УДК 517(075.8)

С. Шарипов, К.С. Шарипов

ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИЯ РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИИ

Для разрывной функции понятие первообразной введено с помощью эквивалентной функции

Исправленная производная недифференцируемой (по Ньютон-Лейбницу) функции дала нам возможность решить задачу первообразной для разрывной функции. Это покажем на непрерывной функции вида

$$C(t)=\begin{cases}\varphi(t), t_0 \le t \le a\\ \psi(t), a \le t \le T\end{cases} \tag{1}$$

$$1.\varphi(a-0)=\psi(a+0)$$

$$2.\varphi'(a-0)\neq\psi'(a+0)$$

Допустим, что непрерывные функции φ(t) и ψ(t) имеют непрерывные производные (по Ньютон-Лейбницу) до требуемого порядка соответственно на отрезках $[t_0,a]и[a,T]$.

Приводим следующие теоремы для производных (исправленных) функций (1) без доказательства.[1-2].

Теорема 1. Справедлива формула

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}}\frac{c(t+\lambda_2)-c(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2}=C'(A,a,t),$$

$$C'(A,a,t)=\begin{cases}\varphi'(t), t_0\le t<a\\ \varphi'(a-0)(1-A)+\psi'(a+0)A, t=a\\ \psi'(t), a<t\le T\end{cases} \tag{2}$$

Эта формула (2) для производной функции (1) получена нами впервые. Из нее при $\lambda_1=\lambda_2$ получим известную производную Шварца (симметричная производная). Функция (1) имеет бесчисленных производных, причем значения этих производных лежат между числами $\varphi'(a-0)$ *и* $\psi'(a+0)$.

Исправленную производную функции (1) в точке t=a можно рассмотреть как линейную функцию вида

$$Z(A)=\varphi'(a-0)(1-A)+\psi'(a+0)A, A\in[0,1]$$

Эта линейная функция при $\varphi'(a-0)\rangle 0, \psi'(a+0)\langle 0$ обращается в ноль в точке

$$A=-\frac{\varphi'(a-0)}{\psi'(a+0)-\varphi'(a-0)}$$

Отсюда следует важный результат для исправленно дифференцируемых функций: если функция (1) достигает в точке $t=a\in(t_0,T)$ локального экстремума, то

$$isC'\left(-\frac{\varphi'(a-0)}{\psi'(a+0)-\varphi'(a-0)},a,a\right)=0.$$

Этот результат является аналогом известной теоремы Ферма.

Теорема 2. Справедлива формула.

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{c'(t+\lambda_2)-c'(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} = C''(A,a,t),$$

$$C'(A,a,t) = \begin{cases} \varphi''(t), t_0 \le t < a \\ \varphi''(a-0)(1-A)+\psi''(a+0)A+[\psi'(a+0)-\varphi'(a-0)]\infty, t=a \\ \psi'''(t), a < t \le T \end{cases} \quad (3)$$

Здесь $A \in [0,1], \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$

Совокупность первых и вторых производных, определенные формулами (2) и (3) являются единственными. Это означает, что нет необходимости введения понятия о других производных для непрерывной функции (1).

Как известно, что если для любого $t \in [t_0, T]$ имеет место равенство

$$F'(t) = f(t) \quad (4)$$

то F(t) является первообразной для заданной функции f(t).

Неопределенный интеграл имеет вид

$$\int c'(A,a,t)dt = c(t)+c, \qquad t\in[t_0,T], \quad (5)$$

где c(t)- функция (1), C- произвольная постоянная. Данный неопределенный интеграл обладает рядом замечательных свойств. Эти свойства неопределенного интеграла (5) исследуются посредством производной определенной формулой (2).

Из неопределенного интеграла (5) выделим интеграл в виде

$$\int_{t_0}^{t} c'(A,a,s) = c(t)-c(t_0), t\in[t_0,T] \quad (6)$$

Этот интеграл лежит в основе доказательства замечательных свойств функции (1): в частности если для функции (1) $C(T)=C(t_0)$, то существует точка $c\in(t_0,T)$, такая, что $C'(A, a, c)=0$. Этот результат является аналогом известной теоремы Ролля.

В силу теоремы 1 правая часть данного интеграла является первообразной для подинтегральной функции $c'(A,a,t)$. В силу этой же теоремы для отдельно взятой производной из совокупности производных (2) правая часть интеграла (6) не может служить первообразной .

