МАТЕМАТИКА

УДК 05.13.16

М.У. Мурзакматов, Ж.М. Мамыров

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

В работе рассматривается применение метода квазиобращения к решению начальной обратной задачи для линейного уравнения теплопроводности.

В задачах оптимального управления процессами теплопроводности решаются сопряженные системы дифференциальных уравнений с обратным течением времени, где приходится восстанавливать начальное состояние процесса. Поэтому необходимо иметь устойчивый алгоритм приближенного решения начальной обратной задачи теплопроводности.

В данной работе изучается обратная задача по восстановлению начального условия в одномерном уравнении теплопроводности, для решения которой применяется метод квазиобращения [1].

Пусть U(x,t) – решение уравнения

$$\eta(x)\frac{\partial U}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x)\frac{\partial U}{\partial x}\right]=f(x,t), x\in[0,1], t\succ 0 \qquad (1)$$

с начальным условием $U(x,0)=\xi(x)$ (2)

и с граничными условиями

$$U(0,t)=\varphi_1(t),\ U(1,t)=\varphi_2(t),\quad t>0, \qquad (3)$$

или

$$-K(0)\ \frac{\partial u(0,\ t)}{\partial t}=\varphi_1(t),\ K(1)\ \frac{\partial u(1,\ t)}{\partial x}=\varphi_2(t),\quad t>0 \qquad (4)$$

Условия (1)-(4) однозначно определяют функцию U(x,t) [5].

Пусть заданы T>0 и некоторая функция $\chi(x)$, определенная на [0,1]. Каждой функции $\xi(x)$ поставим в соответствие решение задачи (1)-(4), которое обозначим через $U(x,t;\xi)$.

Тогда интеграл

$$J(\xi)=\int_0^1\left|U(x,T;\xi)-\chi(x)\right|^2 dx \qquad (5)$$

является функционалом от ξ.

Начальная обратная задача теплопроводности состоит в том, чтобы минимизировать функционал $J(\xi)$, когда $\xi(x)$ меняется произвольным образом.

Авторы метода квазиобращения предложили заменить оператор теплопроводности "близким" ему оператором P_ε так, чтобы P_ε был эволюционным оператором и существовала одна и только одна функция U_ε, являющаяся решением уравнения $P_\varepsilon U_\varepsilon = f$, $x\in[0,1]$, $t\in(0,T)$ с начальным условием $U_\varepsilon(x,T)=\chi(x)$, граничными условиями (3) или (4) и некоторыми дополнительными граничными условиями. Тогда можно положить $\xi(x)=U_\varepsilon(x,0)$.

Метод квазиобращения заключается в том, чтобы отыскать оператор P_ε, для которого задача с обратным направлением времени поставлена корректно.

В работе [1] доказано, что следующая задача поставлена корректно:

$$\mu(x)\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right]-\varepsilon\frac{\partial^4 U_\varepsilon}{\partial x_4}=f(x,t), \tag{6}$$

$$U_\varepsilon(x,T)=\chi(x), \tag{7}$$

$$U_\varepsilon(0,t)=\varphi_1(t), U_\varepsilon(1,t)=\varphi_2(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right)(0,t)=\psi_1(t), \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right)(1,t)=\psi_2(t), \tag{8}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&-K\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}(0,t)=\varphi_1(t), K\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}(1,t)=\varphi_2(t),\\ &\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right)(0,t)=\psi_1(t), \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K\frac{\partial U_\varepsilon}{\partial x}\right)(1,t)=\psi_2(t)\end{aligned}\right. \tag{9}$$

Чтобы иметь дело с интегрированием по "возрастающим" t, в задаче (6)-(9) выполним замену переменной t на T-t и вместо U_ε будем искать функцию

$$\mu(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left[K(x)\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right]+\varepsilon\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4}=-f(x,t), \tag{10}$$

$$\vartheta(x,0)=\chi(x), \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta(0,t)=\varphi_1(t), \quad \vartheta(1,t)=\varphi_2(t)\\ &\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)(0,t)=\psi_1(t), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)(1,t)=\psi_2(t),\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

или

$$\left.\begin{aligned}&-K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0,t)=\varphi_1(t), \quad K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}(1,t)=\varphi_2(t),\\ &-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x}\right)(0,t)=\psi_1(t), \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\right)(1,t)=\psi_2(t)\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

$\vartheta(x,t)=U_\varepsilon(x,T-t)$, удовлетворяющую системе.

