УДК 532.546

Ч. Джаныбеков, М.У. Мурзакматов

ИДЕНТИФИКАЦИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ФИЛЬТРАЦИИ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассматривается применение теории малых возмущений к идентификации коэффициента дифференциального уравнения, установившегося пространственного течения подземных вод.

1. Об условии сопряженности краевых задач

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu = f(x,y,z), \quad (x,y,z) \in V, \tag{1.1}$$

$$lu = \alpha(x,y,z), \quad (x,y,z) \in \sum = \partial V \tag{1.2}$$

и связанную с ней задачу

$$L^* u^* = p(x,y,z), \ (x,y,z) \in V, \tag{1.3}$$

$$l^* u^* = \alpha^*(x,y,z) \in \sum, \tag{1.4}$$

где

$$L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$l = K\frac{\partial}{\partial n} + \beta. \tag{1.5}$$

Здесь коэффициенты $K(x,y,z)$, $\beta(x,y,z)$ и правые части $f(x,y,z)$, $p(x,y,z)$, $\alpha(x,y,z)$, $\alpha^*(x,y,z)$ – заданные функции, имеющие необходимую степень гладкости в области V и на ее границе $\sum$. В уравнении (1.1) и в условии (1.2) коэффициенты и правые части имеют конкретную физическую интерпретацию. Например, $f(x,y,z)$ – функция, содержащая мощность источников (вертикальных дрен) и интенсивность инфильтрации и (или) испарения; $K(x,y,z)$–коэффициент фильтрации водоносного пласта и т.д.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство функций со скалярным произведением

$$(g,h)=\iiint_V g(x,y,z)\ h(x,y,z)\ d\vartheta$$

Как известно, оператор L^*, сопряженный оператору L, определяется из тождества Лагранжа

$$(g,\ L\ h)=(h,\ L^*g) \tag{1.6}$$

для любых функций g и h, определенных и интегрируемых с квадратом в области V.

Перемножая уравнение (1.1) на u^* и дважды интегрируя полученное выражение по области V с использованием формулы Грина, получим

$$\iiint_V u^* Lu\, d\vartheta = -\iiint_V u\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u^*}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u^*}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)\right]d\vartheta + \\ + \iint_\Sigma\left(uK\frac{\partial u^*}{\partial n}-u^*K\frac{\partial u}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{1.7}$$

Если за оператор L^* принимать

$$L^*=-\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial}{\partial z}\right)=L, \tag{1.8}$$

то можно увидеть, что

$$l^*=K\frac{\partial}{\partial n}+\beta=l. \tag{1.9}$$

При однородных краевых условиях $\alpha\equiv 0$ и $\alpha^*\equiv 0$ и из (1.7) приходим к равенству

$$\iiint_V u^* Lu\, d\vartheta-\iiint_V uL^*u^*d\vartheta=\iint_\Sigma[u(-\beta u^*)-u^*(-\beta u)]d\sigma=0,$$

т.е. операторы L и L^* совместно с однородными краевыми условиями будут сопряженными. Кроме того, из условия $L^*=L$ вытекает, что они являются самосопряженными.

Теперь из (1.1) и (1.3) образуем тождество [1]

$$\iiint_V u^* Lu\, d\vartheta-\iiint_V uL^*u^*d\vartheta=\iiint_V f\, u^*d\vartheta-\iiint_V up\, d\vartheta. \tag{1.10}$$

Используя формулу Грина, из левой части (1.10) и краевых условий (1.2) и (1.4) получим

$$\iiint_V u^* Lu\, d\vartheta-\iiint_V u\, L^*u^*d\vartheta=\iint_\Sigma(u\alpha^*-u^*\alpha)\,d\sigma. \tag{1.11}$$

Для линеалов (линейных функционалов), содержащихся в правой части равенства (1.10), используя обозначения [1]

$$J_f[u^*]=\iiint_V f\, u^*d\vartheta,\qquad J_p[u]=\iiint_V p\, u\, d\vartheta, \tag{1.12}$$

из тождества (1.10) на основании (1.11) и (1.12) можно перейти к полезному в дальнейшем тождеству

$$J_f[u^*]-J_p[u]=\iint\limits_{\Sigma}(u\alpha^*-u^*\alpha)\,d\sigma, \qquad (1.13)$$

эквивалентному основному тождеству (1.10), которое связывает решения задач (1.1), (1.2) и (1.3), (1.4) с краевыми условиями.

