УДК 05.13.16

М.У. Мурзакматов, Ж.М. Мамыров, К.М. Турдалиев

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ УРОВНЯ ВОДЫ НА СТЕНКЕ СКВАЖИНЫ ЧИСЛЕННЫМИ МЕТОДАМИ

По результатам вычислительных экспериментов производится сравнительный анализ четырех способов определения уровня воды на стенке совершенной скважины .

При численном решении плановых задач фильтрации подземных вод наибольшую трудность представляет нахождение уровня воды на стенке сважины по её дебиту. В работах [I,2] методом сеток экспериментально установлено, что при аппроксимации скважины узловой точкой приближённое решение в этой точке соответствует уровню воды не на стенке действительной скважины, а на стенке некоторой фиктивной скважины с радиусом , равным

$$R_{\Phi} \approx 0.2\,h\,, \qquad (1)$$

где h - шаг сетки. Этот факт теоретически обоснован в [3,4].

Проверка зависимости (1) проводилась конечно-разностным [2] и вариационно-разностным [5] методами. В данной работе приводятся результаты анологичных вычислительных экспериментов по методу конечных элементов.

Пусть рассматривается движение грунтовых вод в однородной среде, описываемое уравнением Буссинеска [6] :

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[k(H-b)\frac{\partial H}{\partial y}\right] = f(x,y,t) \qquad (2)$$

$$(x,y)\in D\,,\quad t>0$$

с начальным

$$H(x,y,0) = H_0(x,y)\,,\quad (x,y)\in D \qquad (3)$$

и граничным

$$k(H-b)\frac{\partial H}{\partial n} = \alpha + \beta H\,,\quad (x,y)\in \partial D\,,\ t>0 \qquad (4)$$

условиями, где $H(x,y,t)$, $b(x,y)$, $k(x,y)$, $\mu(x,y)$, $f(x,y,t)$ - уровень грунтовых вод (УГВ), поверхность водоупора, коэффициент фильтрации, коэффициент свободной водоотдачи или недостатка насыщения, функция вертикального водообмена соответственно; $\alpha=\alpha(x,y,t)$, $\beta=\beta(x,y,t)$ - заданные функции; D- область фильтрации, ∂D - её граница.

Задача (2)-(4) решается методом конечных элементов [7,8], при этом условия на скважинах аппроксимируются криволинейными интегралами, взятыми по контурам скважин.

Заменяя производную по времени разностным отношением и введя обозначение $P=k(H-b)$, перепишем задачу (2)-(4) в виде

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(P\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(P\frac{\partial H}{\partial y}\right) + QH = F\,,\quad (x,y)\in D\,,\quad t>0 \qquad (5)$$

$$H(x,y,0) = H_0(x,y)\,,\quad (x,y)\in D \qquad (6)$$

$$P\frac{\partial H}{\partial n} = \alpha + \beta H\,,\quad (x,y)\in\partial D\,,\ t>0 \qquad (7)$$

где

$$Q(x,y,t)=\mu(x,y)H(x,y,t)/\tau$$

$$F(x,y,t)=f(x,y,t)+\mu(x,y)\check{H}(x,y,t)/\tau$$

где $\overset{\vee}{H}(x,y,t)$- значения функции из предыдущего временного слоя.

Область D разбиваем на треугольные элементы и искомую функцию представим в виде

$$H_n(x,y,t)=\sum_{i=1}^{n} H_i N_i(x,y), \qquad (8)$$

где $N_i(x,y)$ - линейные базисные функции,

$H_i=H(x_i,y_i,t)$ - узловые значения искомой функции.

Подставляя в задаче (5)-(7) вместо H функцию H_n из формулы (8), по обобщенному принципу Галеркина получаем

$$\iint_D N_j(LH_n-F)d\sigma = -\int_{\partial D} N_j(lH_n-\alpha)ds, \qquad (9)$$

$$j=1,2,3,...,n,$$

где L -оператор уравнения (5), l- оператор граничного условия (7).