При численной реализации естественно выбирать ε наименьшим, однако в задачах рассматриваемого вида наблюдается численная неустойчивость при $\varepsilon\to 0$. Поэтому можно рассчитывать только на то, что для каждой задачи существует некоторое оптимальное значение ε.

Система (10)-(13) решается методом конечных разностей [1,2,3]. Для этого заменяем производные разностными отношениями:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \approx \frac{\vartheta^{j} - \vartheta^{j-1}}{\tau}; \quad j = 1,2,...,m;$$

$$\left(K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=x_i} \approx K_i \frac{\vartheta_{i+1} - \vartheta_{i-1}}{2h}; \; i = 1,2,...,n-1;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=x_i} \approx \frac{1}{2h^2}\left[(K_{i+1}+K_i)\vartheta_{i+1} - (K_{i+1}+2K_i+K_{i-1})\vartheta_i + (K_i+K_{i-1})\vartheta_{i-1}\right]; \quad (14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(K\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{x=x_i} \approx \frac{1}{2h^3}\left[K_{i+1}(\vartheta_{i+2} - \vartheta_i) - 2K_i(\vartheta_{i+1} - \vartheta_{i-1}) + K_{i-1}(\vartheta_i - \vartheta_{i-2})\right];$$

$$\left(\frac{\partial^4 \vartheta}{\partial x^4}\right)_{x=x_i} \approx \frac{1}{h^4}(\vartheta_{i+2} - 4\vartheta_{i+1} + 6\vartheta_i - 4\vartheta_{i-1} + \vartheta_{i-2}).$$

В этих формулах производная по t аппроксимируется первым порядком точности, а производные по x – вторым.

Используя формулы (14), напишем для уравнения (10) неявную разностную схему с весом σ=1. Получим пятидиагональную систему алгебраических уравнений:

$$a_i\vartheta^j_{i-2} + b_i\vartheta^j_{i-1} + c_i\vartheta^j_i + d_i\vartheta^j_{i+1} + e_i\vartheta^j_{i+2} = g_i \qquad i = 2,3,...,n-2, \qquad (15)$$

где $a_i = e_i = \varepsilon / h^4$,

$$b_i = \frac{1}{2h^2}(K_{i-1} + K_i) - \frac{4\varepsilon}{h^4},$$

$$c_i = \frac{\mu_i}{\tau} - \frac{1}{2h^2}(K_{i-1} + 2K_i + K_{i+1}) + \frac{6\varepsilon}{h^4}, \qquad (16)$$

$$d_i = \frac{1}{2h^2}(K_i + K_{i+1}) - \frac{4\varepsilon}{h^4},$$

$$g_i = \frac{\mu_i}{\tau}\vartheta^{j-1}_i - f^j_i$$

Следует иметь в виду, что в формулах (14)-(16) и в следующих формулах индекс j относится к временной координате, а индекс i – к пространственной. В дальнейшем для удобства верхний индекс опускаем.

Систему (15) решаем методом прогонки [2,3,4]. Положим

$$\vartheta_i = \alpha_i\vartheta_{i+1} + \beta_i\vartheta_{i+2} + \gamma_i, \qquad i = 0,1,2,...,n-2 \qquad (17)$$

Подставляя (17) в (15), получаем

$$\alpha_i = -\left[(a_i\alpha_{i-2} + b_i)\beta_{i-1} + d_i\right]/P_i,$$

$$\beta_i = -e_i / P_i, \qquad (18)$$

$\gamma_i = -\left[(a_i\alpha_{i-2} + b_i)\gamma_{i-1} + a_i\gamma_{i-2} - g_i\right]/P_i$, где

$$P_i = (a_i\alpha_{i-2} + b_i)\alpha_{i-1} + a_i\beta_{i-2} + c_i, \qquad i = 2,3,...,n-2$$

Аппроксимацию граничных условий рассмотрим для краевой задачи 2-го рода, т.е. для условий (13).

