УДК 532.546

Ч. Дж. Джаныбеков, М.У. Мурзакматов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ГИДРОГЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ СРЕДЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПОДЗЕМНЫХ ВОД

Методом малых возмущений приближенно решается задача идентификации гидрогеологических параметров водоносного пласта в случае неустановившегося движения подземных вод.

1.Вывод начального условия для сопряженного уравнения

Рассмотрим сопряженные уравнения нестационарной фильтрации. Как известно, нестационарная пространственная фильтрация весомой жидкости в неоднородной пористой среде при определенных упрощающих допущениях моделируется линейным уравнением параболического типа [1]

$$\Lambda h = f(x,y,z,t), \quad (x,y,z)\in V, \ t\in(0,T_0) \tag{1.1}$$

с начальными

$$h(x,y,z,0) = h_0(x,y,z), \qquad (x,y,z)\in V \tag{1.2}$$

и краевыми

$$lh = \alpha(x,y,z,t), \qquad (x,y,z)\in \Sigma = \partial V, \qquad t\in(0,T_0) \tag{1.3}$$

условиями.

Здесь

$$\Lambda = \mu\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial}{\partial z}), \quad l = k\frac{\partial}{\partial n} + \beta,$$

$h(x,y,z,t)$ – функция напора; $k(x,y,z)$ - коэффициент фильтрации пласта; $\mu(x,y,z)$ - упругая водоотдача; $f(x,y,z,t)$ - заданная функция, характеризующая работу водозаборов с учетом инфильтрации и испарения; $h_0(x,y,z)$, $\beta(x,y,z,t)$ и $\alpha(x,y,z,t)$ - заданные функции. На известные данные и границы области налагаются обычные условия гладкости, обеспечивающие существование единственного обобщенного решения из пространства $W_2^{(1)}$.

Как и в работе [2], можно показать, что уравнением, сопряженным уравнению (1.1) с краевым условием (1.3), будет следующее уравнение относительно функции h^*:

$$\Lambda^* h^* = p(x,y,z,t), (x,y,z)\in V, t\in(0,T_0)$$

с краевым условием

$$l^* h^* = lh^* = \alpha^*(x,y,z,t), \ (x,y,z)\in\Sigma, \ t\in(0,T_0),$$

где

$$\Lambda^* = -\mu\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial}{\partial z}), l^* = k\frac{\partial}{\partial n} + \beta. \quad (1.6)$$

Аналогично [2] образуем выражение

$$\iiint_V h^* \Lambda h dv - \iiint_V h\Lambda^* h^* dv = \iiint_V h^* f dv - \iiint_V phdv. \quad (1.7)$$

Используя обозначение

$$\Lambda = T + L, \quad 1.8)$$

где

$$T = \mu\frac{\partial}{\partial t}, \quad L = -\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial}{\partial z}), \quad (1.9)$$

преобразуем левую часть (1.7):

$$\iiint_V h^* \mu\frac{\partial h}{\partial t} dv + \iiint_V h\mu\frac{\partial h^*}{\partial t} dv + \iiint_V h^* Lhdv - \iiint_V hLh^* dv =$$

$$= \iiint_V \mu\frac{\partial (hh^*)}{\partial t} dv + \iint_\Sigma (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma. \quad (1.10)$$

Правая часть (1.7) преобразуется в тождество, верное при всех $t \in (0, T_0)$:

$$\iiint_V \mu\frac{\partial (hh^*)}{\partial t} dv + \iint_\Sigma (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma = J_f[h^*] - J_p[h], \quad (1.11)$$

где

$$J_f[h^*] = \iiint_V fh^* dv, \quad J_p[h] = \iiint_V phdv.$$

Необходимо иметь «начальное» условие для сопряженной задачи (1.4),(1.5), которая, как видно из ее формулировки, является ретроспективной, то есть задачей с обратным течением времени.

Проинтегрируем уравнение (1.11) по t на интервале $(0, T_0)$:

$$\int_0^{T_0}\left[\iiint_V \mu\frac{\partial (hh^*)}{\partial t} dv + \iint_\Sigma (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma\right] dt = \int_0^{T_0}\{J_f[h^*] - J_p[h]\} dt, \quad (1.12)$$

Упрощая первое интегральное выражение в левой части равенства (1.12), получим

$$\int_0^{T_0} dt \iiint_V \mu \frac{\partial(hh^*)}{\partial t} dv = \iiint_V \mu\left(\int_0^{T_0} \frac{\partial(hh^*)}{\partial t} dt\right) dv = \iiint_V \mu(hh^*)\Big|_{t=0}^{t=T_0} dv = \iiint_V \mu(h_{T_0} h_{T_0}^* - h_0 h_0^*) dv, \tag{1.13}$$

где

$$h_{T_0} = h(x,y,z,T_0), \qquad h_{T_0}^* = h^*(x,y,z,T_0), \qquad h_0 = h(x,y,z,0), h_0^* = h^*(x,y,z,0).$$

