УДК 532.546

Мурзакматов М.У., Тагаева Э.А.

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УРОВНЕМ ГРУНТОВЫХ ВОД

В работе рассматривается задача оптимального управления уровнем грунтовых вод с помощью функции вертикального водообмена и притока грунтовых вод на горизонтальную дрену.

Мелиоративное состояние почвогрунтов зависит от уровня грунтовых вод (УГВ), поэтому управление им является важнейшей задачей. Понижение или поддерживание УГВ на заданной глубине осуществляется путем отбора воды скважинами и горизонтальными дренами. Движение грунтовых вод в неоднородной среде описывается нелинейным уравнением параболического типа [1]

$$\mu \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k\,(y-b) \frac{\partial y}{\partial x} \right] + W(x,t)\ , \tag{1}$$

$$(x\,,\,t) \in D\,\{0 < x < l,\ 0 < t \leq T\}.$$

с дополнительными условиями:

$$\begin{aligned} &y(x,0) = f(x), && 0 \leq x \leq l, \\ &k(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = q_1(t), && x = 0,\quad 0 < t \leq T, \\ &k(y-b)\frac{\partial y}{\partial x} = q_2(t), && x = l,\ 0 < t \leq T\,, \end{aligned} \tag{2}$$

где $y(x,\,t)$ – УГВ; $k(x)$ - коэффициент фильтрации; $b(x)$- поверхность водоупора; $W(x\ t)$- функция вертикального водообмена; $f(x)$- начальное положение УГВ; $q_1(x)$ и $q_2(x)$- приток и отток грунтовых вод; μ- водоотдача или недостаток насыщения грунта.

Управление УГВ можно производить с помощью функций $W(x,\ t)$, $q_1(x)$ и $q_2(x)$. Для простоты изложения считаем, что УГВ $y(x,t)$ удовлетворяет линеаризованному уравнению безнапорной фильтрации в однородной среде [2] и на левом конце области фильтрации отсутствует приток подземных вод , т.е. считаем , что в задаче (1) - (2) $k(x)= k$,
$b(x)= 0$, $q_1(x)= 0$, $q_2(x)= q(t)$. Требуется, управляя величиной вдоотбора и оттока, к заданному моменту $T > 0$ установить наиболее благоприятный в мелиоративном отношении УГВ. Задача сводится к минимизации функционала:

$$\Phi(u) = \int_0^l [y(x,T,u) - \bar{y}(x)]^2\,dx \tag{3}$$

при условии, что $y(x,\ T,\ u)$ является решением краевой задачи:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^2\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \omega(x,t), \qquad (x,t) \in D,$$

$$y(x,0)=f(x),\qquad 0\le x\le l,$$

$$\frac{\partial y(0,t)}{\partial x}=0,\qquad 0<t\le T, \tag{4}$$

$$\frac{\partial y(l,t)}{\partial x}=\gamma\, q(t),\qquad 0<t\le T.$$

Здесь $a^2 = k{\cdot}y_{cp}/\mu$; $\omega(x, t) = W(x, t)/\mu$; $\gamma = 1/(ky_{cp})$; y_{cp}- средняя глубина потока, принятая при линеаризации уравнения (1); $\bar{y}(x)$ - заданное распределение УГВ.

Предполагается , что управлением является вектор – функция

$$u=(q(t),\omega(x, t))\in U,$$

где U - множество допустимых управлений

$$U=\left\{u=(q,\omega)\,\middle|\, q_{\min}\le q(t)\le q_{\max};\qquad \iint_D \omega^2(x,t)dxdt\le s^2\right\}, \tag{5}$$

где $q_{min} < q_{max}$, $s > 0$ - заданные числа.

Обозначим через $H= L_2[0, T] \times L_2[D]$- гильбертово пространство пар $u=(q(t), \omega(x, t))$ со скалярным произведением

$$\langle u_1,u_2\rangle_H=\int_0^T q_1(t)q_2(t)dt+\iint_D \omega_1(x,t)\omega_2(x,t)dxdt$$

с нормой

$$\|u\|_H=(\langle u,u\rangle_H)^{1/2}=\left(\|q\|_{L_2}^2+\|\omega\|_{L_2}^2\right)^{1/2}.$$

При каждом фиксированном управлении $u=(q,\omega)$ из краевой задачи (4) однозначно определяется соответствующее решение
$y(x, t)= y(x, t, u)$. Поскольку управление $u=(q,\omega)$ может иметь бесконечно много разрывов, решение задачи (4) будем понимать в обобщенном смысле.

