МАТЕМАТИКА

УДК 511.6

М. А. Эркинбаев

ДИОФАНТОВОЕ УРАВНЕНИЕ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГЕОМЕХАНИКИ

В работе дается доказательство неразрешимости одного из классов диофантовых уравнений с двумя неизвестными в рациональных числах, а также их приложения в теории чисел и некоторых задачах геомеханики.

Общие методы решения диофантовых уравнений с двумя неизвестными $a_0x^n + a_1y^{n-1} + \ldots + a_ny^n = c$ в рациональных числах X и У почти не разработаны. Проблема решения уравнения в целых и рациональных числах решена до конца только для уравнений второй степени с двумя неизвестными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более неизвестными весьма трудна не только задача нахождения всех решений в целых и рациональных числах, но даже и более простая задача установления существования конечного или бесконечного множества таких решений. В этой статье изложены некоторые основные результаты, полученные в теории решения уравнений в рациональных числах. Рассмотрим один из классов диофантовых уравнений вида

$t^p - s^p = 1$ (1) p - простые числа больше двух.

Теорема: Диофантовое уравнение $t^p - s^p = 1$ (p - простые числа больше двух) не имеет решения в рациональных числах.

Доказательство: Докажем, используя метод от противного, что данное уравнение имеет корни в рациональных числах $t^p - s^p = 1$. Теперь перепишем уравнение в следующем виде:

$(t - s)(t^{p-1} + t^{p-2}s + \ldots + ts^{p-2} + s^{p-1}) = 1$. Так как t и s -рациональные числа, то их разность - тоже рациональное число $t-s=m/n$, причем m и n - взаимно простые числа. Тогда $t^{p-1} + t^{p-2}s + \ldots + ts^{p-2} + s^{p-2} = n/m$ m и n целое число.

$$mt^{p-1} + mt^{p-2}s + \ldots + mts^{p-2} + ms^{p-1} = n \quad (2)$$

Исследуем уравнение вида (2). По предположению уравнение должно иметь решение в рациональных числах. Но по теореме Туе такое уравнение имеет только конечное число решений в целых числах. Формулировка теоремы Туе : Если $f(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$ неприводимый над полем рациональных чисел многочлен с целыми коэффициентами степени $n\geq3$, то при любом целом $B\neq0$ уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}y+\ldots+a_n y^n=B$ не может иметь бесконечное множество решений в целых числах, так как уравнение $mt^{p-1} + mt^{p-2}s + \ldots + mts^{p-2} + ms^{p-2} = n$ удовлетворяет условию теоремы Туе, т.е. $f(z)=mz^{p-1} + mz^{p-2} + \ldots + mz + m$ неприводимый над полем рациональных чисел.

Доказательство неприводимости многочлена: $f(z)=mz^{p-1} + mz^{p-2} + \ldots + mz + m$ $f(z)=0$, т.е. рассмотрим уравнение

$mz^{p-1} + mz^{p-2} + \ldots + mz + m = 0$ (3) $m(z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1) = 0$, так как $m\neq0$, получаем $z^{p-1} + z^{p-2} + \ldots + z + 1$ пусть $z=k+1$ $k\neq0$ рациональное число

$(z^p-1)/(z-1)=0$ $((k+1)^p-1)/(k+1-1)=0$ $(k^{p-1}+c^1{}_pk^{p-1}+\ldots+c^{p-2}{}_p+c^{p-1}{}_p+1-1)/k=0$

$(k^{p-1}+c^1{}_pk^{p-1}+\ldots+c^{p-2}{}_p+c^{p-1}{}_p)/k=0$ $(k^{p-1}+c^1{}_pk^{p-1}+\ldots+c^{p-2}{}_p+c^{p-1}{}_p) = 0.$

Полученное уравнение по критерию Эйзенштейна - неприводимое над полем рациональных чисел, т.е. не имеет рациональных корней. Отсюда и уравнение $z^{p-1}+z^{p-2}+...+z+1=0$ не имеет корней в рациональных числах. Это означает, что уравнение (3) неприводимое над полем рациональных чисел.