Полагая, что имеет место равенство

$$h_{T_0} h_{T_0}^* - h_0 h_0^* = 0, \tag{1.14}$$

получаем

$$h_{T_0}^* = h^*(x,y,z,T_0) = \frac{h_0 h_0^*}{h_T}. \tag{1.15}$$

Здесь возможны 2 случая:

а) при заданном $h_0^* = h^*(x,y,z,0)$ за «начальное» условие для ретроспективной задачи можно задать условие (1.15);

б) поскольку начальное условие для задачи (1.4),(1.5) задается произвольно, то для простоты можно полагать $h_0^* = 0$, тогда за начальное, согласно (1.14), можно брать условие

$$h_{T_0}^* = h^*\big|_{t=T_0} = 0. \tag{1.16}$$

Итак, используя равенства (1.14) и (1.13), из (1.12) получим

$$\int_0^{T_0} \{J_f[h^*] - J_p[h]\} dt = \int_0^{T_0} \iint_\Sigma (\alpha^* h - \alpha h^*) d\sigma dt \tag{1.17}$$

Аналогично, при любом $\tau \in (0, T_0)$ из (1.12), после интегрирования на интервале $(0, \tau)$ с использованием условия (1.15) имеем равенство

$$\iiint_V \mu(h_\tau h_\tau^* - h_0 h_0^*) dv + \int_0^\tau dt \iint_\Sigma (\alpha^* h - a h^*) d\sigma = \int_0^\tau \{J_f[h^*] - J_p[h]\} dt \tag{1.18}$$

2. Уравнение относительно вариации функции

Как и в [2] выведем равенство, полезное для практических расчетов. При варьировании правой части $f' = f + \delta f$ из (1.1) функция h также варьируется $h' = h + \delta h$. Тогда относительно вариации функции h приходим к уравнению

$$\Lambda \delta h = T\delta h + L\delta h = \delta f$$

и краевому условию

$$l\delta h = k\frac{\partial \delta h}{\partial n} + \beta \delta h = \delta \alpha . \qquad (2.2)$$

Итак, рассматривается краевая задача

$$\Lambda h' = f', \quad lh' = \alpha', \quad \Lambda = T + L \qquad (2.3)$$

и сопряженная к ней краевая задача

$$\Lambda^* h^* = p, \;\; l^* h^* = lh^* = \alpha^*, \;\; \Lambda^* = -T + L . \qquad (2.4)$$

Как и в [2], образуем тождество

$$\iiint_V h^* \Lambda h' \, dv - \iiint_V h' \Lambda^* h^* \, dv = \iiint_V h^* f' \, dv - \iiint_V ph' \, dv$$

и после упрощения приходим к тождеству

$$\iiint_V \mu \frac{\partial (h' h^*)}{\partial t} dv + \iint_\Sigma (\alpha^* h' - \alpha' h^*) dv = J_{f'}[h^*] - J_p[h'], \qquad (2.5)$$

где

$$J_{f'}[h^*] = \iiint_V h^* f' dv, \qquad J_p[h'] = \iiint_V h' p dv \qquad (2.6)$$

Имея в виду, что

$$J_{f'}[h^*] - J_p[h'] = J_f[h^*] - J_p[h] + \iiint_V h^* \delta f dv - \iiint_V p \delta h dv,$$

а также равенство (1.1) и равенство

$$\iiint_V \mu \frac{\partial (h' h^*)}{\partial t} dv = \iiint_V \mu \frac{\partial (h h^*)}{\partial t} dv + \iiint_V \mu \frac{\partial (h^* \delta h)}{\partial t} dv,$$

из (2.5) приходим к функциональному уравнению относительно вариации

$$\iiint_V \mu \frac{\partial (h^* \delta h)}{\partial t} dv + \iint_\Sigma (\delta h \alpha^* - h^* \delta \alpha) d\sigma = \iiint_V h^* \delta f dv - \iiint_V p \delta h dv \qquad (2.7)$$

при всех $t \in (0, T_0)$.

Легко видеть, что тождества (1.11), (2.5) и (2.7) по содержанию аналогичны, хотя они написаны относительно h, h' и δh . Из-за симметричности сопряженных функций h и h^* можно предположить, что аналогичные тождества имеют место также относительно функций h^*, $h^{*\prime}$ и δh^*.