Из (1.13) видно, что если в задачах (1.1) –(1.4) имеем однородные краевые условия $(\alpha=\alpha^*=0)$, то приходим к равенству

$$J_f[u^*]=J_p[u]\,. \qquad (1.14)$$

Из (1.14) получаем полезные на практике равенства

$$J_p[u]=\iiint\limits_V f\,u^*d\vartheta,\quad J_f[u^*]=\iiint\limits_V p\,u\,d\vartheta. \qquad (1.15)$$

Отсюда вытекает, что в сопряженных задачах соответствующие линеалы можно вычислить с помощью отдельных параметров и другой имеющейся информации о сопряженной к ней задаче.

2. Случай малых возмущений правой части уравнения

Пусть правые части уравнения (1.1) и краевого условия (1.2) получают малые возмущения (такая ситуация возникает, когда поле функции напора изменяется в результате отключения одной водозаборной дрены или скважины среди множества работающих скважин, а фильтрационные свойства грунта остаются неизменными) f' и α':

$$f'=f+\delta f,\quad \alpha'=\alpha+\delta\alpha,$$

где δf и $\delta\alpha$ – соответствующие вариации. При принятом допущении краевая задача (1.1) и (1.2) переходит в краевую задачу

$$Lu'=f',\quad u'=u+\delta u,\ (x,y,z)\in V, \qquad (2.1)$$

$$l\,u'=\alpha',\quad (x,y,z)\in\sum \qquad (2.2)$$

Из (2.1) и (2.2) с учетом краевой задачи (1.1), (1.2) приходим к краевой задаче относительно вариации δu:

$$L\delta u=\delta f,\qquad (x,y,z)\in V, \qquad (2.3)$$

$$l\delta u=\delta\alpha,\qquad (x,y,z)\in\sum\,. \qquad (2.4)$$

Из краевых задач (2.1), (2.2) и (1.3), (1.4) образуем тождество

$$\iiint\limits_V u^*Lu'\,d\vartheta-\iiint\limits_V u'Lu^*d\vartheta=\iiint\limits_V f'\,u^*d\vartheta-\iiint\limits_V u'\,p\,d\vartheta. \qquad (2.5)$$

Из левой части (2.5) аналогично (1.11) имеем

$$\iiint\limits_V u^*Lu'\,d\vartheta-\iiint\limits_V u'Lu^*d\vartheta=\iint\limits_{\Sigma}(\alpha^*\,u'-u^*\,\alpha')\,d\sigma\,. \qquad (2.6)$$

Вводя обозначения, аналогичные (1.12)

$$J_{f'}[u^*]=\iiint\limits_V f'\,u^*d\vartheta,\quad J_p[u']=\iiint\limits_V u'\,p\,d\vartheta, \qquad (2.7)$$

с учетом (2.6) и (2.7) из (2.5) получаем равенство

$$J_{f'}[u^*] - J_p[u'] = \iint_{\Sigma}(\alpha^* u' - u^* \alpha')d\sigma, \tag{2.8}$$

аналогичное тождеству (1.10).

