Тогочуев А.Ж

К.Тыныстанов ат. ЫМУ

КЭЭ БИР СЫЗЫКТУУ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР СИСТЕМАСЫНЫН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫНЫН ЖЫЛМАЛУУЛУГУ ЖӨНҮНДӨ

Бул макалада $R=(-\infty,\infty)$ *бүткүл сан огу боюнча диагоналдык матрицадагы сызыктуу дифференциалдык теңдемелер системасынын чыгарылыштарынын жыл-ма болушунун жетиштүү шарты алынат.*

Чексиз $R=(-\infty,\infty)$ областында аныкталып, маанилери R_n евклиддик мейкиндигинде жаткан чексиз жылма финиттүү вектор–функцияларынын $C^{\infty}{}_0(R,R_n)$ көптүгүн

$$\|f(x)\|_n=\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i(x)|^2\right)^{1/2} \qquad (2)$$

нормасы боюнча туюктоодон пайда болгон мейкиндик

$H=H(R,R_n)$ аркылуу белгиленет.

Төмөндөгүдөй сызыктуу дифферен-циалдык теңдемелер системасын карайбыз

$$\begin{array}{l} -y_1''''+(|x|+1)y_1 = f_1(x) \\ -y_2''''+(|x|+1)y_2 = f_2(x) \\ - \ - \ - \ - \ - \ - \ - \\ -y_n''''+(|x|+1)y_n = f_n(x) \end{array} \qquad (1)$$

Бул системага

$$Q(x)=\begin{pmatrix} |x|+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |x|+1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & |x|+1 \end{pmatrix}$$

диагоналдык матрица туура келет.

Иштин негизги корутундусу: (1) системанын $R=(-\infty,\infty)$ областы боюнча жылма чыгарылышы бар экендигин далилдөө болуп эсептелет.

Мындай корутундуну далилдөө үчүн төмөнкү белгилөөлөрдү жүргүзөбүз:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ - \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix}$$

Анда (1) система операторлук түрдө мындайча жазылат

$$L = -y''' + Q(x)y = f(x) \qquad (3)$$

Бул операторлук теңдеме алдын ала

$$L[y] = -y''' + Q(x)y$$

дифференциалдык туюнтмасын жого-руда айтылган $C^{\infty}{}_0(R, R_n)$ көптүгүн (2) норма боюнча туюктоодон келип чыгат. Мындан ары бизге $[4]$ ишинде далилденген теорема керек болот.

Теорема $[4]$. Өзүнө өзү түйүндөш болгон $Q(x)$ $(x \in R)$ операторлук функция үчүн төмөндөгү шарттар аткарылсын:

I. $$(Q(x)f, f)_H \geq \delta(f, f)_H \quad , \quad f \in D$$

$D = D(Q(x))$ көптүгү $Q(x)$ операторунун аныкталуу областы, $\delta \rangle 0$.

II. $$\sup_{|x-y|\leq 2} \left\{ \left\| [Q(x) - Q(y)]\,[Q(x) + \lambda \mathrm{E}]^{-1} \right\|_H + \left\| [Q(y) - Q(x)]\,[Q(y) + \lambda \mathrm{E}]^{-1} \right\|_H \right\} \leq 0(1), \lambda \rangle\rangle 1$$

III . Дээрлик бардык x үчүн $Q(x)$ оператору тыкыр үзгүлтүксүз оператор-дун тескериси.

Анда $L + \lambda \mathrm{E} = -y''' + [Q(x) + \lambda]y$

оператору чектелген тескери операторго ээ болот жана L оператору H мейкиндигинде бөлүктөлөт.

Аныктоо.Эгерде $D(L)$ аныкталуу областында жаткан бардык y тер үчүн y''' туундусу H мейкиндигинде жатса, анда

$$Ly = -y''' + Q(x)y$$

оператору бөлүктөнөт деп айтабыз.

Мында $D(L)$ көптүгү L опера-торунун аныкталуу областы.