Используя краевые задачи (2.3) и 2.4, образуем выражение

$$\iiint_V h^* \Lambda h' dv - \iiint_V h \Lambda^* h^* dv = \iiint_V f' h^* dv - \iiint_V hp dv . \qquad (2.8)$$

Упрощая левую часть тождества, имеем

$$\iiint_V h^* T h' dv - \iiint_V h T^* h^* dv = \iiint_V h^* \mu \frac{\partial h}{\partial t} dv + \iiint_V h^* \mu \frac{\partial \delta h}{\partial t} dv + \iiint_V h \mu \frac{\partial h^*}{\partial t} dv =$$

$$= \iiint\limits_V h^* \mu \frac{\partial \delta h}{\partial t} dv + \iiint\limits_V \mu \frac{\partial (hh^*)}{\partial t} dv \tag{2.9}$$

и на основании (1.10)

$$\iiint\limits_V h^* Lh' dv - \iiint\limits_V hLh^* dv = \iiint\limits_V h^* L\delta h dv + \iiint\limits_V h^* Lh dv - \iiint\limits_V hLh^* dv = \iiint\limits_V h^* L\delta h dv +$$
$$\iint\limits_\Sigma (h\alpha^* - h^*\alpha) d\sigma = \iiint\limits_V q(\delta h; h^*) k dv - \iint\limits_\Sigma h^* (\delta\alpha - \beta\delta h) d\sigma + \iint\limits_\Sigma (h\alpha^* - h^*\alpha) d\sigma, \tag{2.10}$$

где

$$q(\delta h; h^*) = \frac{\partial \delta h}{\partial x}\frac{\partial h^*}{\partial x} + \frac{\partial \delta h}{\partial y}\frac{\partial h^*}{\partial y} = q(h^*; \delta h). \tag{2.11}$$

Теперь преобразуем правую часть тождества (2.8):

$$\iiint\limits_V h^* f' dv - \iiint\limits_V hp dv = J_f[h^*] - J_p[h] + \iiint\limits_V h^* \delta f\, dv \tag{2.12}$$

Подставляя выражения (2.12), (2.9), (2.10) в тождество (2.8) и учитывая (1.11), приходим к уравнению относительно вариации δh :

$$\iiint\limits_V h^* \mu \frac{\partial \delta h}{\partial t} dv + \iiint\limits_V q(\delta h; h^*) k\, dv + \iint\limits_\Sigma h^* \beta \delta h d\sigma = \iiint\limits_V h^* \delta f\, dv + \iint\limits_\Sigma h^* \delta\alpha\, d\sigma, \tag{2.13}$$

где q – симметричный относительно своих аргументов оператор, определенный по формуле (2.11).

Итак, мы получили линейное интегро-дифференциальное уравнение относительно вариации δh для всех $t \in (0, T_0)$, при известной h^* и заданных k, δf и $\delta\alpha$. Не ущемляя общности, за начальное условие для (2.13) можно взять

$$\delta h(x, y, z, 0) = \delta h_0(x, y, z) = 0. \tag{2.14}$$

3. Уравнения для вариаций параметров и сопряженной функции

Рассмотрим сопряженные краевые задачи

$$\Lambda' h' = f', \qquad l' h' = \alpha', \qquad \Lambda' = T + L' = T + L + \delta L, \tag{3.1}$$

$$\Lambda^* h^* = p, \qquad l^* h^* = lh^* = \alpha^*, \qquad \Lambda^* = L' - T = L' + T^* \tag{3.2}$$

Из (3.1) и (3.2) образуем равенство

$$\iiint\limits_V h^* \Lambda' h' dv - \iiint\limits_V h' \Lambda^* h^* dv = \iiint\limits_V h^* f' dv - \iiint\limits_V h' p dv. \tag{3.3}$$

Учитывая равенства

$$\iiint_V h^* Th'\,dv - \iiint_V h'T^* h^*\,dv = \iiint_V (h^* \mu \frac{\partial h'}{\partial t} + h\mu \frac{\partial h^*}{\partial t})dv = \iiint_V \mu \frac{\partial (h' h^*)}{\partial t} dv, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned} &\iiint_V h^* L'h'\,dv - \iiint_V h' L^* h^*\,dv = \\ &= \iiint_V q(h';h^*)\delta\, k\, dv + \iint_\Sigma h^* h' \delta\beta\, d\sigma - \iint_\Sigma h^* \delta\alpha\, d\sigma + \iint_\Sigma (\alpha^* h' - \alpha' h^*) d\sigma, \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\iiint_V h^* f'\,dv - \iiint_V h' p dv = J_{f'}[h^*] - J_p[h'],$$

и равенство (1.11), из (3.3) приходим к уравнению

$$\iiint_V q(h';h^*)\delta k\ \ dv = \iint_\Sigma h^* (\delta\alpha - h'\delta\beta) d\sigma \tag{3.6}$$

для вычисления вариации δk в области V (при известных h', h^* и заданных $\delta\beta$ и $\delta\alpha$).

Теперь выведем уравнение относительно $\delta\mu$. Пусть $\mu' = \mu + \delta\mu$, т.е. величина μ варьируется на $\delta\mu$, тогда функция h изменится на величину δh, то есть $h' = h + \delta h$.