Выделяя из f', α' и u' вариация от соответствующих значений функций и используя равенство (1.11), из (2.8) приходим к уравнению относительно вариаций переменных:

$$\iiint_V p\delta u\, d\vartheta + \iint_{\Sigma}\alpha^*\delta u\, d\sigma = \iiint_V u^*\delta f\, dV + \iint_{\Sigma}u^*\delta\alpha\, d\sigma, \tag{2.9}$$

которое используется в практических вычислениях. Для вычисления вариации функции u удобно использовать тождество, созданное из краевых задач (2.1), (2.2) и (1.3), (1.4):

$$\iiint_V u^* Lu' dV - \iiint_V uLu^* dV = \iiint_V u^* f'\, dV - \iiint_V up\, dV. \tag{2.10}$$

С учетом равенства (1.11) преобразуем левую часть тождества (2.10):

$$\iiint_V u^* Lu' dV - \iiint_V uLu^* dV = \iiint_V u^* L\delta u dV + \iint_{\Sigma}(u\alpha^* - u^*\alpha)d\sigma =$$

$$= \iiint_V K\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial\delta u}{\partial y}\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial\delta u}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)dV -$$

$$- \iint_{\Sigma}u^* K\frac{\partial\delta u}{\partial n}d\sigma + \iint_{\Sigma}(u\alpha^* - u^*\alpha)d\sigma. \tag{2.11}$$

Из правой части (2.10) имеем

$$\iiint_V u^* f'\, dV - \iiint_V up\, dV = J_f[u^*] - J_p[u] + \iiint_V u^*\delta f\, dV. \tag{2.12}$$

Из (2.10) с учетом (1.13), (2.11) и (2.12) получаем уравнение, дающее возможность вычислить поле вариации δu при известных $u^*, \delta f$, и $\delta\alpha$:

$$\begin{aligned}\iiint_V K\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial\delta u}{\partial y}\frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial\delta u}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)dV + \iint_{\Sigma}u^*\beta\delta u\, d\sigma = \\ = \iiint_V u^*\delta f\, dV + \iint_{\Sigma}u^*\delta\alpha\, d\sigma.\end{aligned} \tag{2.13}$$

3. Случай малых возмущений правой части и коэффициента уравнения

В этом пункте рассматривается случай, когда малые возмущения принимают не только правая часть уравнения, но и его коэффициент, т.е. изменяется также гидрогеологическая характеристика среды.

Итак, вместо задачи (1.1) и (1.2) имеем краевую задачу

$$L'u' = \tilde{f}', \quad \tilde{f}' = f' + \delta\tilde{f}, \quad L' = L + \delta L, \quad (x,y,z) \in V, \tag{3.1}$$

$$l'u' = \tilde{\alpha}', \quad \tilde{\alpha}' = \alpha' + \delta\tilde{\alpha}, \quad l' = l + \delta l, \quad u' = u + \delta u, \quad (x,y,z) \in \Sigma, \tag{3.2}$$

где

$$\delta L=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta K\frac{\partial}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\delta K\frac{\partial}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\delta K\frac{\partial}{\partial z}\right).$$

$$\delta l=\delta K\frac{\partial}{\partial n}+\delta\beta.$$

Рассмотрим сопряженную задачу

$$L^*u^*=Lu^*=p,\quad lu^*=\alpha^*. \tag{3.3}$$

Из (3.1) и (3.3) образуем тождество

$$\iiint\limits_V u^*L'u'dV-\iiint\limits_V u'Lu^*dV=\iiint\limits_V \tilde{f}'u^*dV-\iiint\limits_V pu'\,dV. \tag{3.4}$$

Преобразуем левую часть равенства (3.4):

$$\iiint\limits_V u^*L'u'dV-\iiint\limits_V u'Lu^*dV=\iiint\limits_V u^*Lu'dV-\iiint\limits_V u'Lu^*dV+$$
$$+\iiint\limits_V u^*\delta Lu'dV=\iint\limits_\Sigma(\alpha^*u'-u^*\alpha')d\sigma+$$
$$+\iiint\left[\delta K\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial z}\right)\right]dV-$$
$$-\iint\limits_\Sigma u^*\delta K\frac{\partial u'}{\partial x}d\sigma=\iiint\limits_V q(u',u^*)\delta KdV-\iiint\limits_V u^*Qu'dV+$$

$$+\iint\limits_\Sigma(\alpha^*u'-u^*\alpha')d\sigma-\iint\limits_\Sigma u^*(\delta\tilde{\alpha}-u'\delta\beta)d\sigma, \tag{3.5}$$

