УДК 517.97

З.К Иманалиев, Б.Ы. Аширбаев

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДИСКРЕТНЫМИ КВАЗИЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ С КВАДРАТИЧНЫМ КРИТЕРИЕМ КАЧЕСТВА

Показано, что для решения задачи оптимального управления дискретными квазилинейными системами необходимо минимизировать квадратичный функционал. Использованы идеи конструирования нового пространства, для которого рассмотрена система алгебраических управлений.

Рассмотрим задачу оптимального управления (ОУ) для дискретной квазилинейной системы, поведение которой характеризуется разностным возмущенным уравнением

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)U(k) + \mu f(x, U, k) \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$x(0,\mu)=x^0 \tag{2}$$

$$x(N,\mu)=x^1. \tag{3}$$

Требуется минимизировать квадратичный функционал

$$J(x,U)=\sum_{i=1}^{N}\left[x'(i)x(i)+U^2(i-1)\right] \tag{4}$$

при разностно - возмущенных связях (1) - (3).

Предполагая, что задача ОУ системами (1) при $\mu=0$ разрешима, рассмотрим следующую вспомогательную задачу: требуется найти управление $\overline{U}_s(k)=\overline{U}_s(k,\mu)$ для фиксированного $S(S=1,2,...)$, которое переводит систему

$$\overline{x}_s(k+1)=A(k)\overline{x}_s(k)+B(k)U_s(k)+\mu\widetilde{f}_s(k) \tag{5}$$

из начального состояния $\overline{x}_s(0,\mu)=0$ в конечное состояние $\overline{x}_s(N,\mu)=0$, причем достигает своего минимума функционал

$$J_s=\sum_{i=1}^{N}\left[\overline{x}'(i)\overline{x}_s(i)+\overline{U}_s^2(i-1)\right], \tag{6}$$

где

$$\widetilde{f}_1(k)=f(\overline{x}_0,\overline{U}_0,k),\ \widetilde{f}_h(k)=f(\widetilde{x}_{n-1},\widetilde{U}_{h-1},k)-f(\widetilde{x}_{h-2},\widetilde{U}_{h-2},k),$$

$$\widetilde{x}_{h-1}=\sum_{j=0}^{h-1}\overline{x}_j(k),\quad \widetilde{U}_{h-1}(k)=\sum_{j=0}^{h-1}\overline{U}_j(k),$$

$$\widetilde{x}_0(k)=x_0(k),\quad \widetilde{U}_0(k)=\overline{U}_0(k),$$

$\overline{x}_0(k),\overline{U}_0(k)$ – решение задачи (1)-(4) при

$$\mu=0;\ \overline{x}_j(k)=\overline{x}_j(k,\mu),\quad \overline{U}_j(k)=\overline{U}_j(k,\mu),\ j=1,2,...$$

Решение системы (5) записать по формуле (аналог формулы Коши)

$$\overline{x}_s(k)=\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)B(i)\overline{U}_s(i)+\mu\sum_{i=0}^{k-1}\Phi(k,i+1)\bar{f}_s(i)\ , \tag{7}$$

где $\Phi(k,j)$ – переходная матрица системы (1).

При $k=N$ с учетом конечного условия $x_s(N)=0$ из (7) имеем

$$\alpha_s(N,\mu)=\sum_{i=1}^{N}R(N,i)\overline{U}_s(i-1) \tag{8}$$

где

$$R(N,i)=\Phi(N,i)B(i-1),\quad \alpha_s(N,\mu)=\mu\overline{\alpha}_s(N,\mu),$$

$$\bar{\alpha}_s(N,\mu) = -\sum_{i=0}^{N-1} \Phi(N,i+1)\tilde{f}_s(i)$$

Теперь нам следует определить функции $\bar{U}_s(i-1)$ $(s = 1,2,..i = 1,2,..N)$, удовлетворяющие уравнениям (8) при условии, что:

$$J_s = J_s(\bar{x}_s, \bar{U}_s) \to \min_{U_s} \cdot \qquad (9)$$

Для того, чтобы привести задачи (8), (9) к проблеме моментов, подобно непрерывному случаю [1], используем здесь идеи конструирования нового пространства [2], т.е. мы должны представить функционал (6) в виде квадрата нормы управляющей функции $U_s(i-1)$ в некотором новом пространстве.