Рассмотрим краевые задачи

$$(T+L)h' = f'', \quad lh' = \alpha', \quad f'' = f' + \delta f'', \tag{3.7}$$

$$\Lambda^* h^* = (T^* + L)h^* = p, \quad lh^* = \alpha^*, \quad (\delta Th' = \delta f'') \tag{3.8}$$

и образуем равенство

$$\iiint_V h^*(Th' + Lh')dv - \iiint_V h' \Lambda^* h^*\,dv = \iiint_V h^* f''\,dv - \iiint_V ph'\,dv. \tag{3.9}$$

Проведем упрощения в левой части равенства (3.9):

$$\iiint_V h^* Th'\,dv - \iiint_V h'T^* h^*\,dv = \iiint_V \mu \frac{\partial (h' h^*)}{\partial t} dv + \iiint_V h^* \delta\mu \frac{\partial h'}{\partial t} dv, \tag{3.10}$$

$$\iiint_V h^* Lh'\,dv - \iiint_V h' L^* h^*\,dv = \iint_\Sigma (\alpha^* h' - \alpha' h^*) d\sigma. \tag{3.11}$$

В правой части (3.9) имеем

$$\iiint_V h^* f''\,dv - \iiint_V ph'\,dv = \iiint_V h^* \delta f''\,dv + J_{f'}[h^*] - J_p[h']. \tag{3.12}$$

Подставляя (3.10)-(3.12) в (3.9) и учитывая формулу (2.5), получаем

$$\iiint_V h^* \frac{\partial h'}{\partial t} \delta\mu dv = \iiint_V h^* \delta f''\,dv, \tag{3.13}$$

что дает (в принципе) возможность вычислить вариацию $\delta\mu$ при известных h^*, h' и заданной $\delta f''$ для всех $t \in (0, T_o)$.

Проводя аналогичные рассуждения относительно вариаций параметров сопряженной краевой задачи, кратко изложим вывод некоторых весьма полезных уравнений для тех или иных вариаций. Рассмотрим сопряженные начально-краевые задачи

$$\Lambda h = f, \quad lh = \alpha, \quad l = k\frac{\partial}{\partial n} + \beta, \quad T = \mu\frac{\partial}{\partial t}, \tag{3.14}$$

$$\Lambda^* h^{*\prime} = p', \quad l^* h^{*\prime} = \alpha^{*\prime}, \quad h^{*\prime} = h^* + \delta h^*, \quad \alpha^{*\prime} = \alpha^* + \delta\alpha^*, \quad p' = p + \delta p, \tag{3.15}$$

где

$$\Lambda = T + L, \quad \Lambda^* = -T + L, \quad L = -\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial z}(k\frac{\partial}{\partial z}). \tag{3.16}$$

Из (3.14) и (3.15) образуем тождество

$$\iiint_V h\Lambda^* h^{*\prime} dv - \iiint_V h^* \Lambda h dv = \iiint_V p' h dv - \iiint_V h^* f dv. \tag{3.17}$$

Упрощая равенство (3.17), имеем:

$$\iiint_V h(-\mu\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t})dv - \iiint_V h^* \mu\frac{\partial h}{\partial t} dv = -\iiint_V \mu\frac{\partial(hh^*)}{\partial t} dv - \iiint_V h\mu\frac{\partial\delta h^*}{\partial t} dv, \tag{3.18}$$

$$\iiint_V hLh^{*\prime} dv - \iiint_V h^* Lhdv = \iiint_V kq(\delta h^*; h)dv - \iint_\Sigma h(\delta\alpha^* - \beta\delta h^*)d\sigma + \iint_\Sigma (\alpha h^* - h\alpha^*)d\sigma, \tag{3.19}$$

$$\iiint_V p' hdv - \iiint_V h^{*\prime} fdv = J_p[h] - J_f[h^*] + \iiint_V h\delta pdv. \tag{3.20}$$

Подставляя (3.18) - (3.20) в (3.17) и учитывая равенство (1.11), получаем

$$-\iiint_V h\mu\frac{\partial\delta h^*}{\partial t} dv + \iiint_V kq(\delta h^*; h)dv - \iint_\Sigma h(\delta\alpha^* - \beta\delta h^*)d\sigma = \iiint_V h\delta pdv,$$

или

$$-\iiint_V h\mu\frac{\partial\delta h^*}{\partial t} dv + \iiint_V kq(\delta h^*; h)dv + \iint_\Sigma h\beta\delta h^* d\sigma = \iiint_V h\delta pdv + \iint_\Sigma h\delta\alpha^* d\sigma. \tag{3.21}$$

Не ущемляя общности, при однородном начальном условии

$$\delta h^*(x, y, z, T_0) = 0 \tag{3.22}$$

и заданных $\mu, k, \beta, h, \delta p$ и $\delta\alpha^*$ можно найти δh^* в области V.

