УДК 05.13.16

М.У. Мурзакматов, Ж.М. Мамыров, Б.А. Байболотов

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ ИДЕНТИФИКАЦИИ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Рассматривается задача определения поля напоров и водопроводимости пласта с использованием дополнительной информации о значениях искомых функций внутри области.

Плановая стационарная напорная фильтрация подземных вод описывается дифференциальным уравнением

$$L(H) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial y}\right) + QH = f, \quad (x,y)\in D, \qquad (1)$$

с краевым

$$T\frac{\partial H}{\partial n} = \alpha + \beta H, \quad (x,y)\in\Gamma \qquad (2)$$

и дополнительными внутренними условиями

$$H(x_S, y_s) = H_S^{э}, \quad (x_S, y_s) \in R_{q_1}, \quad s=1,2,...q_1, \qquad (3)$$

$$T(x_S, y_s) = T_S^{э}, \quad (x_s, y_s) \in Q_{q_2}, S = 1,2,...,q_2, \qquad (4)$$

где Q=Q(x,y), $\alpha=\alpha(x,y)$, $\beta=\beta(x,y)$-заданные функции; T(x,y)- неизвестный коэффициент водопроводимости пласта; H(x, y) - искомая функция напора; $H^Э$ и $T^Э$- заданные с помощью наблюдении величины; D- область фильтрации, Г-ее граница, а f= f(x, y, H_0, H_1) — функция, учитывающая влияние напоров на верхних (H_0) и нижних (H_1) слабопроницаемых прослойках, а также источников и стоков, расположенных в D.

Требуется построить поля функции напора H и коэффициента водопроводимости пласта T в области D с точностью, согласованной с точностью наблюдений.

В работе [1] предложен алгоритм приближенного решения поставленной задачи. Задача решается методом конечных элементов с применением обобщенного принципа Галеркина.

Область D разбивается на треугольные элементы с таким расчетом, чтобы точки областей R_{q_1} и Q_{q_2} (эти области состоят из дискретных точек) совпадали с узлами сетки. Итерационная процедура строится следующим образом.

Слабое решение задачи (1) , (2) с внутренним условием (3) ищется обобщенным методом Галеркина в виде

$$H_n(x,y)=\sum_{i=1}^{n} H_i\Phi_i(x,y), \quad H_i = H(x_i \quad y_i) \tag{5}$$

при приближенно заданной функции

$$T_m(x,y)=\sum_{i=1}^{m} T_i\ N_i(x,y), \quad T_j = T(x_i,y_i)\,. \tag{6}$$

Здесь Φ_i (x, y) - квадратичные, N_i(x,y) - линейные базисные функции в треугольных элементах e_i.

В качестве нулевого приближения берется функция

$$T_m^{(0)}(x,y)=\sum_{i=1}^{m} T_i^{(0)} N_i(x,y). \tag{6`}$$

В тех узлах (x_i,y_i) сетки, где задаются внутренние условия (4), полагаем

$T_m^{(0)}(x_i,y_i)=T_i^{э}$ (т.к. $N_i(x_i,y_i)=1$ и $N_i(x_j,y_j)=0$ при i≠j),

а в остальных узлах T_m(x_i,y_i) присваиваются субъективные значения согласно неравенству $T_{\min}\le T_i^{(0)}\le T_{\max}$. Тем самым мы приходим к корректно поставленной краевой задаче (1), (2) с внутренним условием (3).

Приближенное решение этой задачи ищем в виде

$$H_n^{(1)}(x,y)=\sum_{i=1}^{n} H_i^{(1)}\Phi_i(x,y)\,. \tag{5`}$$

Согласно обобщенному принципу Галеркина имеем

$$\iint_D\left[L\left(H_n^{(1)}\right)-f\right]N_j\,dxdy=-\int_{\Lambda}\left[T_m^{(0)}\frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial n}-\alpha-\beta H_n^{(1)}\right]N_j\,ds\ , \tag{7}$$

$$j=1,2,\ldots,n\text{-}q, \quad q<q_1.$$

Количество значений неизвестных коэффициентов фильтрации в q_{S1} узловых точках из (5`) уменьшится. Вследствие этого в узлах (x_i, y_i), где задано условие (3), значения функции T_S будут известны, т.е.