Ставим задачу: что мы понимаем под первообразной функцией для отдельно взятой производной функции (1)

Из самой поставленной задачи вытекает идея о том, что мы должны дать формулу для определения отдельно взятой производной функции (1). Возможность определения такой формулы покажем на примере вида

$$C_1(t) = \begin{cases} 0, t_0 \le t \le a \\ t-a, a \le t \le T \end{cases} \quad (7)$$

По формуле(2) ее совокупность первых производных равна

$$C_1'(A,a,t)=\begin{cases}0, t_0 \le t < a,\\ A, t=a,\\ 1, a < t \le T\end{cases} \tag{8}$$

Пусть A=1/2. Тогда отдельная производная из (8) имеет вид

$$C_1'(\frac{1}{2},a,t)=\begin{cases}0, t_0 \le t < a,\\ \frac{1}{2}, t=a,\\ 1, a < t \le T\end{cases} \tag{9}$$

Чтобы решить поставленную задачу восстановить по заданной производной (9) ее первообразную, вычислим интеграл от нее

$$\int_{t_0}^{t} C_1'(\frac{1}{2},a,s)ds, \quad t\in[t_0,T] \tag{10}$$

Применение к нему известного способа интегрирования приведет нас к результату (6), что и не дает решение поставленной задачи.

Нами предложен способ интегрирования интеграла (10), основанный методом исправления. С этой целью построим исправленную функцию для заданной производной (9). Ею является функциональная последовательность вида

$$C_{1_\mu}'(\frac{1}{2},a,t)=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-t)}}, \ t\in[t_0,T] \tag{11}$$

При $\mu\neq 0$ она и есть непрерывная функция.

Она на отрезках $[t_0,\alpha]\subset[t_0,a)u[\beta,T]\subset(a,T]$ сходится равномерно к нулю и единице соответственно.А в точке $t=a$ сходится к 1/2. Поэтому можем написать так [1]

$$C_1'(\frac{1}{2},a,t)=\lim_{\substack{\mu\to 0\\ t\in[t_0,T]}}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-t)}}=\begin{cases}0, t_0 \le t < a,\\ \frac{1}{2}, t=a,\\ 1, a < t \le T\end{cases} \tag{12}$$

Значит, последовательность (11) при $\mu\to 0$ сходится неравномерно на отрезке $[t_0,T]$ к заданной производной (9) функции (7) Если иметь ввиду, что функция (11) является при $\mu\neq 0$ производной (по Ньютону- Лейбницу) от приближения

$$C_{1_\mu}(t)=t-t_0+\mu\ln\frac{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-t)}}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-t_0)}} \tag{13}$$

непрерывной функции (7), то формулу (12) можно написать и так [1]

$$\lim_{\substack{\mu\to 0\\ t\in[t_0,T]}}\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \mu\neq 0}}\frac{C_{1\mu}(t+\Delta t)-C_{1\mu}(t)}{\Delta t}=\begin{cases}0, t_0 \le t < a,\\ \frac{1}{2}, t=a,\\ 1, a < t \le T\end{cases} \tag{14}$$

Отсюда идет мысль о том, что свойства интеграла (10) исследуем посредством интеграла

$$\int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-s)}} ds \tag{15}$$

в сочетании с теорий первообразной, т.е. свойства разрывной функции исследуем как слабый предел от её исправленной непрерывной функции.

Не трудно показать, что

$$\lim_{\mu\to 0} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-s)}} ds = (t-a)C_1'(\frac{1}{2},a,t), \quad t\in[t_0,T] \tag{16}$$

Отсюда следует, что функциональная последовательность (11) сходится слабо при $\mu \to 0$

$$\lim_{\substack{\mu\to 0\\ слабо}} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-s)}} = isC_1'(\frac{1}{2},a,t) \tag{17}$$

В смысле

$$\lim_{\mu\to 0} \int_{t_0}^{t} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-s)}} ds = \int_{t_0}^{t} \lim_{\mu\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-s)}} ds = \int_{t_0}^{t} isC_1'(\frac{1}{2},a,s)ds = (t-a)C_1'(\frac{1}{2},a,t) \tag{18}$$

Это с одной стороны. А с другой стороны

$$\frac{1}{1+e^{\frac{1}{\mu}(a-t)}} \xrightarrow{слабо} \theta(\frac{1}{2},a,t), \mu\to 0, t\in[t_0,T] \tag{19}$$

