершиной нескольких элементов, поэтому матрица системы (9) не только симметрична, но и имеет диагональное преобладание, что позволяет применять для ее решения точные методы (например метод Гаусса).

Теперь перейдем к задаче идентификации. В задаче (1), (2) задаются еще так называемые внутренние граничные условия

$$T(x_i, y_i) = T_i^3, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (11)$$

$$K(x_j, y_j) = K_j^3, \quad j = 1, 2, \dots, q, \quad (12)$$

о которых говорилось выше.

Задача заключается в определении функции $k(x, y)$ из уравнений (1) и (2) при соблюдении условий (11), (12). Поскольку значения температуры задаются с определенной погрешностью и в недостаточном объеме, то задача нахождения коэффициента уравнения (1) является некорректной, поэтому для ее решения применяем методы регуляризации А.Н. Тихонова [3]. Задача сводится к нахождению функции $k(x, y)$ из пространства $L_2(k)$, сообщающей в области D минимум функционалу

$$\Phi(k) = \sum_{i=1}^p [T_i(k) - T_i^3]^2 + \sum_{j=1}^q (k_j - k_j^3)^2 + \alpha |\delta k|^2, \quad (13)$$

где δk – вариация функции $k(x, y)$; α – параметр регуляризации; $T_i(k)$ – расчетные значения температуры, которые находятся как решение задачи (1), (2).

Задача (1), (2) решается методом конечных элементов. Область фильтрации D разбивается на треугольные элементы таким образом, чтобы точки, в которых заданы экспериментальные значения T_i^3 и k_j^3 , совпали с вершинами элементов. В этих точках используются условия (11) и (12), а в остальных узлах начальные приближения функций $T(x, y)$ и $k(x, y)$ должны удовлетворять условиям $\min_i T_i^3 \leq T \leq \max_i T_i^3$ и $\min_j k_j^3 \leq k \leq \max_j k_j^3$ соответственно.

Для определения поля функции $k(x, y)$ мы, наряду с количественной информацией (условия (11) и (12)), используем также качественную информацию об искомой функции, т. е. функционал $\Phi(k)$ требует, чтобы функция $k(x, y)$ была гладкой, что соответствует физической природе теплопроводности.

Займемся теперь минимизацией функционала (13). При каждом наборе значений функции $k(x, y)$ получаем вполне определенные значения функции $T(x, y)$, т. е. имеем оператор $T(k)$, определенный алгоритмически по формулам метода конечных элементов. Этот оператор в общем случае является нелинейным линеаризуем его следующим образом

$$T(k) = T(\tilde{k}) + \sum_{s=1}^n (k_s - \tilde{k}_s) \frac{\partial T}{\partial K_s} + R_2(\Delta k), \quad (14)$$

где \tilde{k}_s – значения функции k в точке (x_s, y_s) , полученное в предыдущей итерации; $R_2(\Delta k)$ – остаточный член разложения. Подставляя (14) в (13) и используя необходимое условие минимума функции многих переменных, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{\partial \Phi(k)}{\partial k_l} = \sum_{i=1}^n \left[\tilde{T}_i + \sum_{s=1}^n (k_s - \tilde{k}_s) \frac{\partial T_i}{\partial k_s} - T_i^3 \right] \frac{\partial T_i}{\partial k_l} + \mu_l (k_l - \tilde{k}_l^3) + \alpha (k_l - \tilde{k}_l) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$\sum_{s=1}^n c_{ls} k_s = d_l, \quad l = 1, 2, \dots, n \quad (15)$$

с коэффициентами

$$c_{ls} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial k_s} \frac{\partial T_i}{\partial k_l}, \quad l \neq s, \quad c_{ll} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial T_i}{\partial k_l} \right)^2 + \alpha + \mu_l,$$