где

$$q(u',u^*)=\frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial u^*}{\partial x}+\frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial u^*}{\partial y}+\frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial u^*}{\partial z}=q(u^*,u'). \tag{3.6}$$

Правая часть равенства (3.4) представляется в виде

$$\iiint\limits_V \tilde{f}'u^*dV-\iiint\limits_V pu'dV=J_{f'}[u^*]-J_p[u']+\iiint\limits_V u^*\delta\tilde{f}\,dV. \tag{3.7}$$

Подставляя соответствующие выражения из (3.5) и (3.7) в (3.4) и учитывая равенство (2.8), приходим к уравнению относительно δK:

$$\iiint\limits_V q(u',u^*)\delta Kd\vartheta=\iiint\limits_V u^*\delta\tilde{f}\,dV+\iint\limits_\Sigma u^*(\delta\tilde{\alpha}-u'\delta\beta)d\sigma. \tag{3.8}$$

Из (3.8) видно, что при заданных $\delta\tilde{f}$, $\delta\tilde{\alpha}$, и $\delta\beta$ и известных функциях u' и u^* можно вычислить поле вариации δK (т.е. можно оценить, насколько изменилась гидрогеологическая характеристика среды).

При решении задач идентификации основные затруднения связаны с недостаточностью информации. Это объясняется тем, что количество информации, полученной путем наблюдения и (или) измерения, ничтожно мало по сравнению с количеством той необходимой информации, в которой нуждается та или иная инженерно–мелиоративная или проектно–изыскательная работа. Кроме того, информация , получаемая путем наблюдения и измерения , стоит достаточно дорого и требует значительной затраты времени.

Для того, чтобы разрешить эту сложную проблему, необходимо по возможности выявить более глубокие аналитические связи между отдельными параметрами и неизвестными функциями. По этой причине, используя свойство взаимности изучаемой и сопряженной к ней краевой задачи, можно расширить круг таких аналитических выражений. Далее, не вдаваясь в подробности, поменяя ролями данную и сопряженную краевую задачу, перечислим аналитические выражения, связывающие искомые функции с другими параметрами.

4. Определение поля вариаций искомой функции

Выведем уравнения для вычисления вариаций δu^* и δK.

а) Вместо краевой задачи (1.1), (1.2) рассмотрим сопряженную задачу:

$$L^* u^{*\prime} = p', \; l u^{*\prime} = \alpha^{*\prime}, \; u^{*\prime} = u^* + \delta u^*, \; p' = p + \delta p, \quad \alpha^{*\prime} = \alpha^* + \delta\alpha^*. \tag{4.1}$$

Из краевых задачи (4.1) и (1.1), (1.2) образуем тождество

$$\iiint\limits_V u\, Lu^* dV - \iiint\limits_V u^* Lu\, dV = \iiint\limits_V p' u\, dV - \iiint\limits_V u^* f\, dV. \tag{4.2}$$

Отсюда, аналогично п.1.1.2, используя равенство (1.10), получим уравнение относительно δu^*:

$$\iiint\limits_V K\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial \delta u^*}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial \delta u^*}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial \delta u^*}{\partial z}\right) dV + \iint\limits_\Sigma u\beta\delta u^* d\sigma = \\ = \iiint\limits_V u\delta p\, dV + \iint\limits_\Sigma u\delta\tilde{\alpha}^* d\sigma. \tag{4.3}$$

Итак, при вычисленных значениях u в области $Д$ и заданных β, $\delta\tilde{\alpha}^*$ и

δp можно вычислить поле функции δu^*.

