УДК 532.546

М.У. Мурзакматов, Н.Т. Ажыгулова, Г.Э. Иманбердиева.

ОДНОМЕРНАЯ ЗАДАЧА МАССОПЕРЕНОСА

Численно решается одномерная задача массопереноса совместно с уравнением фильтрации.

Одномерное движение массопереноса в водоносных пластах описывается следующим дифференциальным уравнением [1]

$$n_0 \frac{\partial C}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(D \frac{\partial C}{\partial x} - \vartheta C \right) = g(x,t), \quad x \in (a,b), \ t > 0 \qquad (1)$$

с начальным

$$C(x,0) = C_0(x), \quad x \in (a,b) \qquad (2)$$

и граничными

$$-D\frac{\partial C}{\partial x}+\beta_1 C=\alpha_1, \quad x=a, \tag{3}$$

$$D\frac{\partial C}{\partial x}+\beta_2 C=\alpha_2, \quad x=b, \quad t>0 \tag{4}$$

условиями, где $C(x,t)$ – функция концентрации солей в подземных водах; $D(x)$ – коэффициент переноса солей; n_0 – коэффициент пористости водоносного пласта; $\vartheta=-k\frac{\partial H}{\partial x}$ – скорость фильтрации подземных вод; $H(x,t)$ – функция напора; $k(x)$ – коэффициент фильтрации; $g(x,t)$ – функция источников и стоков солей; $C_0(x)$ – начальное распределение концентрации; $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные функции.

Разобъем отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b$. На элементарном отрезке $[x_{i-1},x_i]$ введем линейные базисные функции

$$N_i=\frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \quad N_{i-1}=\frac{x_i-x}{h_i}, \qquad h_i=x_i-x_{i-1}$$

и искомую функцию $C(x,t)$ представим в виде

$$C(x,t)\approx C_{i-1}(t)N_{i-1}(x)+C_i(t)N_i(x), \tag{5}$$

где $\qquad C_i(t)=C(x_i,t).$

На временном отрезке $[t_{k-1},t_k]$ производную по времени аппроксимируем разностным отношением

$$\frac{\partial C}{\partial t}\approx\frac{C^{(k)}-C^{(k-1)}}{\tau}.$$

Здесь $C^{(k)}=C(x,t_k)$, $\quad C^{(k-1)}=C(x,t_{k-1})$, $\quad \tau=t_k-t_{k-1}$.

Тогда задача (1)-(4) запишется в виде

$$LC^{(k)}=f^{(k)}, \quad \ell_1 C^{(k)}=\alpha_1, \quad \ell_2 C^{(k)}=\alpha_2, \tag{6}$$

где

$$L=-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial}{\partial x}\right)+\frac{\partial(\vartheta\ \ )}{\partial x}+\frac{n_0}{\tau},$$

$$\ell_1=-D\frac{\partial}{\partial x}+\beta_1, \qquad \ell_2=D\frac{\partial}{\partial x}+\beta_2,$$

$$f^{(k)}=g(x,t_k)+\frac{n_0}{\tau}C^{(k-1)}.$$

Применяя к задаче (6) обобщенный принцип Галеркина, получаем систему уравнений

$$\left(LC-f,N_j\right)+\left(\ell_1 C_0-\alpha_1,N_0\right)+\left(\ell_2 C_n-\alpha_2,N_n\right)=0, \tag{7}$$
$$j=0,1,2,\ldots,n,$$

или

$$\int_a^в N_j\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial C}{\partial x}\right)+\frac{\partial(\vartheta C)}{\partial x}+\frac{n_0}{\tau}C-f\right]dx+$$

$$+N_0\left(-D_0\frac{\partial C_0}{\partial x}+\beta_1 C_0-\alpha_1\right)+N_n\left(D_n\frac{\partial C_n}{\partial x}+\beta_2 C_n-\alpha_2\right)=0. \qquad (8)$$

В формулах (7) и (8) для удобства записи верхние индексы опущены.