С учетом (7) и пользуясь формулой преобразования двойной суммы

$$\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k} S(k,i) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{N} S(i,k), \qquad (10)$$

представим функционал (6) в виде

$$J_s = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W(i,j)\bar{U}_s(i-1)U_s(j-1) + \sum_{i=1}^{N} \bar{U}_s^2(i-1) + \sum_{i=1}^{N} g_s(i)\bar{U}_s(i-1) + m_s,$$

$$s = 0,1,2,\ldots \qquad (11)$$

$$W(i,j) = \begin{cases} \sum\limits_{\sigma=i}^{N} B'(i-1)\Phi'(\sigma,i)\Phi(\sigma,j)B(j-1), & \text{i} \geq \text{j}, \\ \sum\limits_{\sigma=j}^{N} B'(i-1)\Phi'(\sigma,i)\Phi(\sigma,j)B(j-1), & \text{i} \leq \text{j}, \end{cases}$$

$$W(i,j) = W(j,i), \quad g_s(i) = 2\mu\sum_{j=i}^{N} \psi'_s(j)\Phi(j,i)B(i-1), \;,$$

$$m_s = \sum_{i=1}^{N} \psi'_s(i)\psi_s(i), \quad \text{s} = 0,1,2,\ldots \quad \psi_s(i) = \mu\sum_{j=0}^{i-1} \Phi(i,j+1)\tilde{f}_s(j),$$

$$s \geq 1, \qquad \psi_0(i) = \Phi(i,0)x^0.$$

Легко убедиться, что матрица $\tilde{W} = \left[W(i,j)\right]_{i,j=\overline{1,N}}$ положительно определенная, симметричная.

Введем следующее скалярное произведение

$$(U_1, U_2) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} W(i,j)U_1(i-1)U_2(j-1) + \sum_{i=1}^{N} U_1(i-1)U_2(i-1), \qquad (12)$$

Этому скалярному произведению соответствует некоторое гильбертово пространство $\tilde{l}_2(0,N)$. Тогда норма элементов из $\tilde{l}_2(0,N)$ будет иметь следующий вид:

$$\|U\|_{\tilde{l}_2(0,N)} = \left\{\sum_{i,j=1}^{N} W(i,j)U(i-1)U(j-1) + \sum_{i=1}^{N} U^2(i-1)\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (13)$$

Уравнение (8) в координатном виде записывается

$$\alpha_{s\nu} = \sum_{i=1}^{N} R_\nu(N,i)\overline{U}_h(i-1) \quad s = 0,1,2,....; \quad \nu = \overline{1,n}. \qquad (14)$$

Теперь для каждого фиксированного ν $(\nu = \overline{1,n})$ нам нужно представить правую часть уравнения (14) в виде скалярного произведения на этом же новом пространстве $\tilde{l}_2(0,N)$.

Для этого рассмотрим следующие системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} W(i,j)P_\nu(j) + P_\nu(i) = R_\nu(N,i), \quad i = \overline{1,N}. \qquad (15)$$

Если число $\lambda = -1$ не является собственным значением матрицы $\tilde{W}$, тогда система алгебраических уравнений (15) имеет единственные решения.