б) Вместо краевой задачи (1.1), (1.2) рассматривается варьированная сопряженная задача

$$L' u^{*\prime} = p + \delta\tilde{p}, \quad l u^{*\prime} = \alpha^{*\prime} + \delta\tilde{\alpha}^*, \tag{4.4}$$

откуда, аналогично п.2 приходим к краевой задаче

$$\delta L\, u^{*\prime} = \delta\tilde{p}, \quad \delta l\, u^{*\prime} = \delta\tilde{\alpha}^*, \tag{4.5}$$

где

$$\delta L = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta K\frac{\partial}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta K\frac{\partial}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta K\frac{\partial}{\partial z}\right),$$

$$\delta l = \delta K\frac{\partial}{\partial n} + \delta\beta. \tag{4.6}$$

Образуя равенство

$$\iiint_V uL'u^{*}{}'\,dV - \iiint_V u^{*}{}'\,Lu\,dV = \iiint_V u(\,p' + \delta\,\tilde{p}\,)dV - \iiint_V fu^{*}{}'\,dV \qquad (4.7)$$

и учитывая равенство

$$\iint_\Sigma (u^{*}\,'\alpha - u\alpha^{*}\,')d\sigma = \iiint_V up'dV - \iiint_V fu^{*}\,'\,dV,$$

приходим к уравнению относительно δK :

$$\iiint_V q(u',u^{*}\,')\delta K dV = \iiint_V u\delta\,\tilde{p}dV + \iint_\Sigma u(\,\delta\tilde{\alpha}^{*} - \delta\beta u^{*}\,')d\sigma\,. \qquad (4.8)$$

Из этого уравнения при вычисленных значениях $u,\ u^{*}\,'$ и заданных $\delta\,\tilde{p}$, $\delta\,\tilde{\alpha}^{*}$ и $\delta\beta$ можно найти поле вариации δK в V.

Вычисленные выше линейные функциональные уравнения при известных полях напорной и сопряженной к ней функции и приближенных значениях коэффициентов дают возможность построить поля вариаций $\delta\,u,\ \delta\,u^{*}$ и $\delta\,K$. Кроме того, цепочки получаемых при этом уравнений линеаризуют нелинейную задачу (при неизвестном коэффициенте $K(x,y,z)$) и одновременно дают возможность разрешить некорректно поставленную задачу с помощью регуляризирующих операторов.

Необходимо сделать следующие замечания. Из уравнении (2.13) и (4.3), выписанных относительно вариаций u и u^{*}, явно видно их взаимность (одно из них вытекает из другого путем замены соответствующих параметров). То же самое можно утверждать относительно уравнений (3.8) и (4.8), дающих возможность построить поле δK. Но эти взаимозаменяемые уравнения по удобству реализации могут существенно различаться. К примеру, обратимся к уравнениям (2.13) и (4.3). Если известно приближенное значение поля $K(x,y,z)$ и вычислено поле u^{*}, то из (2.13) можно вычислить поле δu. С точки зрения экономичности этот алгоритм равносилен алгоритму, вычисляющему δK из (4.8) при известных соответствующих коэффициентах. Однако на практике определить δf и $\delta\alpha$ для краевой задачи (2.3) и (2.4) куда сложнее, чем адекватно задавать в (4.3) соответствующие δp и $\delta\alpha^{*}$ (это объясняется тем, что на практике величины δf и $\delta\alpha$ остаются неизвестными, а δp и $\delta\alpha^{*}$ можно задавать). Относительно экономичности и удобства алгоритмов , вытекающих из уравнений (3.8) и (4.8) , также приходим к аналогичной ситуации.

5. Алгоритмы, реализующие цепочки уравнений на ЭВМ

Наша конечная цель заключается в вычислении поля коэффициента фильтрации $K(x,y,z)$ при наличии приближенных значений $K^{(0)}(x,y,z)$, полученных путем наблюдений и измерений.

Пусть процесс приближенно описывается с помощью краевой задачи (1.1) и (1.2) при приближенных значениях $K(x,y,z) \approx K^{(0)}(x,y,z), f(x,y,z) \approx f^{(0)}(x,y,z)$ и т.д. Решая задачу (1.1), (1.2) при заданных значениях этих параметров, вычислим поле напорной функции $u^{(0)}$. Цепочки представленных уравнений показывают, что для этой цели удобным будет метод конечных элементов (МКЭ).