Из соотношений (9) получаем систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $H_1,H_2,...,H_n$. Матрица полученной системы будет разреженной; положительно определенной и симметричной с диагональным преобладанием. Решая систему методом Гаусса, получаем первое приближение $H_i^{(1)}$. Подставляя эти значения в выражение для P и повторяя процедуру, получаем следующее приближение и т.д. Процесс продолжаем до выполнения условия

$$\max|H_i^{(\nu+1)}-H_i^{(\nu)}|<\varepsilon,$$

где ν - номер итерации, $\varepsilon>0$ - заданная величина.

После выполнения этого условия переходим к следующему временному слою.

После определения УГВ в узлах сетки значение искомой функции в узле со скважиной принимается за уровень воды на контуре фиктивной скважины и решается задача нахождения уровня воды на стенке действительной скважины и в ее окрестности. Задача сводится к интегрированию одномерного уравнения

$$\mu\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[rk(H-b)+\frac{\partial H}{\partial r}\right]=f(r,t), \quad r_c \le r \le R_\Phi, \qquad (10)$$

с граничными

$$H(R_\Phi,t)=\tilde{H}, \qquad 2\pi rk(H-b)\frac{\partial H}{\partial r}=-q, \qquad r=r_c \qquad (11)$$

условиями , где $\tilde{H}$-решение задачи (2)-(4) в рассматриваемом узле ;

r_c - радиус скважины, q- ее дебит; R_Φ- радиус фиктивной скважины.

Для иллюстрации приведенной методики решена задача о неустановившемся притоке грунтовых вод к центральной совершенной скважине, работающей с постоянным дебитом q в однородной пористой среде, круговой в плане (радиус R_k). В области $r_c \le x^2+y^2 \le R^2_k$ интегрируется уравнение (2) с постоянным граничным условием $H(x,y,t)=250$ м, $x^2+y^2=R^2_k$ при следующих параметрах:

$H(x,y,0)=250$ м ; $k=5$ м/сут ; $\mu=0{,}05$;

$R_k=2500$ м ; $q=4000$ м/сут; $f=0$ м/сут;

r_c=0,1 м; Δ t=3 сут.

Прежде всего следует выяснить достоверность результатов, получаемых при решении задачи (5) - (6) с тем, чтобы можно было сравнивать с ними результаты двумерной задачи.

В таблице 1 показаны понижения УГВ на разных расстояниях от скважины через определенные промежутки времени.

В числителях дробей записаны понижения, вычисленные по формуле Боултона [6] :

$$S=\frac{q}{\pi k h_l} V(\tilde{r},\tilde{t}) \qquad (12)$$

где S - понижение УГВ ;

h_l - 250 м (глубина воды до начала откачки) ;

$\tilde{r} = r/h_l$; $\tilde{t} = kt/(\mu h_l)$;

- функция $V(\tilde{r},\tilde{t})$ табулирована Боултоном ;

-в знаменателях - понижения, полученные путем решения задачи (10) - (11) с вышеприведенными параметрами.

Таблица 1

Понижения УГВ в прискважинной зоне

Время, сут.	Расстояние от скважины, м					
	50	100	150	200	250	375
2.5	$\frac{0.38}{0.25}$	$\frac{0.13}{0.10}$	$\frac{0.10}{0.04}$	$\frac{0.07}{0.02}$	$\frac{0.04}{0.01}$	$\frac{0.02}{0.00}$
12.5	$\frac{0.94}{0.89}$	$\frac{0.60}{0.56}$	$\frac{0.42}{0.39}$	$\frac{0.30}{0.27}$	$\frac{0.23}{0.19}$	$\frac{0.11}{0.08}$
62.5	$\frac{1.42}{1.41}$	$\frac{1.07}{1.06}$	$\frac{0.86}{0.86}$	$\frac{0.72}{0.72}$	$\frac{0.61}{0.61}$	$\frac{0.42}{0.42}$

Из таблицы 1 видно, что численное решение задачи (10) - (11) очень мало отличается от аналитического решения, а при t>60 сут. совпадает с ним.