Задачу (3)-(5) решаем методом условного градиента [3], суть которого заключается в следующем. По известному k- му приближению находится вспомогательное приближение $\bar{u}_k\in U$ из условия

$$\langle\Phi'(u_k),\bar{u}_k-u_k\rangle=\inf_U\langle\Phi'(u_k),\quad u-u_k\rangle,$$

или из условия

$$\langle\Phi'(u_k),\bar{u}_k\rangle=\inf_U\langle\Phi'(u_k),u\rangle\ . \tag{6}$$

Следующее, $(k+1)$ –ое, приближение определяется по формуле

$$u_{k+1}=u_k+\alpha_k(\bar{u}_k-u_k),\qquad 0\le\alpha_k\le 1. \tag{7}$$

Если при некотором k получится, что $\bar{u}_k=u_k$, то в силу (6)

$$\inf_U \langle \Phi'(u_k), \;\; u - u_k \rangle = \langle \Phi'(u_k), \;\; u_k - u_k \rangle = 0,$$

т.е. $\langle \Phi'(u_k), \;\; u - u_k \rangle \geq 0$ при всех $u \in U$ и точка u_k удовлетворяет необходимому условию оптимальности. Если $\Phi(u)$ - выпуклая функция, то u_k является искомым решением.

Для применения метода условного градиента требуется найти производную функционала (3). Возьмем произвольные управления
$u = (q, \omega)$, $u + \Delta u = (q + \Delta q, \; \omega + \Delta\omega) \in H$. Соответствующие этим управлениям решения задачи (4) обозначим через $y(x, t, u)$, $y(x, t, u+\Delta u)$, а их разность - через Δy:

$$\Delta y(x,t) = y(x, t, u+\Delta u) - y(x, t, u),$$

где Δy является обобщенным решением краевой задачи

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \Delta y}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \Delta y}{\partial x^2} + \Delta\omega, && (x,t) \in D, \\ &\frac{\partial \Delta y}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \;\; \frac{\partial \Delta y}{\partial x}\Big|_{x=l} = \gamma \Delta q(t), && 0 < t \leq T, \\ &\Delta y(x,0) = 0, && 0 \leq x \leq l. \end{aligned} \tag{8}$$

Тогда приращение функционала (3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\Delta\Phi(u) = \Phi(u + \Delta u) - \Phi(u) = \\ &= \int_0^l \left\{[y(x,T,u) + \Delta y(x,T) - \bar{y}(x)]^2 - [y(x,T,u) - \bar{y}(x)]^2\right\} dx = \\ &\qquad = 2\int_0^l [y(x,T,u) - \bar{y}(x)] \;\; \Delta y(x,T)dx + \int_0^l \Delta y^2(x,T)dx. \end{aligned} \tag{9}$$

Теперь составим функцию Лагранжа задачи (3)- (4):

$$L(y,q,\omega,\psi) = \int_0^l [y(x,T) - \bar{y}(x)]^2 dx + \iint_D \psi(x,t)\left[-\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + a^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \omega(x,t)\right] dxdt\,, \tag{10}$$

где $\psi(x, t)$ – множитель Лагранжа.

Дадим вариации переменным y, q, ω : $y(x, t) + \delta y(x, t)$, $q(t) + \delta q(t)$, $\omega(x, t) + \delta\omega(x, t)$. Эти функции должны удовлетворять дополнительным условиям задачи (4). Тогда

$$\delta \frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \delta \frac{\partial y(l,t)}{\partial x} = \gamma \delta q(t), \quad \delta y(x,0) = 0 \tag{11}$$

Находим вариацию функции Лагранжа (10). Она является главной линейной частью приращения

$$\Delta L = L(y + \delta y, \; q + \delta q, \; \omega + \omega\,\delta, \psi) - L(y, \; q, \omega, \psi)$$

и имеет вид

$$\delta L = \int_0^l 2[y(x,T) - \bar{y}(x)]\delta y(x,T)\,dx + \iint_D \psi\, x,t)\left(-\delta\frac{\partial y}{\partial t} + a^2\delta\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \delta\omega\right)dxdt.$$