Итак, для численной реализации краевой задачи (1.1), (1.2) с помощью МКЭ, область V разбивается на m тетраэдральных элементов. Пусть количество узлов будет n. Тогда решение краевой задачи ищется в виде

$$u_n(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n} u_i N_i(x,y,z), \tag{5.1}$$

где $u_i=u(x_i,y_i,z_i)$ – неизвестные коэффициенты, $N_i(x,y,z)$ – линейные базисы в МКЭ.

С помощью обобщенного метода Галеркина краевая задача (1.1), (1.2) представляется в виде

$$\iiint_V N_j(x,y,z)(Lu_n - f)dV = -\iint_\Sigma N_j(x,y,z)(lu_n - \alpha)d\sigma, \tag{5.2}$$

$j=1,2,...,n.$

Используя формулу Грина, в (5.2) приходим к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{gathered}\iiint_V K\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x}+\frac{\partial u_n}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}+\frac{\partial u_n}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}\right)dV+\iint_\Sigma N_i\,\beta\, u_n d\sigma=\\ =\iiint_V N_j f(x,y,z)dV+\iint_\Sigma N_j\alpha(x,y,z)d\sigma,\quad j=1,2,...,n.\end{gathered} \tag{5.3}$$

СЛАУ размерности $n\times n$ относительно n искомых коэффициентов u_i из (5.3) дает возможность вычислить u_i $(i=1,2,...,n)$, т.е. построить поле функции $u_n(x,y,z)$, тем самым будет построено нулевое приближение $u^{(0)}$ искомой функции $u(x,y,z)$. Приближенное решение краевой задачи (1.1) и (1.2) будет слабым (или обобщенным) решением, удовлетворяющим заданным условиям гладкости для известных параметров.

Совершенно аналогично из краевой задачи (1.3), (1.4) можно вычислить поле сопряженной функции u^* . Процедуру, вычисляющую поля функций u и u^* при заданных краевых условиях, назовем первыми двумя шагами при идентификации коэффициента $K(x,y,z)$ краевых задач соответственно.

Третий шаг вычислительной процедуры состоит из вычисления вариаций δu из (2.3) и (2.4) при заданных δf и $\delta\alpha$. Как видно из постановки, поле вариации δu вычисляется МКЭ совершенно аналогично. С этой целью δu следует искать приближенно в виде

$$\delta u_n=\sum_{i=1}^{n}\delta u_i N_i(x,y,z), \tag{5.4}$$

где $\delta u_i=\delta u(x_i,y_i,z_i)$ – искомый коэффициент.

Теперь несколько слов о характере СЛАУ, полученной с помощью МКЭ. СЛАУ , определяющие неизвестные коэффициенты u_i, u^*_i и δu_i, будут хорошо обусловленными, обладающими симметрией и диагональным преобладанием и легко решаются методом Гаусса или экономичными итерационными методами (типа релаксации и др.).

Следующий шаг вычислительной процедуры связан с вычислением δK . С этой целью, исходя из уравнений (3.1) и (3.2) с учетом (2.1), (2.2) приходим к возмущенному уравнению

$$\delta L u' = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\delta K \frac{\partial u'}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\delta K \frac{\partial u'}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta K \frac{\partial u'}{\partial z}\right) = \delta\tilde{f}, \quad (x,y,z) \in V \qquad (5.5)$$

с возмущенным условием

$$\delta l u' = \delta K \frac{\partial u'}{\partial n} + \delta\beta u' = \delta\tilde{\alpha}, \qquad (x,y,z) \in \sum. \qquad (5.6)$$

D (E E) (E () ....

Oll

Решение задачи (5.5) и (5.6) ищем в виде

$$\delta K_n = \sum_{i=1}^{n} \delta K_i N_i(x,y,z), \qquad (5.7)$$

где $\delta K_i = \delta K(x_i, y_i, z_i)$, i – номер узла.