Если по теореме Туе $mt^{p-1}+mt^{p-2}s+...+mts^{p-1}=n$ имеет конечное число решений в целых числах t и s. По нашему предположению t,s - рациональные числа, причем оба в виде несократимой дроби. Это противоречие доказывает, что уравнение вида (2) не имеет решения в рациональных числах.

Неразрешимость одного из классов диофантовых уравнений с двумя неизвестными в рациональных числах имеет не только теоретический интерес. Такие уравнения иногда встречаются в физике, используются в решении некоторых задач геомеханики. Теоретический интерес неразрешимости диофантовых уравнений в рациональных числах достаточно велик, так как эти уравнения тесно связаны со многими проблемами теории чисел.

Вышедоказанную теорему можно использовать в доказательстве великой теоремы Ферма. Пьер Ферма высказал утверждение, что уравнение $X^n+Y^n=Z^n$ при целом n> 2 не имеет решений в целых положительных числах X,Y,Z. Значение теоремы Ферма для математики в том, что при попытке ее доказательства были, выкованы новые мощные средства, приведшие к созданию обширного отдела математики - так называемой «теории алгебраических чисел». Тот факт, что до сих пор теорема Ферма не доказана, по-видимому, указывает на необходимость еще более мощных и утонченных методов. В настоящее время многие специалисты твердо уверены в невозможности доказать теорему Ферма элементарными методами.

В 1847 году Ламе объявил, что ему удалось найти доказательство теоремы Ферма для всех простых показателей $n\geq3$. Метод Ламе представлял собой весьма далекое развитие идей Эйлера и основывался на арифметических свойствах чисел вида $a_0+a_1\xi+\ldots+a_{n-2}\xi^{n-2}$, (*) где $a_0, a_1,\ldots,a_{n-2}$ -целые числа, а

$\xi=\cos(2\pi/n)+i\sin(2\pi/n)$ -первообразный корень n-й степени из1.

Однако сразу же Лиувилль обнаружил в рассуждениях Ламе серьезный пробел, заключающийся в том, что Ламе без доказательства предполагал, что числа вида (*), подобно обыкновенным целым числам, единственным образом разлагаются в произведение простых (далее неразложимых) чисел. Ламе был вынужден признать свою ошибку. Пока во Франции происходили эти события, в Германии молодой математик Куммер упорно занимался теоремой Ферма. Вскоре Куммер уже знал, что теорема о единственности разложения на простые множители для чисел вида (*) неверна, и искать ее доказательство бессмысленно. В этой ситуации он нашел замечательный выход, который прославил его и породил целый ряд разделов современной алгебры. Этот выход состоял в том, что Куммер добавил к числам (*) еще некие новые, несуществующие числа, которые он назвал «идеальными» и для которых свойство единственности разложения на простые множители восстанавливается.

$Y^p=Z^p-X^p$ p – простое число, p>2. Если ни одно из чисел X,Y,Z не делится на p, то это утверждение называется **первым случаем теоремы Ферма;** когда хотя бы одно из этих чисел делится на p - **второй случай теоремы Ферма.**

Неэлементарные методы к первому случаю теоремы Ферма привлек Куммер. В 1858 г. он доказал, что первый случай теоремы Ферма справедлив для простого показателя p, если на p не делится числитель хотя бы одного из двух чисел Бернулли B_{p-3} и B_{p-5}.

В 1905 г. Мириманов обобщил этот результат, показав, что достаточно, чтобы p не делило числителя хотя бы одного из четырех чисел Бернулли B_{p-3} и B_{p-5}, B_{p-7} и B_{p-9}. Это покрывает все $p<257$.

Используя метод Мириманова, Вифреих в 1909 г. доказал, что первый случай теоремы Ферма справедлив для всех простых показателей p, для которых $2^{p-1}-1$ не делится на p^2. Этот результат произвел сенсацию. О его силе можно судить, например, по тому, что для простых чисел $p\leq 200\ 180$ он не дает ответа только для двух чисел - 1093 и 3511.

Доказательство Вифериха было впоследствии упрощно Миримановым и Фробениусом, которые также показали, теорема Ферма оказывается справедливой для любого простого показателя p, для которого хотя бы одно из чисел $2^{p-1}-1$ или $3^{p-1}-1$ не делится на p^2.