Покажем, что число $\lambda = -1$ не является собственным значением матрицы $\tilde{W}$. Допустим, что $\lambda = -1$ является собственным значением матрицы W,

Тогда существует собственный вектор $P_\nu^0 = \left\{P_\nu^0(1), P_\nu^0(2),...., P_\nu^0(N)\right\}$, соответствующий этому собственному значению $\lambda = -1$, компоненты которого удовлетворяют системе однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} W(i,j)P_\nu^0(j) + P_\nu^0(i) = 0, \quad i = \overline{1,N}. \qquad (16)$$

Умножив обе части каждого $i-$го уравнения системы (16) на $P_\nu^0(i) \neq 0, \quad (i = \overline{1,N})$ и суммируя их от 1 до N, получим:

$$\sum_{i,j=1}^{N} W(i,j)P_\nu^0(i)P_\nu^0(j) + \sum_{i=1}^{N}\left(P_\nu^0(i)\right)^2. \qquad (17)$$

В силу положительной определенности матрицы $\tilde{W}$ такое равенство невозможно. Это противоречит допущению, что $\lambda = -1$ является собственным значением матрицы $\tilde{W}$.

Теперь, подставляя $R_\nu(N,i)$ из соотношения (15) в уравнение (8), получим:

$$\alpha_{s\nu} = \sum_{i,j=1}^{N} W(i,j)P_\nu(i)\overline{U}_s(j-1) + \sum_{i=1}^{N} P_\nu(i)\overline{U}_s(i-1) = (P_\nu, \overline{U}_s) \qquad (18)$$

$$s = 0,1,2,\ldots; \quad \nu = \overline{1,\mathrm{n}}$$

Точно таким же путем функционал (11) преобразуется к виду

$$J_s = (\overline{U}_s, \overline{U}_s) + (q_s, \overline{U}_s) + m_s \tag{19}$$

где $q_s(1), q_s(2), \ldots, q_s(N)$, являются решениями следующей системы алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{N} W(i,j) q_s(j) + q_s(i) = q_s(i), \quad i = \overline{1,N}. \tag{20}$$

Таким образом, в результате задача (8), (9) приводится к следующему:

Определить функции $\overline{v}_s(i-1), (s = 0,1,2 \ldots)$ удовлетворяющие уравнениям

$$d_{s\nu} = (P_\nu, \overline{v}_s), \; s = 0,1,2,..; \; \nu = \overline{1,n} \tag{21}$$

при условии

$$J_h = (\overline{v}_h, \overline{v}_h) \to \min_{v_h} \tag{22}$$

где

$$\overline{v}_s(i-1) = \overline{U}_s(i-1) + \frac{1}{2} q_s(i), \; d_{s\nu} = \alpha_{s\nu} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} R_\nu(N,i) q_s(i),$$

$\nu = \overline{1,n}$.

Решение задачи (21), (22) определяется формулой

$$\overline{v}_s(i-1) = P^T(i) \Delta^{-1}(N) d_s, \quad s = 0,1,2, \ldots; \tag{23}$$

где

$$\Delta(N) = \left[(P_i, P_i) \right]_{i,j=\overline{1,n}}; \; P(i) = \left\{ P(i) \right\}_{k=\overline{1,n}}, \; d_s = \left\{ d_{sj} \right\}_{j=\overline{1,n}}.$$

Из (24) получаем единственным образом значение для $\overline{U}_s(i-1)$:

$$\overline{U}_s(i-1) = P^T(i) \Delta^{-1}(N) d_s - \frac{1}{2} q_s(i), \; s = 0,1,2, \ldots. \tag{24}$$

Для $s = 0$, соответствует решение задачи (1) - (4) при $\mu = 0$.

Таким образом, в результате для каждого S $(S = 0,1,2,..)$ мы получили управление вида (24), разрешающее линейную задачу (5), (6).

Тогда аналогична непрерывному случаю в [1], будет справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА.

Если а) функция $f(x,U,k)$ в некоторой односвязной замкнутой области Q удовлетворяет условие Коши - Липшица [3], б) при $\mu = 0$ система (1) вполне управляема [2], тогда при достаточна малых значениях параметра μ удовлетворяющих неравенству

$$0 \prec \mu \prec \frac{1}{\gamma\nu}, \; \gamma = const, \; \nu = const \tag{25}$$

ряды

$$U(k)=\sum_{s=0}^{\infty}U_s(k), \quad k=0,1,2,..N-1; \tag{26}$$

$$x(k)=\sum_{s=0}^{\infty}\bar{x}_s(k) \tag{27}$$

сходятся равномерно. При этом управление $U(k)$ (26) будет переводить систему (1) (при N шагов дискретности) по траектории $x(k)$ (27) из начального состояния (2) в конечное состояние (3) и отличается от оптимального на величину порядка малости $0(\mu)$, т.е.

$$\left\|U(k)-U^0(k)\right\|_{\tilde{l}_2(0,N)}=0(\mu) \tag{28}$$

Все вышеизложенные процедуры легко обобщаются на случаи $r-$ мерного векторного управления.