4. Другие уравнения для вариаций параметров

Выведем уравнения относительно вариаций коэффициента фильтрации и упругой водоотдачи, равносильные уравнениям (3.6) и (3.13). Рассмотрим краевые задачи

$$\Lambda^{*\prime} h^{*\prime} = p', \quad l^{*\prime} h^{*\prime} = l' h^{*\prime} = \alpha^{*\prime}, \quad p' = p + \delta p, \quad \alpha^{*\prime} = \alpha^* + \delta\alpha^*, \tag{4.1}$$

$$\Lambda h = f, \quad lh = \alpha, \quad l = k\frac{\partial}{\partial n} + \beta, \tag{4.2}$$

где

$$\Lambda^{*\prime} = -T + L' = -T + L + \delta L, \quad l' = l + \delta l, \quad \Lambda = T + L. \tag{4.3}$$

Варьированная краевая задача, соответствующая (4.1), имеет вид

$$\delta Lh^{*\prime} = \delta p, \quad \delta lh^{*\prime} = \delta\alpha^*. \tag{4.4}$$

Составим тождество

$$\iiint_V h\Lambda^{*\prime} h^{*\prime} dv - \iiint_V h^{*\prime} \Lambda hdv = \iiint_V p' hdv - \iiint_V fh^{*\prime} dv. \tag{4.5}$$

и проведем упрощения в (4.5):

$$\iiint_V h(-\mu\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t})dv-\iiint_V h^{*\prime}\mu\frac{\partial h}{\partial t}dv=-\iiint_V \mu\frac{\partial(hh^{*\prime})}{\partial t}dv, \qquad (4.6)$$

$$\begin{aligned}&\iiint_V h(L+\delta L)h^{*\prime}dv-\iiint_V h^{*\prime}Lhdv=\\&=\iiint_V q(h;h^{*\prime})\delta k dv+\iint_\Sigma(\alpha h^{*\prime}-\alpha^{*\prime}h)d\sigma-\iint_\Sigma h(\delta\alpha^*-\delta\beta h^{*\prime})d\sigma,\end{aligned} \qquad (4.7)$$

$$\iiint_V p'hdv-\iiint_V fh^{*\prime}dv=J_{p'}[h]-J_f[h^{*\prime}]. \qquad (4.8)$$

Подставляя формулы (4.6)-(4.8) в (4.5) и учитывая, что

$$-\iiint_V \mu\frac{\partial(h^{*\prime}h)}{\partial t}dv+\iint_\Sigma(\alpha h^{*\prime}-\alpha^{*\prime}h)d\sigma=J_{p'}[h]-J_f[h^{*\prime}], \qquad (4.9)$$

приходим к уравнению относительно δk :

$$\iiint_V q(h;h^{*\prime})\delta k dv=\iint_\Sigma h(\delta\alpha^*-\delta\beta h^{*\prime})d\sigma \qquad (4.10)$$

для любого $t\in(0,T_0)$. Используя вычисленные значения функций h , $h^{*\prime}$ и заданные значения $\delta\alpha^*$ и $\delta\beta$, можно вычислить вариацию δk в области V.

Для составления уравнения относительно $\delta\mu$ рассмотрим краевые задачи

$$\tilde{\Lambda}^{*\prime}h^{*\prime}=p'', \quad l^*h^{*\prime}=lh^{*\prime}=\alpha^{*\prime}, \qquad (4.11)$$

$$\Lambda h=f, \quad lh=\alpha, \qquad (4.12)$$

где

$$\tilde{\Lambda}^{*\prime}=-T-\delta T+L, \quad \Lambda=T+L, \quad T=\mu\frac{\partial}{\partial t}, \quad p''=p'+\delta p'$$

и составим тождество

$$\iiint_V h\tilde{\Lambda}^{*\prime}h^{*\prime}dv-\iiint_V h^{*\prime}\Lambda hdv=\iiint_V p''hdv-\iiint_V fh^{*\prime}dv. \qquad (4.13)$$

Проведем упрощающие преобразования в (4.13):

$$\iiint_V h(-T-\delta T)h^{*\prime}dv-\iiint_V h^{*\prime}Thdv=-\iiint_V \mu\frac{\partial(h^{*\prime}h)}{\partial t}dv-\iiint_V h\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t}\delta\mu dv, \qquad (4.14)$$

$$\iiint_V hLh^{*\prime}dv-\iiint_V h^{*\prime}Lhdv=\iint_\Sigma(\alpha h^{*\prime}-h\alpha^{*\prime})d\sigma, \qquad (4.15)$$

$$\iiint_V p''hdv-\iiint_V fh^{*\prime}dv=J_{p'}[h]-J_f[h^{*\prime}]+\iiint_V h\delta p''dv. \qquad (4.16)$$

Подставляя (4.14)-(4.16) в (4.13) и используя равенство (4.9), получаем уравнение относительно $\delta\mu$:

$$\iiint_V h \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t} dv = \iiint_V h \delta p'' dv, \tag{4.17}$$

верное при любом $t \in (0, T_0)$. Если вычислены значения функции h и $h^{*\prime}$ и известна величина $\delta p''$, то можно (в принципе) вычислить поле вариаций $\delta\mu$ в области V.