В 1912 г. Фуртвенглер, обратившись к очень сильным средствам (к так называемому закону взаимности Эйзенштейна), доказал критерий Вифериха и Мириманова-Фробениуса буквально в несколько строк. Эта работа послужила началом целой серии исследований, авторы которых, опираясь на самые новейшие достижение теории чисел (например, так называемую теорию полей классов), смогли к 1941 году доказать, что в критерии Вифериха основание 2 можно заменить произвольным простым числом $p \leq 43$. Это позволило утверждать, что первый случай теоремы Ферма справедлив для всех показателей $p<253\ 747\ 889$.

Рассмотрим случай, когда n - простое число, т.е. $X^p+Y^p=Z^p$ (3). Это достаточно для доказательства теоремы Ферма. Предположим, что уравнение (3) имеет решение в целых положительных числах, тогда $(X,Y)=1$, $(X,Z)=1$ и $(Y,Z)=1$ уравнение запишем в следующем виде: $Y^p=Z^p-X^p$, преобразуя $(Z/Y)^p-(X/Y)^p=1$ Z/Y и X/Y - несократимые дроби, т.е. рациональные числа. Тогда, обозначая $Z/Y=t$, $X/Y=s$ получим $t^p - s^p=1$. Это уравнение по доказанной теореме не имеет решения в рациональных числах, значит - t и s либо целые, либо иррациональные. Если целое тогда Z/Y и X/Y должны быть целыми числами, но по предположению Z/Y и X/Y - несократимые дроби. Если t и s иррациональные, тогда получается Z и X иррациональные числа, но по предположению X,Y и Z целые положительные числа. Эти противоречия доказывают, что уравнение $X^p+Y^p=Z^p$ не имеет решений в целых положительных числах X,Y и Z.

Рассмотрим приложение неразрешимости одного из классов диофантовых уравнений в некоторых задачах геомеханики. Оценка напряженно-деформированного состояния массивов с гористым рельефом является актуальной проблемой геомеханики. Исследование напряженно-деформированного состояния массива вокруг открытых и подземных горных выработок и прогнозирования их устойчивости имеет важное значение в горной геомеханике. Появление качественно новой компьютерной техники с большой скоростью действия и объемами памяти вызвало интенсивное развитие численных методов решения практических задач геомеханики. Наиболее распространенным численными методами решения нелинейных задач геомеханики является метод конечных элементов.

В плоской задаче теории упругости точки напряженной области получают перемещения, характеризуемые компонентами u и v вдоль осей координат X и У. Аналитическое решение упругой задачи в перемещениях представляет собой отыскание двух непрерывных функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в рассматриваемой области. В методе конечных элементов эти криволинейные поверхности аппроксимируются набором кусочков плоскостей , имеющих простое уравнение в виде полинома $u=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y$

$$v=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y,$$

где x,y - координаты точки $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2$ и β_3 - параметры линеаризации.

. По степеням аппроксимирующийся полиномами метод конечных элементов разделяется на методы первого порядка , второго порядка и так далее n ного порядка.

$$u=\alpha_1+\alpha_2x+\alpha_3y+\alpha_4x^2+\alpha_5xy+\alpha_6y^2\ldots\alpha_ny^n$$

$$v=\beta_1+\beta_2x+\beta_3y+\beta_4x^2+\beta_5xy+\beta_6y^2\ldots\beta_ny^n \qquad (4)$$

Чем выше порядок метода конечных элементов, тем более точным получается результат.

Важную роль играет правая часть (4). При нулевом значение $u(x,y)$ $v(x,y)$ получаем диофантовое уравнение с двумя неизвестными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Абдылдаев Э.К. Напряженно-деформированное состояние массива горных пород вблизи выработок. -Ф.: Илим, 1990.
2. Бухштаб А.А. Теория чисел. -М.: Просвещение, 1966.
3. Виноградов И.М. Основы теории чисел. -М.: Наука, 1981.
4 Шидловский А.Б., Диофантовы приближения и трансцендентные числа. -М.: Издательство Московского университета ,1982.