и с правыми частями

$$d_l = \sum_{i=1}^n \left(T_i^3 - \tilde{T}_i + \sum_{s=1}^n \frac{\partial T_i}{\partial k_s} \tilde{k}_s \right) \frac{\partial T_i}{\partial k_l} + \mu_l k_l^2 + \alpha \tilde{k}_l.$$

$$\text{Здесь } \mu_l = \begin{cases} 1, & \text{если } k_l^3 \text{ задано,} \\ \vartheta, & \text{если } k_l^3 \text{ не задано.} \end{cases}$$

Матрица системы (15) является симметричной и имеет диагональное преобладание и она легко решается методом Гаусса. Производная $\partial T / \partial k$ является операторной, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial k} = \left(\frac{\partial T_i}{\partial k_j} \right), \quad i, j = 1, 2, \dots, n,$$

а частные производные аппроксимируются разностными отношениями

$$\frac{\partial T_i}{\partial k_j} \approx \frac{\partial T_i}{\partial k_j} = \frac{T_i^{(v+1)} - T_i^{(v)}}{k_j^{(v+1)} - k_j^{(v)}},$$

где v – номер итерации.

Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке. Используя начальные значения T и k в качестве первого приближения, решается задача (1), (2) и определяется первое приближение $T^{(1)}$. Затем, придавая приращение Δk функции $k(x, y)$, находим второе приближение $T^{(2)}$. Это дает возможность приближенно определить производную dT/dk и решить систему (15) при некотором значении параметра регуляризации α .

Итерация по v проводится до установления процесса. Если при этом полученные значения температуры в пределах ошибок не совпадут с данными экспериментальными значениями T^3 , то итерация проводится по параметру α .

Работа алгоритма и программы проверена на решении следующей тестовой задачи. Пластинка имеет форму круга $x^2 + y^2 \leq 0,25$, который разбит на 54 треугольника (элемента) с максимальной длиной сторон $\Delta x = \Delta y = 0,2$. Число узлов сетки (вершин треугольников) – 37, из них 18 – граничных. В этой области заданы функции $T(x, y) = x^2 + y^2 + 5$, $f(x, y) = -40(2x^2 + 2y^2 + 1)$. Искомой функцией является

$k(x, y) = 10(x^2 + y^2 + 1)$. Число узлов, в которых задаются экспериментальные значения функции $T(x, y)$, равно: $p = 37,22,5$. В каждом из этих случаев задаются точные значения искомой функции в $q = 17,9,5$ точках.

Форма пластинки и все функции, входящие в задачу, специально подобраны так, чтобы они обладали центральной и осевой симметрией и следовательно, искомое решение имело такие же свойства. Поэтому в таблице 1 приведены значения искомой функции только в узлах, лежащих в первой четверти круга, причем узлы 2 и 9 являются граничными

Приближенные значения функции $k(x, y)$, полученные методом регуляризации

Таблица 1.

Узлы	Точные значения $k(x, y)$	Приближенные значения $k(x, y)$					
		$P=22$			$P=5$		
		$q=1$ 7	$q=9$	$q=5$	$q=1$ 7	$q=9$	$q=5$
2	12,31	12,1 0	11,66	10,9 6	12,1 0	11,6 6	11 ,98
7	11,23	11,2 7	11,27	10,9 2	11,2 7	11,2 7	11 ,83
8	11,63	11,5 8	11,72	10,9 6	11,5 8	11,7 2	11 ,96
9	12,52	12,2 6	12,30	10,9 9	12,2 6	12,3 0	12 ,39
13	10,41	10,5 2	11,37	10,8 6	10,5 2	11,3 8	11 ,71
14	11,21	11,7 8	11,65	11,1 1	11,7 8	11,6 5	11 ,94
19	10,00	10,1 4	10,31	10,3 3	10,1 4	10,3 1	10 ,34
21	11,60	11,8 4	11,64	11,0 0	11,8 4	11,6 4	12 ,04
отн. погр.		5,2 %	9,2%	12,3 %	5,2 %	9,3 %	12 ,5%

Литература

1. Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики.- М.: Наука, 1972.-735 с.
2. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. -Бишкек: Илим, 2005. -180 с.
3. Тихонов А.Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1974.- 233 с.