Применение к двойному интегралу первой формулы Грина дает

$$\iint_D L\left(H_n^{(1)}\right) N_j dxdy = \iint_D N_j \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(T_m^{(0)} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T_m^{(0)} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial y} \right) \right] dxdy =$$
$$= \iint_D T_m^{(0)} \left(\frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dxdy - \int_{\tilde{A}} N_j T_m^{(0)} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial n} ds. \tag{8}$$

Из (7) с учетом (8) приходим к системе n-q_{S1} уравнений (здесь q_{S1}- количество узловых точек из R, где использованы внутренние условия):

$$\iint_D T_m^{0} \left(\frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dxdy + \iint_D Q\, H_n^{(1)} N_j dxdy -$$
$$- \int_{\tilde{A}} N_j \beta H_n^{(1)} ds = \iint_D f\, N_j dxdy + \int_{\tilde{A}} \alpha\, N_j ds, \quad j=1,2,\ldots,n-q. \tag{9}$$

После подстановки вместо $H_n^{(1)}$ ее разложения (5`) окончательно получаем

$$\sum_{i=1}^{n-q} a_{ji} H_i^{(1)} = b_j, \quad j=1,2,\ldots,n\text{-}q, \tag{10}$$

где

$$a_{ji} = \iint_D T_m^{(0)} \left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dxdy +$$
$$+ \iint_D Q\, N_i N_j dxdy - \int_{\tilde{A}} \beta\, N_i N_j ds,$$

$$b_j = \iint_D f\, N_j dxdy + \int_{\tilde{A}} \alpha\, N_j ds$$

Матрица системы (10) является симметричной и ленточной с диагональным преобладанием, т.е. хорошо обусловленной, что обеспечивает единственность решения системы. Эта система легко решается методом Гаусса. Подставляя в (5`) найденные значения $H_i^{(1)}$ в n-q точках и используя внутренние условия (3) в остальных q точках, получаем полную сумму, которая берется за первые приближение искомой функции (5).

Следующий шаг алгоритма уточняет значение функции $T_m(x,y)$ из (6). Полагая функцию $H \approx H_n^{(1)}$ в уравнении (1) известной, на основе обобщенного принципа Галеркина получаем систему уравнений

$$\iint\limits_D \left[L\left(T_m^{(1)}\right) - f\right] N_j \, dxdy + \gamma \iint\limits_D \left|T_m^{(1)} - T^{\acute{y}}\right| N_j \, dxdy =$$
$$= -\int\limits_{\tilde{A}} \left[T_m^{(1)} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial x} - \beta H_n^{(1)} - \alpha \right] ds, \qquad j=1,2,..,m, \qquad (11)$$

где γ-заданное положительное число (штраф). Здесь должно выполняться условие

$$\iint\limits_D \left|T_m^{(1)} - T^{\acute{y}}\right| N_j \, dxdy > 0, \qquad (12)$$

т.е. в узлах, где имеет место (6), отбор значений $T_m^{(0)}(x_j, y_j) = T_{m\,j}^{(0)}$ следует производить с учетом условия (12).

Подставляя вместо $T_m^{(1)}$ ее выражение из (6), приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно $T_j^{(1)}$:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ji} T_j^{(1)} = d_j, \qquad j = 1,2,..,m, \qquad (13)$$

где

$$c_{ji} = \iint\limits_D \left(\frac{\partial N_j}{\partial x} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial N_j}{\partial y} \frac{\partial H_n^{(1)}}{\partial y} \right) dxdy + \gamma \iint\limits_D N_j N_i \, dxdy,$$

$$d_j = \iint\limits_D \left(f - \varrho H_n^{(1)}\right) N_j \, dxdy + \int\limits_{\tilde{A}} \left(\alpha + \beta H_n^{(1)}\right) N_j \, ds - \gamma \iint\limits_D T^{\acute{y}} N_j \, dxdy.$$

На следующей итерации решается система (10) при $T_m(x,y) = T_m^{(1)}(x,y)$ и проверяются условия

$$\sum_{i=1}^{m} \left(T_{m,i}^{(1)} - T_{m,i}^{(0)} \right)^2 < \varepsilon \qquad (14)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \left(H_{n,i}^{(1)} - H_i^{\acute{y}} \right)^2 < \delta, \qquad (15)$$

где ε и δ - заданные малые положительные числа. Если не выполняется хотя бы одно из условий (14) и (15), находятся следующие приближения $H_n^{(2)}$ и $T_n^{(2)}$ и т.д. При выполнении обоих условий итерационная процедура останавливается и за искомое решение берутся функции

$$H(x,y) \approx H_n^{(\nu)}(x,y) \quad \text{и} \quad T(x,y) \approx T_m^{(\nu)}(x,y)$$

где ν-номер итерации.