Учитывая (11), проинтегрируем двойной интеграл по частям. Имеем:

$$\delta L = \int_0^l [2(y(x,T) - \bar{y}(x)) - \psi(x,T)]\ \delta y(x,T)dx + \iint_D \left(\frac{\partial\psi}{\partial t} + a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right)\delta y dxdt + \iint_D \psi\delta\omega\, dxdt -$$

$$- a^2\int_0^T \frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x}\delta y(l,t)dt + a^2\gamma\int_0^T \psi(l,t)\delta q(t)dt + \int_0^T \frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x}\delta y(0.t)dt. \qquad (12)$$

Поскольку в оптимальной точке выполняется условие стационарности $\delta L = 0$ и выбор вариации $\delta y(x, t)$ произвольный, приравняем нулю коэффициенты при вариациях $\delta y(x, T)$, $\delta y(x,t)$, $\delta y(l,t)$, $\delta y(0,t)$ и получаем задачу, сопряженную задаче (4):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi}{\partial t} = -a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}, && (x,t)\in D,\\
&\frac{\partial\psi(0,t)}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial\psi(l,t)}{\partial x} = 0,\ 0 < t < T, &&\\
&\psi(x,T) = 2(y(x,T,u) - \bar{y}(x)),\ 0 \le x \le l. &&
\end{aligned} \qquad (13)$$

Тогда с учетом (8) и (13) получим

$$2\int_0^l [y(x,T,u) - \bar{y}(x)]\Delta y(x,T)dx = \int_0^l \psi(x,T)\Delta y(x,T)dx =$$

$$= \int_0^l\left(\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}(\psi\Delta y)dt\right)dx = \iint_D\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\Delta x + \psi\frac{\partial\Delta y}{\partial t}\right)dxdt = \iint_D\left(-a^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\Delta y + \psi a^2\frac{\partial^2\Delta y}{\partial x^2} + \psi\Delta\omega\right)dxdt =$$

$$= a^2\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta y + \psi\frac{\partial\Delta y}{\partial x}\right)dtdx + \iint_D \psi\Delta\omega dxdt = a^2\int_0^T\left(-\frac{\partial\psi}{\partial x}\Delta y + \psi\frac{\partial\Delta y}{\partial x}\right)\Big|_{x=0}^{x=l} dt + + \iint_D \psi\Delta\omega dxdt =$$

$$= a^2\gamma\int_0^T \psi(l,t,u)\Delta q(t)dt + \iint_D \psi(x,t,u)\Delta\omega(x,t)dxdt. \qquad (14)$$

Подставляя полученное выражение в (9), будем иметь

$$\Delta\Phi(u) = \int_0^T a^2\gamma\psi(l,t,u)\Delta q(t)dt + \iint_D \psi(x,t,u)\Delta\omega(x,t)dxdt + \int_0^l \Delta y^2(x,T)dx \qquad (15)$$

Можно показать [3] , что

$$\int_0^l \Delta y^2(x,T)dx \le c\|\Delta y\|^2, \qquad (16)$$

где $c > 0$ – постоянная, не зависящая от выбора $\Delta u=(\Delta q, \Delta\omega)\in H$ и $u=(q,\omega)\in H$.

Из формулы (15) и оценки (16) следует, что градиент функционала (3) имеет вид

$$\Phi'(u) = (a^2\gamma\psi(l,t,u);\ \ \psi(x,t,u)). \tag{17}$$

Таким образом, для нахождения градиента $\Phi'(u)$ при фиксированном $u \in H$ нужно сначала из (3) определить функцию $y(x, t, u)$, затем в (13) подставить $y(x, T, u)$ и из этой краевой задачи найти
$\psi(x, t, u)$.

После нахождения градиента можно написать условия оптимальности для задачи (3) – (5). Сначала установим выпуклость функционала $\Phi(u)$ при условиях (4). Заметим, что для функции $y(x, t, u)$ выполняется равенство:

$$y(x,\ t,\ \alpha u+(1-\alpha)\ \vartheta)= \alpha y(x,\ t,\ u) + (1-\alpha)y(x,\ T,\ \vartheta)\ ,\ (x,\ t)\in D \tag{18}$$