Как и в стационарном случае, с помощью теории сопряженных дифференциальных уравнений нелинейная проблема идентификации сводится к решению цепочки линейных уравнений относительно вариаций искомых параметров, разрешаемых с помощью регуляризирующих (или квазирегуляризирующих) операторов. Отметим, что взаимность уравнений, выписанных относительно искомой или сопряженной к ней функции, очевидна из вышеизложенного.

5. Алгоритм численной реализации полученных уравнений

Переходим к проблеме численной реализации выведенных уравнений относительно искомой функции напора.

Прежде чем приступить к решению проблемы идентификации гидрогеологических параметров среды (вычисление k и μ), следует при приближенно известных значениях коэффициентов вычислить поля функции напора h и сопряженной ей функции h^*. Поскольку они находятся с помощью одного и того же приближенного метода, основанного на обобщенном принципе Галеркина с применением метода конечных элементов [3], кратко изложим последовательность счета.

Допустим, что в области V известны приближенные значения $\mu^{(0)}(x,y,z)$ и $k^{(0)}(x,y,z)$ и необходимо решить уравнение (1.1) при заданных в начальном (1.2) и краевом (1.3) условиях. Решение задачи (1.1) – (1.3) ищется в виде

$$h_n(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t) N_i(x,y,z), \tag{5.1}$$

где $h_i(t)$ - неизвестный коэффициент, $N_i(x,y,z)$- линейные базисы конечных элементов, относящиеся к узлу *i*.

Согласно обобщенному принципу Галеркина, используя разложение (5.1), образуем взвешенную невязку

$$\iiint_V (\Lambda h_n - f) N_j dv = -\iint_\Sigma (l h_n - \alpha) N_j d\sigma, \; j=1,2,\ldots,n. \tag{5.2}$$

После интегрирования с применением формулы Грина, из равенства (5.2) имеем n уравнений

$$\begin{aligned} &\iiint_V \left[N_j \mu \frac{\partial h_n}{\partial t} + k\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial h_n}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z}\frac{\partial h_n}{\partial z}\right)\right] dv + \iint_\Sigma \beta\, h_n N_j d\sigma = \\ &= \iiint_V f N_j dv + \iint_\Sigma \alpha N_j d\sigma, \qquad j = 1,2,\ldots,n. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Подставляя вместо h_n ее разложение из (5.2) в (5.3), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\frac{dh_i(t)}{dt}$. Из начального условия (1.2) образуем (по количеству узлов в области V) n начальных условий $h_i(t)\big|_{t=0} = h_i^{(0)}$. Таким образом, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $dh_i(t)/dt \quad (i = 1,2,...n)$ имеем задачу Коши для системы n уравнений, которая, в свою очередь, на основании схемы Кранка-Никольсона сводится к системе алгебраических уравнений относительно вектора $h(t) = (h_1, h_2,..., h_n)$. Эта система является хорошо обусловленной при всех $t \in (0,T_0)$ и решается с шагом по времени $\tau = t_k - t_{k-1} \quad (k = 1,2,...m)$ при $t \in (0,T_0)$.

В п.1 мы показали, что относительно сопряженной функции h^* получается задача с обратным течением времени (ретроспективная задача). Совершенно очевидно, что используя конечное условие по времени (1.15) или (1.16), ретроспективную задачу (1.4), (1,5) можно решать аналогично прямой задаче (1.1) – (1.3). Она решается исходя из конечного условия при $t=T_0$ в обратном направлении, т.е в направлении уменьшающегося времени.

Теперь несколько слов о вычислении поля вариации δh в области V. Для его вычисления следует исходить из краевой задачи (2.1), (2.2) с начальным условием

$$\delta h(x,y,z,t)\big|_{t=0} = \delta h(x,y,z,0) = 0. \tag{5.4}$$

Решение сформулированной задачи ищем в виде

$$\delta h_n = \sum_{i=1}^{n} \delta h_i(t) N_i(x,y), \tag{5.5}$$

де $\delta h_i(t)$ - искомый коэффициент. Исходя из обобщенного принципа Галеркина, имеем n уравнений относительно δh_n

$$\iiint_V N_j \left[-\mu \frac{\partial h_n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial z}\right) - \delta f \right] dv =$$
$$= -\iint_\Sigma N_j \left(k \frac{\partial \delta h_n}{\partial n} + \beta \delta h_n - \delta \alpha\right) d\sigma, \qquad j = 1,2,...n,$$

откуда, после интегрирования с использованием формулы Грина получаем

$$\begin{gathered} \iiint_V \left[-N_j \mu \frac{\partial \delta h_n}{\partial t} + k\left(\frac{\partial N_j}{\partial x}\frac{\partial \delta h_n}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y}\frac{\partial \delta h_n}{\partial y} + \frac{\partial N_j}{\partial z}\frac{\partial \delta h_n}{\partial z}\right. - N_j \delta f \right] dv = \\ = \iint_\Sigma (N_j \delta \alpha - N_j \beta \delta h_n) d\sigma, \qquad j = 1,2,..n. \end{gathered} \tag{5.6}$$