где $\theta(\frac{1}{2},a,t)$ -обобщённая производная функции (7), в смысле

$$\int_{t_0}^{t} \theta(\frac{1}{2},a,s)ds = (t-a)c_1'(\frac{1}{2},a,t) \quad , \ t\in[t_0,T] \tag{20}$$

Из формул (12), (17) и (19) следует, что

$$C_1'(\frac{1}{2},a,t) = isC_1'(\frac{1}{2},a,t) = \theta(\frac{1}{2},a,t), \ t\in[t_0,T] \tag{21}$$

Известно [3],что $\theta(\frac{1}{2},a,t)$ есть обобщенная функция.

Итак, непрерывная функция (7) имеет единственную совокупность производных (8).

Функция

$$y(t) = (t-a)C_1'(\frac{1}{2},a,t), t\in[t_0,T] \tag{22}$$

называется эквивалентной с функцией (7);её производная вычисляется формулой (14):она является первообразной для разрывной функции (9) в смысле слабой сходимости.

Теперь даём способ построения первообразной в смысле слабой сходимости для отдельно взятой производной функции (1) . Например, при А=1/2 из(2) имеем производную вида

$$C'(\frac{1}{2},a,t)=\begin{cases}\varphi'(t),t_0\le t<a,\\ \frac{1}{2}(\varphi'(a-0)+\psi'(a+0)),t=a,\\ \psi'(t),a,t\le T\end{cases} \tag{23}$$

Легко можно показать, что её первообразной, в смысле слабой сходимости, является функция вида

$$F(t)=\varphi_1(t)+[\psi_1(t)-\varphi_1(t)]C_1'(\frac{1}{2},a,t),t\in[t_0,T], \tag{24}$$

где

$$\varphi_1(t)=\begin{cases}\varphi(t),t_0\le t\le a\\ \varphi(a-0)+\varphi'(a-0)(t-a),a\le t\le T\end{cases}$$

$$\psi_1(t)=\begin{cases}\psi(a+0)+\psi'(a+0)(t-a),t_0\le t\le a,\\ \psi(t),a\le t\le T.\end{cases}$$

Она эквивалентна функции (1).

С одной стороны, первообразная, в смысле слабой сходимости означает, что исправленная производная функции (24) как слабый предел вычисляется по формуле

$$\lim_{\substack{\mu\to 0\\ t\in[t_0,T]}}\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ \mu\ne 0}}\frac{F_\mu(t+\Delta t)-F_\mu(t)}{\Delta t}=isF'(t), \tag{25}$$

и она дает нам для любого $t\in[t_0,T]$, равенство

$$isF'(t)=\varphi_1'(t)+[\psi_1'(t)-\varphi_1'(t)]C_1'(\frac{1}{2},a,t),t\in[t_0,T]. \quad , t\in[t_0,T] \tag{26}$$

Здесь

$$F_\mu(t)=\varphi_1(t)+[\psi_1(t)-\varphi_1(t)]C_{1_\mu}'(\frac{1}{2},a,t).$$

С другой стороны, предельная функция (26) слабого предела (25), как известно [3], является обобщенный функцией, причем эта обобщенная функция (26), в отличие от классической обобщенной функции, определена во всех точках отрезка $[t_0,T]$

Она действует так:

$$\int_{t_0}^{t}isF'(s)cls=\varphi_1(t)+[\psi_1(t)-\varphi_1(t)]C_0'(\frac{1}{2},a,t)-\varphi_1(t_0)t\in[t_0,T]. \tag{27}$$

Эту обобщенную функцию обозначим так F'.

Тогда имеем равенство

$$C'(\frac{1}{2},a,t)=isF'(t)=F',t\in[t_0,T] \tag{28}$$

значит, исправленная производная функция (1) и ее обобщенная производная дает нам отдельную производную (23) функции (1).

Таким образом, непрерывная функция (1) имеет только (и только) производную вида (2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарипов С. Методы решения нерегулярных интегральных уравнений Вольтерра первого рода. Автореф. канд. дис. -Фрунзе 1990.
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Уравнения с разделяющимся переменными в классе разрывных функций //Вестник Иссык-Кульского Университета, №5, 2001г.
3. В.С. Владимиров. Обобщенные функции в математической физике. Наука, 1979г.