Используя обобщенный принцип Галеркина, для невязок имеем

$$\iiint_V (\delta L u'_n - \delta f) N_j dV = -\iint_\Sigma (\delta l u'_n - \delta\tilde{\alpha}) N_j d\sigma, \qquad j = 1,2,\dots,n.$$

Подставляя (5.7) в невязки, полученные из (5.5) и (5.6), приходим к СЛАУ размерности $n \times n$ относительно δK_i:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\iiint_V N_i q(u', N_j) dV \right) \delta K_i = \iint_\Sigma u(\delta\tilde{\alpha} - \delta\beta u') d\sigma, \qquad (5.8)$$

где

$$q(u', N_j) = \frac{\partial u'}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial z}\frac{\partial N_j}{\partial z}, \qquad j = 1,2,\dots,n. \qquad (5.9)$$

Матрица системы (5.8) будет разреженной, без симметрии и с частичным диагональным преобладанием. Она при умеренных значениях n (до 200) остается хорошо обусловленной. Поэтому она легко решается с помощью метода Гаусса с выбором главного элемента (либо другими итерационными методами).

Итак, характер некорректности изучаемой краевой задачи в некоторой ослабленной форме проявляется при реализации (5.8). Поэтому при $n>200$ следует проверить матрицу системы на обусловленность с помощью сингулярного разложения *(SVD)* [2] и попытаться найти нормальное решение системы.

Несколько слов о выведенных выше тождествах относительно функций u, u^*, δu и др.

Возвращаемся к тождеству (1.13) с учетом обозначений (1.12). Оно связывает параметры сопряженных уравнений относительно u и u^*.

Достоверность вычисленного поля функции напора u можно проверить путем сопоставления данных наблюдений (измерений). Параметры для них берутся субъективно. Поэтому правильность вычисленных значений u и u^* в зависимости от остальных параметров следует из проверки тождества (1.10). Тождество (2.8) может выполнить аналогичную роль относительно u' и u^*.

Интегральное уравнение (2.13), в принципе, дает возможность вычислить δu. Однако удобнее найти $\delta u_n \approx \delta u$ из (2.3) и (2.4) обобщенным принципом Галеркина, чем из (2.13), а уравнение (2.13) целесообразно использовать для проверки правильности полученного решения δu_n. Относительно δK возникает такая же ситуация. Приближенное решение $\delta K \approx \delta K_n$ вычисляется из (5.8), а (3.8) используется для проверки правильности полученного решения или для останова итерационной процедуры.

Теперь мы подготовлены к завершению предложенной вычислительной процедуры, приводящей к конечной цели – к идентификации коэффициента $K(x,y,z)$ краевой задачи (1.2).

Поскольку решаемая проблема существенно нелинейна, для того чтобы начать итерационную процедуру не выходя из той ветви, в которой мы ищем решение задачи, необходимо задать начальное приближение коэффициента $K^{(0)}$. Для этого в предложенном алгоритме необходимо иметь экспериментальные значения этого коэффициента в r точках:

$$K^{(0)}(x_j, y_j, z_j)=K^э_j, \quad j=1,2,...,r. \tag{5.10}$$

Дополнительное условие (5.10) назовем *внутренним условием* [3].

Шаг 1. Располагая точки (x_j, y_j, z_j), в которых задаются условия (5.10), в узлах сетки построим начальное приближение коэффициента в виде [3]

$$K^{(0)}{}_n(x, y, z)=\sum_{i=1}^{n} K_i^{(0)} N_i(x,y,z), \tag{5.11}$$

где $K_i^{(0)} = K^{(0)}(x_i, y_i, z_i)$, $N_i(x,y,z)$ – линейные базисы в МКЭ. Понятно, что в тех узлах, где задаются условия (5.10), $K_n^{(0)}(x,y,z)$ принимает значение $K_j^э$, а в остальных узлах сетки – средние значения, лежащие между $\min\limits_j K_j^э$ и $\max\limits_j K_j^э$.