Матрица системы (13) квадратная и несимметричная, причем при большом m она может оказаться плохо обусловленной. Введение параметра γ должно улучшить характеристику матрицы, потому что он предназначен для обеспечения диагонального преобладания. В таком случае система (13) также может быть решена методом Гаусса. Если параметр γ не обеспечивает диагональное преобладание, то недиагональные слагаемые, содержащие этот параметр, можно перенести в правую часть системы, считая значения искомой функции, найденные из предыдущей итерации, известными. Но такого рода действия могут внести дополнительную погрешность в решение задачи. Кроме того, погрешности в исходных данных (условия (3) и (4)) и погрешности вычислений могут привести к плохо обусловленной системе. Поэтому предпочтительнее искать нормальное решение системы (13) [2], минимизирующее невязку $|CT^{(\nu)}-D|$, которое находится методом сингулярного разложения матрицы [3].

Суть данного алгоритма заключается в том, что матрица C может быть факторизована в виде

$$C=U\Lambda V^T, \qquad (16)$$

где U и V - ортогональные матрицы, Λ - матрица с элементами λ_{ij}, $\lambda_{ij}=0$ при $i \neq j$, $\lambda_{ii} = \lambda_i$ сингулярные числа матрицы C. Подставляя (16) в (13) и учитывая свойство ортогональных матриц, приходим к системе уравнений

$$\Lambda V^T \beta^T = U^T b^T \ , \qquad (17)$$

из которой легко найти искомое решение β. В случае плохо обусловленной системы, т.е. когда имеются $\lambda_i \approx 0$, нормальное решение отыскивается путем обнуления компонентов вектора $V^T\beta^T$, которые соответствуют нулевым сингулярным значениям.

Примечания:

Вместо условий (4) можно задавать

а) либо интенсивность потока

$$T\frac{\partial H}{\partial n}(x,y) = q^{Э}, \qquad (x,y)\in\Gamma_q,$$

б) либо условие

$$q = -\int_{\Gamma_q} T\frac{\partial H}{\partial n}ds,$$

где $q^Э$ - заданная величина, q- заданный единичный расход, Гq-кусочно-гладкая кривая, пересекающая область течения от одной крайней линии тока до другой.

в) вместо условий (14) и (15) могут использоваться другие условия, например, условие (15) может быть заменено условием

$$\left|L\left(H_n^{(\nu)},T_m^{(\nu)}\right)-L\left(H_n^{(\nu-1)},T_m^{(\nu-1)}\right)\right|<\delta,$$

а условие (14) -условием

$$\max_r\left|\left(T_{m,r}^{(\nu)} - T_{m,r}^{(\nu-1)}\right):T_{m,r}^{(\nu)}\right| < \varepsilon, \qquad (18)$$

где ν - номер итерации, $T^{(v)}_{m,r}=T^{(v)}_{m}(x_r,y_r)$. Если имеет место (18), то вычисляется расход жидкости, просачивающейся через различные цилиндрические поверхности с направляющими l_i, l_j и l_k, соединяющие одни и те же крайние линии тока в области D, после чего проверяется выполнение условия

$$\max\left\{\frac{\left|Q^{(v)}_{l_i}-Q^{(v)}_{l_j}\right|}{Q^{(v)}_{m}},\frac{\left|Q^{(v)}_{l_i}-Q^{(v)}_{l_k}\right|}{Q^{(v)}_{m}},\frac{\left|Q^{(v)}_{l_j}-Q^{(v)}_{l_k}\right|}{Q^{(v)}_{m}}\right\}<\delta,$$

где $Q^{(v)}_{m}=\max\left\{\left|Q^{(v)}_{l_i}\right|,\left|Q^{(v)}_{l_j}\right|,\left|Q^{(v)}_{l_k}\right|\right\}$,

$Q^{(V)}_{l_r}$ — величина расхода жидкости, просачивающейся через поверхность с направляющей l_r, которая вычисляется по формуле

$$Q^{(v)}_{l_r}=-\int_{l_r}T^{(v)}_{m,r}\frac{\partial H_n}{\partial n}ds.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Джаныбеков Ч.Д. Моделирование гидрогеодинамических процессов с *применением ЭВМ. -Фрунзе: Илим, 1989.*
2. Тихонов А.Н. Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. -М.: Наука, 1979.
3. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. -М.: Мир, 1980.