Как видно из (5.6), после подстановки разложения (5.5) получается линейная система n обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора

$$\frac{d\delta h_n(t)}{dt} = \left(\frac{d\delta h_1}{dt}, \frac{d\delta h_2}{dt}, ..., \frac{d\delta h_n}{dt} \right).$$

Из начального условия (5.4) относительно узлов i имеем n условий Коши для системы (5.6), которые представляются в виде

$$\delta h(x_i, y_i, z_i, 0) = \delta h_i(0) = 0, \qquad i = 1,2,...,n. \tag{5.7}$$

Таким образом, мы пришли к задаче Коши для системы (5.6) с начальным условием (5.7), которая, в свою очередь, с помощью разностный схемы Кранка-Никольсона сводится к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Полученная СЛАУ решается методом Гаусса (или другими итерационными методами).

Из структуры систем уравнений, вытекающих из (5.3) и (5.6) видно, что они в алгоритмическом отношении совершенно идентичны относительно неизвестных $h_i(t)$ и $\delta h_i(t)$ соответственно.

Подробно выписав уравнения, вытекающие из ретроспективной задачи (1.4), (1.5) при заданном конечном условии (при $t=T_0$), можно убедится, что относительно неизвестных коэффициентов $h_i{*}(t)$ также приходим к аналогичной по структуре СЛАУ. Здесь $h_i{*}(t)$ определяются как коэффициенты разложения

$$h_n{*}(x,y,z,t) = \sum_{i=1}^{n} h_i{*}(t) N_i(x,y,z),$$

которое раскладывает сопряженную функцию $h{*}(x,y,z,t)$ по линейным базисам $N_i(x,y,z)$.

Теперь кратко остановимся на проблеме уточнения коэффициента фильтрации k, для чего, варьируя сопряженное уравнение относительно $k(x,y,z)$, получим соответствующее варьированное уравнение для δk :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta k \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta k \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta k \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial z}\right) = \delta p'', \ (x,y,z) \in V, \quad t \in (0,T_0) \tag{5.8}$$

с краевым условием

$$\delta k \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial n} + \delta\beta h^{*\prime} = \delta\alpha^{*\prime}, \qquad (x,y,z) \in \Sigma, \qquad t \in (0,T_0). \tag{5.9}$$

Решение краевой задачи (5.8), (5.9) будем искать виде

$$\delta k_n = \sum_{i=1}^{n} \delta k_i N_i(x,y,z), \tag{5.10}$$

где $\delta k_i = \delta k(x_i, y_i, z_i)$ – значение искомого коэффициента в точке (x_i, y_i, z_i).

Аналогично предыдущему случаю, применяя обобщенный принцип Галеркина к краевой задаче (5.9), (5.10), приходим к СЛАУ относительно $\delta k_i = \delta k(x_i, y_i, z_i)$ с квадратной матрицей порядка n:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta k_i \iiint_V \left(\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial x}\frac{\partial N_i}{\partial x} + \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial y}\frac{\partial N_i}{\partial y} + \frac{\partial h^{*\prime}}{\partial z}\frac{\partial N_i}{\partial z} \right) N_j dv = \iiint_V \delta p'' N_j dv + \iint_\Sigma N_j (\delta\alpha^{*\prime} - \delta\beta h^{*\prime}) d\sigma, \tag{5.11}$$

$$j = 1,2,...,n.$$

СЛАУ (5.11) остается справедливой при любом $t \in (0,T_0)$, что указывает на слабую зависимость коэффициента фильтрации пласта от времени. Поскольку свойства СЛАУ (5.11) аналогичны стационарному случаю, способ ее численной реализации также аналогичен этому случаю.

Наконец, рассмотрим алгоритм вычисления вариации водоотдачи (недостатка насыщения) пласта. С этой целью обратимся к возмущенным уравнениям (4.11), (4.12), откуда видно, что варьированное относительно $\delta\mu$ уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t}\delta\mu = \delta p''. \tag{5.12}$$

При известном $h^{*\prime}$ и заданном $\delta p''$ можно вычислить поле вариации водоотдачи $\delta\mu$ в области V, для чего приближенное решение будем искать в виде

$$\delta\mu_n(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} N_j(x,y,z)\delta\mu_i, \tag{5.13}$$

где $\delta\mu_i$ - искомый коэффициент в узле (x_i,y_i,z_i).

Из уравнения (5.12), используя метод Галеркина, приходим к системе уравнений

$$-\iiint_V N_j\left(\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t}\delta\mu_n + \delta p''\right)dv = 0, \qquad j = 1,2,\dots,n,$$

откуда, подставляя выражение для $\delta\mu_n$ из (5.13), получим СЛАУ

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\iiint_V N_j\frac{\partial h^{*\prime}}{\partial t}N_i dv\right)\delta\mu_i = \iiint_V N_j\delta p'' dv, \quad j=1,2,\dots,n, \tag{5.14}$$

верную при любом $t \in (0,T_0)$.