Интегрируя по частям первые два интеграла, приходим к системе уравнений

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\int_{x_{i-1}}^{x_i} D\frac{\partial C}{\partial x}\frac{dN_j}{dx}dx-\int_{x_{i-1}}^{x_i} C\vartheta\frac{dN_j}{dx}dx+\frac{n_0}{\tau}\int_{x_{i-1}}^{x_i} CN_j dx\right\}+$$

$$+(-\vartheta_0+\beta_1)C_0+(\vartheta_n+\beta_2)C_n=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} N_j f\,dx+\alpha_1+\alpha_2 \qquad (9)$$

$$j=0,1,\dots,n.$$

Подставляя на каждом из отрезков $[x_{i-1},x_i]$ вместо функции C ее выражение из (5) при $j=0,1,\dots,n$ имеем систему уравнений

$$\int_{x_0}^{x_1} D\frac{d}{dx}(C_0N_0+C_1N_1)\frac{dN_0}{dx}dx-\int_{x_0}^{x_1}(C_0N_0+C_1N_1)\left(-k\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{dN_0}{dx}dx+$$

$$+\frac{n_0}{\tau}\int_{x_0}^{x_1} N_0(C_0N_0+C_1N_1)dx+\left(k_0\frac{\partial H_0}{\partial x}+\beta_1\right)C_0=\int_{x_0}^{x_1} N_0 f\,dx+\alpha_1,$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} D\frac{d}{dx}(C_{i-1}N_{i-1}+C_iN_i)\frac{dN_i}{dx}dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}} D\frac{d}{dx}(C_iN_i+C_{i+1}N_{i+1})\frac{dN_i}{dx}dx-$$

$$-\int_{x_{i-1}}^{x_i}(C_{i-1}N_{i-1}+C_iN_i)\left(-k\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{dN_i}{dx}dx-$$

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}}(C_iN_i+C_{i+1}N_{i+1})\left(-k\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{dN_i}{dx}dx+\frac{n_0}{\tau}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(C_{i-1}N_{i-1}+C_iN_i)N_i dx+$$

$$+\frac{n_0}{\tau}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(C_iN_i+C_{i+1}N_{i+1})N_i dx=\int_{x_{i-1}}^{x_i} N_i f dx+\int_{x_i}^{x_{i+1}} N_i f\,dx,$$

$$i=1,2,\dots,n-1,$$

$$\int_{x_{n-1}}^{x_n} D\frac{d}{dx}(C_{n-1}N_{n-1}+C_nN_n)\frac{dN_n}{dx}dx-\int_{x_{n-1}}^{x_n}(C_{n-1}N_{n-1}+C_nN_n)\left(-k\frac{\partial H}{\partial x}\right)\frac{dN_n}{dx}dx+$$

$$+\frac{n_0}{\tau}\int_{x_{n-1}}^{x_n} N_n(C_{n-1}N_{n-1}+C_nN_n)dx+\left(-k_n\frac{\partial H_n}{\partial x}+\beta_2\right)C_n=\int_{x_{n-1}}^{x_n} N_n f\,dx+\alpha_2.$$

После вычисления интегралов получаем трехдиагональную систему уравнений:

$$\begin{cases}\vartheta_0 C_0+\omega_0 C_1=d_0,\\ u_i C_{i-1}+\vartheta_i C_i+\omega_i C_{i+1}=d_i, \qquad i=1,2,\dots,n-1,\\ u_n C_{n-1}+\vartheta_n C_n=d_n,\end{cases} \qquad (10)$$

где

$$\vartheta_0 = \frac{D_0 + D_1}{2h_1} - \frac{k_0 + k_1}{4}\frac{H_1 - H_0}{h_1} + \frac{n_0 h_1}{3\tau} + k_0\frac{\partial H_0}{\partial x} + \beta_1,$$

$$\omega_0 = -\frac{D_0 + D_1}{2h_1} - \frac{k_0 + k_1}{4}\frac{H_1 - H_0}{h_1} + \frac{n_0 h_1}{6\tau},$$

$$u_i = -\frac{D_{i-1} + D_i}{2h_i} - \frac{k_{i-1} + k_i}{4}\frac{H_i - H_{i-1}}{h_i} + \frac{n_0 h_i}{6\tau},$$

$$\vartheta_i = \frac{D_{i-1} + D_i}{2h_i} + \frac{D_i + D_{i+1}}{2h_{i+1}} - \frac{k_{i-1} + k_i}{4}\frac{H_i - H_{i-1}}{h_i} +$$