Результаты, полученные здесь позволяют решить задачу об аналитическом конструировании регулятора, т.е. построить управление $U(x,k)$, как функцию от фазовых координат $x_i(i=\overline{1,n})$ и дискретного времени k.

Для этого будем считать, что начальные моменты времени $k=k_0=0$ и начальные состояния $\bar{x}_0(0)=\bar{x}^0=x^0$, $\bar{x}_n(0)=\bar{x}_h^0=0$ не заданы и могут оказаться произвольными в пределах $0\le k\le N-\varepsilon-1$

$-\infty\prec\bar{x}_{si}\prec+\infty$, $s=0,1,2,\ldots$; $i=\overline{1,n}$; $0\prec\varepsilon\prec 1$.

Тогда в формуле (24), заменив начальные данные $k=k_0=0$, $\bar{x}^0=x^0$, $\bar{x}_h^0=0$, $\mathrm{h}=1,2,\ldots$ через $k_0=k$, $\bar{x}_0=\bar{x}_s(k)$ $(s=0,1,..)$ получим

$$\overline{U}_s(\bar{x}_s,k)=L(k)\bar{x}_s(k)+F_s(k) \tag{29}$$

При этом векторы $\bar{x}_s(i)$ $(s=0,1,2,\ldots)$ определяется соотношениями

$$\begin{gathered}\bar{x}_h(i)=\Phi(i,k)\bar{x}_h(k)+\sum_{j=k}^{i-1}\Phi(i,j+1)(L(j)\bar{x}_h(j)+F_h(j))+\\+\mu\sum_{j=k}^{i-1}\Phi(i,j+1)\tilde{f}_h(j).\end{gathered} \tag{30}$$

Функции $L(k),F_s(k),s=0,1,\ldots$ определяются через параметров системы (1) При этом векторы $x_s(i),(s=0,1,..)$ записываются в виде

$$\bar{x}_0(i) = \Phi(i,k)\bar{x}_h(k) + \sum_{j=k}^{i-1}\Phi(i,j+1)B(j)(L(j)\bar{x}_0(j) + F_0(j)),$$

$$\bar{x}_k(i) = \Phi(i,k)\bar{x}_h(k) + \sum_{j=k}^{i-1}\Phi(i,j+1)(L(j)\bar{x}_h(j) + F_h(j)) +$$

$$+\mu\sum_{j=k}^{i-1}\Phi(i,j+1)\tilde{f}(j),$$

$$i \geq k+1,\ \ \mathrm{k} = 0,1,2,\ldots,\mathrm{N} - \varepsilon - 1;\ \ i = \overline{1,N};\ \ \ h = 1,2.\ldots.$$

Замечание. При $k = N-1$ управление $U(x,k)$ по обратной связи не существует, чтобы обойти эту трудность вместо момента времени $N-1$ следует взять $N-1-\varepsilon(0 \prec \varepsilon \prec 1)$. Это обеспечивает в последнем шаге дискретности не особенность матрицы $\Delta(N,k+1)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Апышев Д.А., Иманалиев З.К., Аширбаев Б.Ы. Оптимальное управление непрерывными квазилинейными системами с квадратичным критерием качества // Материалы Международной конф. ”Технологии и перспективы современного инженерного образования и производства”. - Бишкек: КТУ им. И. Раззакова, 1999. с.8-12.
2. Красовский Н.Н. Теория управления движением. - М.: Наука, 1968.
3. Атанс М., Фалб П. Оптимальное управление. - М.: Машиностроение, 1968.