при всех $u,\ \vartheta \in H$ и всех действительных α. В самом деле, левая и правая части этого равенства являются решениями линейной краевой задачи (4), соответствующие управлению $\alpha\ u+(1-\alpha)\vartheta$. Отсюда и из единственности решения задачи (4) следует равенство (18). Далее, с учетом выпуклости функции $g(x)=|x-\alpha|^2$ переменной x и равенства (18) имеем:

$$\begin{gathered}\Phi(\alpha u +(1-\alpha)\vartheta)=\int_0^l[y(x,T,\alpha u+(1-\alpha)\vartheta)-\bar y(x)]^2\ dx=\\ =\int_0^l \{\alpha[y(x,T,u)-\bar y(x)]+(1-\alpha)[y(x,T,u)-\bar y(x)]\}^2dx\le\\ \le\alpha\int_0^l[y(x,T,u)-\bar y(x)]^2dx+(1-\alpha)\int_0^l[y(x,T,\vartheta)-\bar y(x)]^2dx=\alpha\Phi(u)+(1-\alpha)\Phi(\vartheta)\\ \alpha\in[0,1],\quad u,\vartheta\in H,\end{gathered} \tag{19}$$

что означает выпуклость функционала $\Phi(u)$.

Кроме того, из формулы (5) следует выпуклость множества U. Для оптимальности управления $u_* = q_*(t),\omega_*(x,t)) \in U$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle \Phi'(u_*),u-u_*\rangle = \int_0^T a^2\gamma\psi(l,t,u_*)(q(t)-q_*(t))dt + \iint_D \psi(x,t,u_*)(\omega(x,t)-\omega_*(x,t))dxdt \ge 0$$

при всех $u=(q(t),\omega(x,t))\in U$. Условие достаточности вытекает из выпуклости функционала $\Phi(u)$ на U.

По методу условного градиента решение задачи (3)–(5) сводится к построению последовательности $\{u_* = q_k(t),\ \omega_k(x,\ t))\}$ по правилу

$$\begin{aligned} &q_{k+1}(t)=q_k(t)+\alpha_k(\bar q_k(t)-q_k(t)), && 0\le t\le T,\\ &\omega_{k+1}(x,t)=\omega_k(x,t)+\alpha_k(\bar\omega_k(x,t)-\omega_k(x,t)), && (x,t)\in D,\end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\bar q_k(t)=\begin{cases} q_{\min} & \text{при } \psi(l,\ t,u_k)\ge 0,\\ q_{\max} & \text{при } \psi(l,\ t,u_k)<0,\end{cases} \tag{21}$$

$$\overline{\omega}_k(x,t) = \frac{s\psi(l,\, t, u_k)}{\left(\iint\limits_D \psi^2(x,\, t, u_k) dxdt \right)^{1/2}} . \tag{22}$$

Вспомогательное приближение $\overline{u}_k = (\overline{q}_k(t), \overline{\omega}_k(x,t)) \in U$ здесь определено из условия минимума линейного функционала

$$\langle \Phi'(u_k), u \rangle = \int\limits_0^T a^2 \gamma \psi(l,t,u_k) q(t) dt + \iint\limits_D \psi(x,t,u_k) \omega(x,t) dxdt.$$

Параметр α_k $(0 \le \alpha_k \le 1)$ выбирается из условия

$$f_k(\alpha_k) = \inf_{0 \le \alpha \le 1} f_k(\alpha), \tag{23}$$

где

$$f_k(\alpha) = \Phi(u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)) .$$

В рассматриваемой задаче для параметра α_k, определяемого из условия (23), можно получить явное выражение. Из равенства (18) получаем

$$f_k(\alpha) = \Phi(u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)) = \int\limits_0^l [y(x,T,u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)) - \overline{y}(x)]^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^l [y(x,T,u_k) + \alpha\, y(x,T,\overline{u}_k - u_k) - \overline{y}(x)]^2 dx = \int\limits_0^l \{ [y(x,T,u_k) - \overline{y}(x)]^2 + 2\alpha [y(x,T,u_k) -$$

$$- \overline{y}(x)]\, y(x,T,\overline{u}_k - u_k) + \alpha^2 y^2(x,T,\overline{u}_k - u) \} dx = \Phi(u_k) +$$

$$+ 2\alpha \int\limits_0^l [y(x,T,u_k) - \overline{y}(x)]\, [y(x,T,\overline{u}_k) - y(x,T,u_k)]\, dx +$$

$$+ \alpha^2 \int\limits_0^T [y(x,T,\overline{u}_k) - y(x,T,u_k)]^2 dx \quad . \tag{24}$$

Если $y(x,T,\overline{u}_k) = y(x,T,u_k)$, то $f_k(\alpha) \equiv \Phi(u_k) = const$ при всех α. Следовательно,

$$f_k'\ (\alpha) = \langle \Phi'(u_k + \alpha(\overline{u}_k - u_k)),\, \overline{u}_k - u_k \rangle = 0.$$

Отсюда с учетом условия (6) получаем:

$$f_k'\ (0) = 0 = \langle \Phi'(u_k),\, \overline{u}_k - u_k \rangle \le \langle \Phi'(u_k),\, u\ - u_k \rangle$$

для любого $u \in U$. Тогда, поскольку U - выпуклое замкнутое ограниченное множество $u_* = u_k = u_k(t)$ является оптимальным управлением в задаче (3) - (5).