Итак, за начальное приближение искомого коэффициента $K(x,y,z)$ принимаем $K_n^{(0)}$ из (5.11) и решая краевую задачу (1.1), (1.2), находим функцию $u_n^{(0)}$ – начальное приближение искомой функции.

Шаг 2. Решив краевую задачу (1.3), (1.4) при том же коэффициенте $K_n^{(0)}$, находим $u_n^{*(0)}$ – начальное приближение сопряженной краевой задачи.

Шаг 3. Решая СЛАУ, вытекающую из (2.3) и (2.4), обобщенным принципом Галеркина находим вариацию δu в виде (5.4) и образуем функцию

$$u'(x,y,z)=u^{(0)}(x,y,z)+\delta u(x,y,z).$$

Шаг 4. При найденных значениях u' и u^* вычислим δK из СЛАУ (5.8). Вариация коэффициента $K(x,y,z)$ ищется в виде (5.7). После нахождения δK образуется первое приближение коэффициента по формуле
$K_n^{(1)}(x,y,z)=K_n^{(0)}(x,y,z)+\delta K_n(x,y,z)$.

Шаг 5. Подставляя $K_n^{(1)}$ в (5.3), находим $u_n^{(1)}$, т.е. повторяем шаг 1. Далее, повторяя шаги 2, 3 и 4, находится $K_n^{(2)}$. По всем n узлам проверяется условие

$$\max_i \left| K_i^{(2)} - K_i^{(1)} \right| < \varepsilon, \tag{5.12}$$

где ε – заданное малое число.

Если выполняется условие (5.12), то на нескольких поперечных сечениях $l_i, l_j, ..., l_s$ потока с учетом работы вертикальных дрен вычисляется расход жидкости по формуле

$$Q_{l_r}^{(1)} = \int_{l_r} K_{n,r}^{(1)} \frac{\partial u_n^{(1)}}{\partial n} ds, \qquad r = i, j, ..., s, \tag{5.13}$$

где n – единичный вектор внешней нормали к цилиндрической поверхности, направленной по течению потока; ds – элементарная длина дуги l_r. Далее проверяется выполнение условия

$$max\left\{\frac{\left|Q_{l_i}^{(1)}-Q_{l_j}^{(1)}\right|}{Q_m^{(1)}},\frac{\left|Q_{l_i}^{(1)}-Q_{l_k}^{(1)}\right|}{Q_m^{(1)}},\dots,\frac{\left|Q_{l_i}^{(1)}-Q_{l_s}^{(1)}\right|}{Q_m^{(1)}}\right\}<\delta. \qquad (5.14)$$

Здесь $Q_m^{(1)}$ – величина, равная максимальному из $\left|Q_{l_i}^{(1)}\right|$, $\left|Q_{l_j}^{(1)}\right|$,..., $\left|Q_{l_s}^{(1)}\right|$; δ – заданное малое число. При выполнении условия (5.14) итерационная процедура останавливается и за поля искомой функции и коэффициента берутся соответственно

$$u(x,y,z)\approx u_n^{(2)}(x,y,z) \text{ и } K(x,y,z)\approx K_n^{(2)}(x,y,z).$$

Если это условие не выполняется, то итерационная процедура продолжается начиная с шага 1 до выполнения условий (5.14).

В работе [3] предложен ряд экономичных алгоритмов, восстанавливающих коэффициент K, но они существенно опирались на специфические свойства математической модели изучаемого объекта и носили частный характер. Изложенная здесь вычислительная процедура требует 1, 5 – 2 раза больше машинного времени и значительную память ЭВМ. Однако она достаточно универсальна, поскольку существенно уменьшает неопределенность, возникающую при формулировке некорректно поставленных задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики.–М.: Наука, 1980.– 455с.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений.–М.: Мир, 1980.–279с.
3. Джаныбеков Ч.Д. Моделирование гидрогеодинамических процессов с применением ЭВМ.–Фрунзе: Илим, 1989.–184с.