Аппроксимируя производные в этих условиях разностными отношениями, получаем

$$\vartheta_{-1} = \vartheta_1 + \frac{2h}{K_0}\varphi_1, \tag{19}$$

$$\vartheta_{n+1} = \vartheta_{n-1} + \frac{2h}{K_n}\varphi_2, \tag{20}$$

$$\vartheta_{-2} = \frac{1}{2K_0 - K_1}\left[2(K_0 - K_1)\vartheta_0 + K_1\vartheta_2 + 2h(2\varphi_1 + \frac{h^2}{K_0}\psi_1)\right], \tag{21}$$

$$\vartheta_{n+2} = \frac{1}{2K_1 - K_{n-1}}\left[2(K_n - K_{n-1})\vartheta_n + K_{n-1}\vartheta_{n-2} + 2h(2\varphi_2 + \frac{h^2}{K_n}\psi_2)\right], \tag{22}$$

Далее, продолжая линейно функцию K(x) за отрезок [0,1], находим, что

$$K_{-2} = 3K_0 - 2K_1, \qquad K_{n+2} = 3K_n - 2K_{n-1} \tag{23}$$

Подставим значения ϑ_{-1} и ϑ_{-2} из (19) и (21) в (15) при i=0 и решаем (15) относительно ϑ_0. Сравнивая полученное выражение с формулой (17) при i=0, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_0 = A_0(b_0 + d_0), \qquad \beta_0 = A_0\left(\frac{a_0K_1}{2K_0 - K_1} + e_0\right), \\ &\gamma_0 = A_0\left[\frac{2ha_0}{2K_0 - K_1}(2\varphi_1 + \frac{h^2}{K_0}\psi_1) + \frac{2hb_0}{K_0}\varphi_1 - g_0\right], \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$A_0 = \frac{2K_0 - K_1}{2a_0(K_1 - K_0) - c_0(2K_0 - K_1)}$$

Сравнение формул (15) (после подстановки в нее (19)) и (17) при i=1 дает

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 = (b_1\beta_0 + d_1)/A_1, \qquad \beta_1 = e_1/A_1, \\ &\lambda_1 = \left(\frac{2ha_1}{K_0}\varphi_1 + b_1\gamma_0 - g_1\right)/A_1 \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

здесь $A_1 = -(a_1 + b_1\alpha_0 + c_1)$

ϑ_n и ϑ_{n-1} находятся из системы уравнений

$$\vartheta_n = \frac{A_nF_{n-1} - A_{n-1}F_n}{A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n}, \qquad \vartheta_{n-1} = \frac{F_nB_{n-1} - F_{n-1}B_n}{A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n} \tag{26}$$

$$\begin{cases} A_{n-1}\vartheta_{n-1} + B_{n-1}\vartheta_n = F_{n-1}, \\ A_n\vartheta_{n-1} + B_n\vartheta_n = F_n \end{cases}$$

которая получается из (15) при i=n-1 и i=n с помощью формул (20), (22) и (17) при i=n-3 и i=n-2:

В последних формулах использованы следующие обозначения:

$$A_{n-1} = (a_{n-1}\alpha_{n-3} + b_{n-1})\alpha_{n-2} + a_{n-1}\beta_{n-3} + c_{n-1} + e_{n-1},$$

$$B_{n-1} = (a_{n-1}\alpha_{n-3} + b_{n-1})\beta_{n-2} + d_{n-1},$$

$$F_{n-1} = g_{n-1} - (a_{n-1}\alpha_{n-3} + b_{n-1})\lambda_{n-2} - a_{n-1}\gamma_{n-3} - \frac{2he_{n-1}}{K_n}\varphi_2,$$

$$A_n = \left(a_n + \frac{e_n K_{n-1}}{2K_n - K_{n-1}}\right)\alpha_{n-2} + b_n + d_n,$$

$$B_n = \left(a_n + \frac{e_n K_{n-1}}{2K_n - K_{n-1}}\right)\beta_{n-2} + c_n + \frac{2e_n(K_n - K_{n-1})}{2K_n - K_{n-1}},$$

$$F_n = g_n - \left(a_n + \frac{e_n K_{n-1}}{2K_n - K_{n-1}}\right)\gamma_{n-2} - \frac{2hd_n}{K_n}\varphi_2 - \frac{2he_n}{2K_n - K_{n-1}}\left(2\varphi_2 + \frac{h^2}{K_n}\psi_2\right)$$

Разработанный алгоритм проверялся путем сравнения приближенных решений задач, полученных методом квазиобращения, с известными точными решениями этих же задач.

ЛИТЕРАТУРА

1. Латтес Р., Лионс Ж.–Л. Метод квазиобращения и его приложения. –М.: Мир, 1972.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука, 1977.
3. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. –М.: Наука, 1978.
4. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. –М.: Наука, 1973.
5. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972