Проинтегрировав уравнение (5.14) по t в интервале (t_{k-1},t_k), $(k = 1,2,\dots,m; \tau = t_k - t_{k-1}, t_m = T_0)$, имеем СЛАУ порядка $n{\times}n$:

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\iiint_V N_j N_i \Delta h_k^{*\prime} dv\right)\delta\mu_i = \frac{\tau}{2}\iiint_V N_j\Delta(\delta p_k'')dv, \qquad j = 1,2,\dots,n, \tag{5.15}$$

где

$$\Delta h_k^{*\prime} = h_n^{*\prime}(x,y,z,t_k) - h_n^{*\prime}(x,y,z,t_{k-1}), \qquad \Delta(\delta p_k'') = \delta p_k'' - \delta p_{k-1}''.$$

Поскольку методика расчета в нестационарном случае алгоритмически аналогична стационарному случаю [2], процесс численной реализации начально-краевой задачи изложим кратко. Алгоритм состоит из следующих этапов:

Шаг1. Используя внутреннее условие вида [2]

$$k^{(0)}(x_j,y_j,z_j) = k_j{}^{э}, j = 1,2,\dots r, \tag{5.16}$$

образуем первое приближение коэффициента фильтрации пласта $k^{(0)}(x,y,z)$. Решая систему (5.3) при заданной функции $k^{(0)}$, приближенно вычислим поле функции напора

$$h^{(0)}(x,y,z,t) \approx h_n(x,y,z,t).$$

Шаг 2. Решая при тех же значениях $k^{(0)}(x,y,z)$ ретроспективную задачу (1.4), (1.5) с начальным условием (1.15) (или(1.16)) с помощью обобщенного принципа Галеркина вычислим поле сопряженной функции

$$h^{*(0)}(x,y,z,t) \approx h_n^{\,*}.$$

Шаг 3. Решая систему (5.6) при той же функции $T^{(0)}(x,y,z)$ как задачу Коши с начальным условием (5.7), вычислим поле вариации δh_n. Таким же способом решается ретроспективная краевая задача относительно δh^{*} и строится функция

$$h^{*\prime} = h_n^{\,*} + \delta h_n^{\,*}.$$

Шаг 4. Из системы (5.11) вычисляется $\delta k_n(x,y,z)$ в области V и строится функция $k^{(1)}(x,y,z) \approx k_n^{(0)} + \delta k_n$ Заменяя $k(x,y,z)$ на $k^{(1)}$ и возвращаясь к шагу 1, вычислим $h^{(1)}(x,y,z,t) \approx h_n(x,y,z,t)$. При той же функции $k^{(1)}$ вычисляются h^{*} (шаг 2) и δh^{*} (шаг 3), после чего строится поле $h^{*\prime} \approx h_n^{\,*} + \delta h_n^{\,*}$. Далее, переходя к шагу 4, вычисляем поправку δk_n к функции $k^{(0)}(x,y,z)$, т.е. получаем $k^{(2)} \approx k_n^{(1)} + \delta k_n$.

После шага 4 проверяется условие

$$\max\left|k_i^{(2)} - k_i^{(1)}\right| < \varepsilon. \tag{5.17}$$

Если оно выполняется, то проверяется выполнение условия, связанного с данными наблюдений и водоотбора. Если условие (5.17) не выполняется, то итерационная процедура продолжается до его выполнения.

Шаг 5. связан с восстановлением коэффициента водоотдачи (недостатка насыщения) пласта. Его можно проделать после идентификации коэффициента фильтрации. При идентифицированной функции $k(x,y,z)$ и вычисленной $h^{*\prime}$ из СЛАУ (5.15) находится $\delta\mu_i$ и уточняется поле $\mu^{(1)} \approx \mu_n + \delta\mu_n$. Далее проверяются условие

$$\max_i \left|\mu_i^{(\nu)} - \mu_i^{(\nu-1)}\right| < \delta, \quad \nu = 1,2,..., \tag{5.18}$$

где δ заданное малое число. Если это условие выполняется, то итерация по μ останавливается и проверяется выполнение условия, связанного с данными наблюдений и водоотбора (физические условия). При невыполнении последнего условия уменьшаем δ и продолжаем итерационный процесс до выполнения условия (5.18) и физического условия.

Заметим, что равенства (1.11), (2.13), (3.6), (3.13) и другие используются для проверки правильности вычисленных значений искомых функций h, h^{*}, $\delta h, \delta k, \delta\mu$ и т.д..

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод – М.: Наука, 1977. – С. 664.
2. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Идентификация коэффициента фильтрации пористой среды методом теории возмущений. // В настоящем номере этого журнала.
3. Джаныбеков Ч. Моделирование гидрогеодинамических процессов применением ЭВМ. – Фрунзе: Илим, 1989.-С. 183.