При $y(x,T,\overline{u}_k) \ne y(x,T,u_k)$ функция $f_k(\alpha)$ является квадратичным трехчленом относительно α и достигает своей нижней грани при

$$\alpha = \alpha_k^* = -\frac{\int_0^l [y(x,T,u_k) - \bar{y}(x)][y(x,T,\bar{u}_k) - y(x,T,u_k)]dx}{\int_0^T [y(x,T,\bar{u}_k) - y(x,T,u_k)]^2 dx} \tag{25}$$

В силу формул (14), (15), (17) и (6) имеем

$2\int_0^l [y(x,\,T,u_k) - \bar{y}(x)][y(x,\,T,\bar{u}_k) - y(x,\,T,u_k)]\,dx = \langle \Phi'(u_k), \bar{u}_k - u_k \rangle \le \langle \Phi'(u_k), u_k - u_k \rangle = 0$, т. е $\alpha_k^* \ge 0$.

Таким образом,

$$\alpha_k^* = -\frac{\int_0^T a^2\gamma\,\psi(l,t,\,u_k)(\bar{q}_k(t) - q_k(t))dt}{2\int_0^l [y(x,\,T,\bar{u}_k) - y(x,\,T,u_k)]^2\,dx} + \frac{\iint_D \psi(x,t,\,u_k)(\bar{\omega}_k(x,t) - \omega_k(x,t))dxdt}{2\int_0^l [y(x,\,T,\bar{u}_k) - y(x,\,T,u_k)]^2\,dx} \tag{26}$$

Если $\alpha_k^* > 0$, то квадратичный трехчлен (24) достигает своей нижней грани на отрезке $0 \le \alpha \le 1$ при

$$\alpha_k = min(1;\ \alpha_k^*). \tag{27}$$

Если $\alpha_k^* = 0$, то согласно условию (6) и формуле (25) получаем:

$$0 = \langle \Phi'(u_k),\ \bar{u}_k - u_k \rangle \le \langle \Phi'(u_k),\ u - u_k \rangle$$

при всех $u \in U$. Это значит, что $u_* = u_k = u_k\ (t)$ - оптимальное управление в задаче (3) - (4).

Рассмотрим теперь алгоритм численного решения задачи.

Пусть известно k - ое приближение функции $u(x,t)$: $u_k(x,\ t) = (q_k\ (t),\ \omega_k(x,\ t))$. При $k=0$ начальное приближение $u_0(x,t) = (q_0(t),\ \omega_0(x,t))$ берется из эксперимента или задается априори. Численно решаем задачу (4) с $q(t) = q_k(t)$ и $\omega(x,t) = \omega_k(x,t)$ и находим функцию $y_k(x,T) = y(x,T,u_k)$. Затем, подставляя эту функцию в выражение для $\psi(x,T)$, решаем задачу (13). Чтобы избежать обратного течения времени при решении этой задачи, сделаем следующую замену переменных: $\bar{t} = T - t,\ \bar{x} = x$. Тогда

$$\psi(x,t) = \bar{\psi}(\bar{x},\bar{t}), \qquad \frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial\bar{t}}, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\bar{\psi}}{\partial\bar{x}^2}$$

и задача (10) запишется в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \bar{t}} = a^2 \frac{\partial^2 \overline{\psi}}{\partial \bar{x}^2}, && (\bar{x},\bar{t}) \in D, \\ &\frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \bar{x}}\Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial \overline{\psi}}{\partial \bar{x}}\Big|_{x=l} = 0, && 0 < \bar{t} < T, \\ &\overline{\psi}(\bar{x},0) = 2(y(\bar{x},T,u_k) - \bar{y}(\bar{x})), && 0 \le \bar{x} \le l. \end{aligned} \tag{28}$$

Задача (28) решается по алгоритму задачи (4) при $\omega(x, t)=0$, $q(t)=0$, $f(x)= \overline{\psi}(\bar{x},0)$. Подставляя функцию $\psi(x,t,u_k) = \overline{\psi}(\bar{x},\bar{t})$ в формулы (21), (22), вычисляем $\bar{q}_k(t)$, $\bar{\omega}_k(x,t)$, а затем по формулам (26), (27) определяем α_k. По полученным значениям этих величин и с помощью формул (20) находим $(k+1)$ - ое приближение $u_{k+1}(x,t)=(q_{k+1}(t), \omega_{k+1}(x,t))$ и переходим к следующей итерации.