$$+ \frac{k_i + k_{i+1}}{4}\frac{H_{i+1} - H_i}{h_{i+1}} + \frac{n_0(h_i + h_{i+1})}{3\tau},$$

$$\omega_i = -\frac{D_i + D_{i+1}}{2h_{i+1}} + \frac{k_i + k_{i+1}}{4}\frac{H_{i+1} - H_i}{h_{i+1}} + \frac{n_0 h_{i+1}}{6\tau}, \qquad i = 1,2,\dots,n-1,$$

$$u_n = -\frac{D_{n-1} + D_n}{2h_n} + \frac{k_{n-1} + k_n}{4}\frac{H_n - H_{n-1}}{h_n} + \frac{n_0 h_n}{6\tau},$$

$$\vartheta_n = \frac{D_{n-1} + D_n}{2h_n} + \frac{k_{n-1} + k_n}{4}\frac{H_n - H_{n-1}}{h_n} + \frac{n_0 h_n}{3\tau} + k_n\frac{\partial H_n}{\partial x} + \beta_2,$$

$$d_0 = \frac{f_0 + f_1}{4}h_1 + \alpha_1,$$

$$d_i = \frac{f_{i-1} + f_i}{4}h_i + \frac{f_i + f_{i+1}}{4}h_{i+1}, \qquad i = 1,2,\dots,n-1,$$

$$d_n = \frac{f_{n-1} + f_n}{4}h_n + \alpha_2.$$

Система (10) решается методом прогонки [2]. Представив ее решение в виде

$$C_i = \alpha_i C_{i+1} + \beta_i, \quad i = 0,1,\dots,n-1, \tag{11}$$

находим коэффициенты прогонки:

$$\alpha_i = -\frac{\omega_i}{u_i\alpha_{i-1} + \vartheta_i}, \quad \beta_i = \frac{d_i - u_i\beta_{i-1}}{u_i\alpha_{i-1} + \vartheta_i}, \quad i = 1,2,\dots,n-1. \tag{12}$$

Для проведения счета по формулам (12) необходимо знать α_0 и β_0, которые определяются из первого уравнения системы (10) и уравнения (11) при $i=0$:

$$\alpha_0 = -\frac{\omega_0}{\vartheta_0}, \quad \beta_0 = \frac{d_0}{\vartheta_0}. \tag{13}$$

Подставляя значения α_0 и β_0 из (13) в формулы (12), последовательно находим $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{n-1}, \beta_{n-1}$ (прямая прогонка). Затем из последнего уравнения системы (10) и уравнения (11) при $i = n-1$ определяем C_n:

$$C_n = \frac{d_n - u_n\beta_{n-1}}{u_n\alpha_{n-1} + \vartheta_n}. \tag{14}$$

Используя полученное значение C_n, по формуле (11) вычисляем $C_{n-1}, C_{n-2}, ..., C_1, C_0$ (обратная прогонка).

Значения напора H определяются из уравнения фильтрации

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right)=W(x,t),\quad x\in(a,b),\quad t>0, \tag{15}$$

$$H(x,0)=H_0(x),\ x\in(a,b),$$

$$-T\frac{\partial H}{\partial x}+\gamma_1 H=\delta_1,\quad x=a,$$

$$T\frac{\partial H}{\partial x}+\gamma_2 H=\delta_2,\quad x=b,\ t>0,$$

которое решается по уже описанному алгоритму на той же сетке. В формулах (14) использованы следующие обозначения:

$T(x)=k(x)m(x)-$ водопроводимость пласта, $m(x)-$ его мощность; $\mu(x)-$ упругая водоотдача пласта; $W(x,t)-$функция инфильтрации; $H_0(x)$- начальные значения напора; $\gamma_1(t)$, $\delta_1(t)$, $\gamma_2(t)$, $\delta_2(t)-$заданные функции.

