УДК : 517. 946+518.5

Мурзакматов М.У., Берикбаева Ж.И.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ СТЕРЖНЯ

Рассматривается применение метода регуляризации А.Н. Тихонова к задаче определения коэффициента теплопроводности материала.

В задачах о распространении тепла возникает необходимость определения коэффициента теплопроводности среды, где происходит этот процесс. Часто не бывает возможности определить этот параметр экспериментальным путем. В таких случаях удобно использовать математические методы, в частности, методы идентификации коэффициентов дифференциальных уравнений по известным их решениям. Такие задачи сводятся к решению коэффициентных обратных задач.

Рассмотрим задачу определения коэффициента теплопроводности в одномерном случае. Пусть в стержне длиной l установлен тепловой режим, на концах которого происходит теплообмен с окружающей средой.

Стационарное уравнение теплопроводности для стержня имеет вид [1]

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u = f(x), \qquad 0<x<l, \tag{1}$$

$$-k(x)\frac{du}{dx}+\alpha_1 u=\beta_1, \qquad x=0, \tag{2}$$

$$k(x)\frac{du}{dx}+\alpha_2 u=\beta_2, \qquad x=l, \tag{3}$$

Здесь *u(x)* – температура стержня, $k(x)$ – коэффициент теплопроводности стержня, *f(x)* – функция тепловых источников, $\alpha_i, \beta_i, \quad i=1,2$ - заданные параметры.

Требуется по некоторым известным экспериментальным значениям $u^э$ и $k^э$ определить функцию *k(x)* на всем отрезке [*0,l*]. Поскольку значения температуры задаются с определенной погрешностью, то задача нахождения функции *k(x)* из задачи (1) – (3) является некорректной, поэтому для ее решения применяется метод регуляризации А.Н. Тихонова [2]. В методе регуляризации наряду с количественной информацией используется также качественная информация об искомой функции. В данном случае мы используем экспериментальные значения $u^э$ и $k^э$ и потребуем, чтобы искомая функция была гладкой. Тогда задача сводится к нахождению функции *k(x),* доставляющей на отрезке [*0,l*] минимум функционалу

$$J(k)=\sum_{s=1}^{q}[u_s(k)-u_s^Э]^2+\gamma\sum_{r^\bullet}^{P}(k_{r^\bullet}-k_{r^\bullet}^Э)^2+\alpha\|\delta k\|^2, \tag{4}$$

где u_s – расчетные значения температуры, определяемые из задачи (1)–(3); δk – вариация функции *k(x)*; *q* и *P* – число точек, где заданы экспериментальные значения функций *u(x)* и *k(x)* соответственно; α – параметр, регулирующий близость экспериментальных и искомых значений функции *k(x).*

При каждом значении функции *k(x)* получаем вполне определенные значения температуры *u(x),* т.е. имеем оператор *u(к),* в общем случае нелинейный. Линеаризируем его следуюүим образом:

$$u(k)=u(\tilde{k})+\sum_{j=1}^{n}(k_j-\tilde{k}_j)\frac{\partial u}{\partial k_j}+R_2(k) \tag{5}$$

где $\tilde{k}_j$ – значение функции *k(x)* в точке x_j, полученное в предыдущей итерации; $R_2(k)$ – остаточный член разложения в ряд функции *u(k)*; *n* – число точек деления отрезка [*0,l*].

Подставляя выражение для *u(k)* из (5) формулу (4) и используя необходимое условие минимума функции и многих переменных, получаем.

$$\frac{\partial(J(k))}{\partial k_i}=\sum_{S=1}^{q}\left[\tilde{u}_S+\sum_{j=1}^{n}(k_j-\tilde{k}_j)\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_j}-u_S^Э\right]\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_i}+\gamma_i(k_i-k_i^Э)+\alpha(k_i-k_i)=0,\quad i=1,2,...,n \tag{6}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}k_j=b_i,\quad i=1,2,..,n \tag{7}$$

где

$$a_{ij}=\sum_{S=1}^{q}\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_i}\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_j}\quad \text{при}\quad j\neq i,$$

$$a_{ij}=\sum_{S=1}^{q}\left(\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_i}\right)^2+\alpha+\gamma_i,$$

$$b_i=\sum_{S=1}^{q}\left(u_S^Э-\tilde{u}_S+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_j}\tilde{k}_j\right)\frac{\partial\tilde{u}_S}{\partial k_i}+\gamma_i k_i^Э+\alpha\tilde{k}_i,$$

$$\gamma_i=\begin{cases}\gamma, & если\quad k_i^Э\quad задано,\\ 0, & если\quad k_i^Э\quad не\quad задано;\end{cases}$$

$\frac{\partial u}{\partial k}$ является операторной производной, т.е. это матрица

$$\left(\frac{\partial u_s}{\partial k_i}\right)\qquad \begin{matrix}s=1,2,\dots n\\ i=1,2,\dots n.\end{matrix}$$

Матрица системы (7) является симметричной, имеет диагональное преобладание, поэтому задача минимизации функционала (4) становится устойчивой .

Для решения задачи по приведенному алгоритму на каждой итерации необходимо решать прямую задачу (1) – (3) и определять $\tilde{u}(k)$. Она решается методом конечных элементов [3].

Вычислительная процедура осуществляется в следующем порядке. Используя значения $k^Э$, образуется начальное приближение функции $k(x)$ в узлах сетки: $k_{\min}^Э\le k_i^{(0)}\le k_{\max}^Э$, i=1,2,…,n. Значения $k^Э$ могут быть вообще неизвестными, тогда начальное приближение $k(x)$ задается произвольно (в разумных пределах, например, $0<k_i^{(0)}\le k_{\max}$ где $k_{\max}$ берется из литературных источников). При значениях $k_i<k_i^{(0)}$ решается задача (1) – (3) и находится начальное приближение температуры $U_i^{(0)}$. Затем, придавая последовательно приращения Δk_i, к $k_i^{(0)}$, т.е. образуя функции $k^{(1)}=(k_1^{(0)},k_2^{(0)},...,k_{i-1}^{(0)},k_i^{(0)}+\Delta k_i,k_{i+1}^{(0)},...,k_n^{(0)}),\quad i=1,2,..,n$, и вычисляя соответствующие температуры $u_i^{(1)}$, определяем производные $\partial u/\partial k$ и решаем систему (7). На каждой итерации проверяется выполнение условия

$$\max_S\left|\tilde{u}_S-u_S^Э\right|\le\varepsilon,\quad s=1,2,..,q \tag{8}$$

При выполнении условия (8) счет прекращается, в противном случае итерация проводится по параметру регуляризации α.

Алгоритм и программа отлаживались следующей тестовой задачей. Предположим, что температура на отрезке изменяется по линейному закону:

$u(x)=ax+b$, а искомая функция – по синусоидальному закону: $k(x)=c(\sin x+2)$ и пусть $q(x)=1$. Тогда $f(x)=-ac\cos x+ax+b$. В частности, параметры *a,b,c* принимают значения $a=1$, $b=50$, $c=1,10,50,100$; $q=17,9,5,3,1$; $P= 9,5,3,1,0$.

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.–735 с.
2. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. –М.: Наука, 1974.–233 с.
3. Мурзакматов М.У., Байболотов Б.А. Идентификация коэффициента фильтрации почвогрунтов. //Доклады II Международной конференции «Проблемы управления и информатики». –Бишкек, 2007, Кн. 2.–с.107–112.