После каждой итерации проверяем условие $||u_{k+1}- u_k||_H \le \varepsilon$, где ε - заданное число, и при выполнении этого условия вычисления прекращаем.

Интегралы, встречающиеся в (5), (22) и (26), вычисляем по формуле трапеций, а при решении краевых задач (4) и (28) используем неявную разностную схему в сочетании с прогонкой [4]. Приводим алгоритм численного решения задачи (4) конечноразностным методом [5]. Разобьем отрезок $[0, l]$ точками $x_i= ih$, $(i = 0,1,\dots,n)$ на n равных частей, отрезок $[0, T]$ - точками $t_j= j\tau$, $(j= 0,1,\dots,m)$ на m равных частей. Здесь $h = \frac{l}{n}$, $\tau = \frac{T}{m}$ – шаги сетки. Для краткости записи значения функции в узлах сетки обозначим через $y_i=y(x_i, t_{j+1})$, $\overset{*}{y}_i= y(x_i, t_j)$, $\omega_i = \omega(x_i, t_{j+1})$. Тогда при каждом $t= t_{j+1}$, $(j= 0, 1, \dots, m-1)$ задача сводится к решению трехдиагональной системы алгебраических уравнений:

$$cy_{i-1} - by_i + cy_{i+1} + d_i = 0, \quad i = 1,2,\dots,n-1 \tag{29}$$

$$c = \frac{a^2\tau}{h^2}, \quad b = 2c+1, \quad d_i = \tau\omega_i + \overset{*}{y}_i.$$

Решение системы (29) ищется в виде

$$y_i= \alpha_{i+1} y_{i+1}+\beta_{i+1}, \quad i= 0, 1, \dots, n-1. \tag{30}$$

Прогоночные коэффициенты находятся по формулам:

$$\alpha_{i+1} = \frac{c}{b - c\alpha_i}, \quad \beta_{i+1} = \frac{c\beta_i + d_i}{b - c\alpha_i}, \quad i = 1,2,\dots,n-1. \tag{31}$$

Для вычисления α_i, β_i и y_i необходимо сначала определить α_1, β_1 и y_n. α_1 и β_1 находятся из разностного аналога левого краевого условия задачи (4) и уравнения (30) при $i=0$:

$$\alpha_1 = \frac{c}{b}, \quad \beta_1 = \frac{d_0}{b}, \tag{32}$$

а y_n - совместным решением разностного аналога правого краевого условия и уравнения (30) при $i = n-1$:

$$y_n = \frac{c\beta_n + d_n + \tau q_{j+1} / h}{b - c\alpha_n}. \tag{23}$$

Теперь по формуле (31) вычисляются прогоночные коэффициенты α_i , β_i , $i=1,\ 2,\ \dots,\ n-1$ (прямая прогонка), затем после нахождения y_n по формуле (30) вычисляется y_i , $i=n-1,\ n-2,\ \dots,\ 1,\ 0$ (обратная прогонка). Используя полученные значения y_i в качестве начального условия, т. е. подставляя y_i вместо y_i^* , совершается переход на следующий временной слой и т. д.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова – Кочина П. Я. и др. Математические методы в вопросах орошения. – М.: Наука, 1969.
2. Бочевер Ф. М. и др. Основы гидрогеологических расчетов. – М.: Недра, 1969.
3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
4. Самарский А. А. Теория разностных схем.- М.: Наука, 1977.
5. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М. У. К численному прогнозу уровня грунтовых вод в однослойных пластах. // В сб. « Плоское и пространственное течение жидкости и газа». – Фрунзе: Илим , 1972.
6. Мурзакматов М. У., Тултуков Б. Т. К оптимальному управлению уровнем грунтовых вод. // Материалы 4 Респ. науч.-метод. конф. «Комп. в уч. проц. и совр. проб. математики ».-Бишкек, 1996 .