Задача (14) сводится к решению следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} b_0H_0+C_0H_1=d_0, \\ a_iH_{i-1}+b_iH_i+c_iH_{i+1}=d_i, \qquad i=1,2,...,n-1, \\ a_nH_{n-1}+b_nH_n=d_n, \end{cases} \tag{16}$$

где

$$b_0=\frac{T_0+T_1}{2h_1}+\frac{\mu h_1}{3\tau}+\gamma_1,$$

$$c_0=-\frac{T_0+T_1}{2h_1}+\frac{\mu h_1}{6\tau},$$

$$a_i=-\frac{T_{i-1}+T_i}{2h_i}+\frac{\mu h_i}{6\tau},$$

$$b_i=\frac{T_{i-1}+T_i}{2h_i}+\frac{T_i+T_{i+1}}{2h_{i+1}}+\frac{\mu(h_i+h_{i+1})}{3\tau},$$

$$c_i=-\frac{T_i+T_{i+1}}{2h_{i+1}}+\frac{\mu h_{i+1}}{6\tau},\qquad i=1,2,...,n-1,$$

$$a_n=-\frac{T_{n-1}+T_n}{2h_n}+\frac{\mu h_n}{6\tau},$$

$$b_n=\frac{T_{n-1}+T_n}{2h_n}+\frac{\mu h_n}{3\tau}+\gamma_2,$$

$$d_0=\frac{F_0+F_1}{4}h_1+\delta_1,$$

$$d_i=\frac{F_{i-1}+F_i}{4}h_i+\frac{F_i+F_{i+1}}{4}h_{i+1},\quad i=1,2,...,n-1,$$

$$d_n = \frac{F_{n-1} + F_n}{4} h_n + \delta_2,$$

$$F = W^{(k)} + \frac{\mu}{\tau} H^{(k-1)}.$$

Система (16) решается также методом прогонки по формулам (11)-(14).

Алгоритм решения задачи (1)–(4) отлаживался на следующем тестовом примере. На отрезке [0,1] ищется функция $C(x,t)$ при следующих данных: $D = 0.5;\ n_0 = 1;\ g(x,t) = e^{-t}\left[xe^{-t}(3x-1)+1-x^2\right].$

Точным решением задачи является функция $C(x,\ t) = x^2 e^{-t} + 1.$

Чтобы найти скорость фильтрации подземных вод $\vartheta = -k\dfrac{\partial H}{\partial x}$ решаем одномерную задачу фильтрацию (15) при следующих данных $T(x) = 0.5;\ \mu = 1;\ f(x,\ t) = e^{-t}(x - x^2 + 1)$. Точным решением задачи фильтрации является функция:$H(x,t) = x(1-x)e^{-t}$. Шаг по времени $\Delta t = 0.01$, шаг по x $\Delta x = 0.1$. В таблице приведены точные и приближенные значения функции $C(x,t)$ в различные моменты времени .

x	t=0.01		t=0.05		t=0.10	
	Точ. знач.	Прибл. знач.	Точ. знач.	Прибл. знач.	Точ. знач	Прибл. знач.
0.0	1.000	1.002	1.000	1.048	1.000	1.127
0.1	1.010	1.024	1.010	1.079	1.009	1.160
0.2	1.040	1.058	1.038	1.124	1.036	1.211
0.3	1.089	1.110	1.086	1.187	1.081	1.281
0.4	1.158	1.182	1.152	1.269	1.145	1.369
0.5	1.248	1.275	1.238	1.371	1.226	1.475
0.6	1.356	1.388	1.342	1.490	1.326	1.594
0.7	1.485	1.521	1.466	1.621	1.443	1.723
0.8	1.634	1.673	1.609	1.759	1.579	1.855
0.9	1.802	1.833	1.770	1.893	1.733	1.984
1.0	1.990	1.974	1.951	2.014	1.905	2.104

Из таблицы заметно быстрое возрастание погрешности. Это объясняется тем, что к погрешности самой задачи (1)–(4) накладывается погрешности вычисления напора из уравнения (15) и, самое главное, погрешности численного дифференцирования функции напора по ее приближенным значениям, что является некорректной операцией.

ЛИТЕРАТУРА

1.Методы охраны подземных вод от загрязнения и истощения /Под ред. И.К. Гавич. -М.: Недра, 1985.-320 с.

2.Самарский А.А. Теория разностных схем. -М.: Наука, 1977. –656 с.