В таблице 2 показаны понижения УГВ на стенке скважины, полученные четырьмя разными способами:

1) решением задачи (2) - (4) конечно-разностными схемами с симметризацией (строка 1) ;
2) решением задачи (10) ,(11) ;
3) решением задач (2) - (4) по методу конечных элементов;
4) по формуле из [6] в виде:

$$S=\frac{q}{2\pi k h_{cp}} \ln\frac{R}{r_c}, \qquad (13)$$

где $R = 1.5\sqrt{at}$ - радиус влияния скважины, $a = kh_{cp}/\mu$;

h_{cp} - некоторая средняя мощность водоносного пласта в течение всего периода откачки.

В работе [6] рекомендуется брать $h_{cp} \approx (0.7-0.8)h_l$.

В таблице 2 приведены расчеты для случаев $h_{cp}=0.8$, $h_l=200$ м и $h_{cp}=h_l=250$ м;

Таблица 2

Понижения УГВ на стенке скважины, м.

Варианты расчета.	Время, сут						
	3	30	60	90	120	150	180
1	2.01	4.09	4.59	4.88	5.07	5.21	5.25
2	2.64	4.47	4.59	4.71	4.79	4.85	4.90
3	2.72	4.54	4.65	4.77	4.86	4.93	4.97
4 а)$h_{cp}=250$	4.24	4.82	5.00	5.10	5.18	5.23	5.28
б)$h_{cp}=200$	5.23	5.96	6.18	6.31	6.40	6.47	6.53

Как видно из таблицы 2, результаты решения задачи (2) - (4) по симметризованной схеме с весом $\sigma = 1$ (1 вариант), решение той же задачи по методу конечных элементов (вариант 3) и решение по формуле (13) при $h_{cp}=h_l$ (вариант 4а)) для $t \geq 30$ сут отличаются не более, чем на 8% от результатов решения задачи (10),(11) (вариант 2), которое можно принять за точное решение. Но уравнение (10) и формула (13) могут быть использованы для определения уровня воды на скважине лишь в осесимметричных течениях. Поэтому при исследовании плановых потоков подземных вод для этой цели целесообразно применять двумерное уравнение (2) в сочетании с зависимостью (1).

Выводы

В двумерных задачах фильтрации уровень воды на стенке скважины можно находить путем решения задачи (2)-(4) вариационно-разностным методом по симметризованной схеме с весом $\sigma = 1.0$ и МКЭ.

Предлагаемая методика может быть применена и в случае слоистых пластов.

Результаты экспериментов показывают, что в случае притока воды к скважинам в пластах, имеющих большую мощность и площадь распространения, значение параметра h_{cp} в формуле (13) целесообразно брать равным h_l.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вахитов Г.Г. Эффективные способы решения задач разработки нефтеводоносных пластов методом конечных разностей. - М.: Гостехиздат, 1963.
2. Абуталиев Ф.Б. и др. Методы математического моделирования гидрогеологических процессов. - М.: Недра, 1972.

3. Андреев В.Б., Крявкина С. А. О функции источника сеточного оператора Лапласа. // Журнал вычислительной математики и математической физики , 1972,12, № 2 , с. 364 - 373.
4. Андреев В.Б., Крявкина С. А. Аппроксимация задачи о совершенной скважине . В сб.: “ Исследование по теории разностных схем для эллиптических и параболических уравнений .” - М.: Издательство МГУ, 1973.
5. Мурзакматов М.У. К вопросу определения уровня воды на стенке скважины . В сб.” Вопросы водного хозяйства . Вып. 44 ”.- Фрунзе : ВНПО “Союзводавтоматика”, 1977.
6. Бочевер Ф.М. и др. Основы гидрогеологических процессов. - М.: Недра, 1969.
7. Джаныбеков Ч. Д. Математическое моделирование движения грунтовых вод в многослойных средах. - Фрунзе: Илим , 1982.
8. Мурзакматов М.У. Об одном численном методе решениия задач фильтрации жидкости. В сб. “Вопросы водного хозяйства. Вып. 38”. - Фрунзе : ВНПО “Союз водавтоматика” , 1977.