Демек иштеги негизги корутундуну далилдөөдө (3) теңдемедеги $Q(x)$ оператору үчүн алдыдагы келтирилген теоремадагы $\mathrm{I} - \mathrm{III}$ шарттардын аткарылышын текшерип чыгуу керек I шарт:

$$Q(x)f = \begin{pmatrix} |x|+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |x|+1 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & |x|+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (|x|+1)f_1 \\ (|x|+1)f_2 \\ ---- \\ (|x|+1)f_n \end{pmatrix} = (|x|+1) \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix} = (|x|+1)f$$

Бул барабардыктын негизинде

$(Q(x)f, f)_H = ((|x|+1)f, f)_H = (|x|+1)(f, f)_H \geq \delta(f, f)_H$ болгондуктан I шарт аткарылат.

II шартты текшерүүдө алдын ала керек болуучу $[L + \lambda \mathrm{E}]^{-1}$ тескери матрицаны эсептөө керек.

$$\det[Q(x) + \lambda \mathrm{E}] = (|x| + \lambda + 1)^n$$

жана $Q(x)$ матрицасынын алгебралык толуктоочтору.

$$Q_{ij} = \begin{cases} (|x| + \lambda + 1)^{n-1} & \textit{эгерде } i = j \textit{ болсо} \\ 0 & \textit{эгерде } i \neq j \textit{ болсо} \end{cases}$$

болгондуктан,

$$[Q(x)+\lambda\mathrm{E}]^{-1}=\frac{1}{\det[Q(x)+\lambda\mathrm{E}]}\begin{pmatrix}(|x|+\lambda+1)^{n-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & (|x|+\lambda+1)^{n-1} & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & (|x|+\lambda+1)^{n-1}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{(|x|+\lambda+1)^{n-1}}{(|x|+\lambda+1)^{n}}\mathrm{E}=\frac{1}{|x|+\lambda+1}\mathrm{E}$$

Мында E бирдик матрица.

Ошондой эле II шартка керек болуучу $Q(x)-Q(y)$ айырмасын эсептеп алабыз.

$$Q(x)-Q(y)=\begin{pmatrix}|x|+1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & |x|+1 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & |x|+1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}|y|+1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & |y|+1 & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & |y|+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}|x|-|y| & 0 & \dots & 0\\ 0 & |x|-|y| & \dots & 0\\ - & - & - & -\\ 0 & 0 & \dots & |x|-|y|\end{pmatrix}=(|x|-|y|)\mathrm{E}$$

Буларды колдонуу менен II шарттын биринчи кошулуучусунун жогорку чектелүү баасын алууга болот б.а.,

$$\left\|[Q(x)-Q(y)]\,[Q(x)+\lambda\mathrm{E}]^{-1}\right\|_H=\sqrt{\sum_n\left|\frac{|x|-|y|}{|x|+\lambda+1}\right|^2}=\sqrt{\left|\frac{|x|-|y|}{|x|+\lambda+1}\right|^2\sum_n 1}=$$

$$=\frac{|x|-|y|}{|x|+\lambda+1}\sqrt{n}\le\frac{|x-y|}{\lambda}\sqrt{n}$$

Экинчи кошулуучу дал ушундай чектелгендиктен

$$\mathop{Sup}_{|x-y|\le 2}\left\{\left\|[Q(x)Q(y)][Q(x)+\lambda\mathrm{E}]^{-1}\right\|_H+\left\|[Q(y)-Q(x)][Q(y)+\lambda\mathrm{E}^{-1}]\right\|_H\le\right.$$

$$\le\mathop{Sup}_{|x-y|\le 2}\left\{\frac{|x-y|}{\lambda}\sqrt{n}+\frac{|y-x|}{\lambda}\sqrt{n}\right\}\le\frac{4\sqrt{n}}{\lambda}\le 0(1),$$

$\lambda\rangle\rangle 1$ болгон кезде.

Демек II шарт аткарылат.

III шарт: $\det Q(x) = (|x|+1)^n \neq 0$ жана

R_n - чектүү өлчөмдөгү евклиддик мейкиндик болгондуктан $Q(x)$ операторунун тескериси бар жана ал тыкыр үзгүлтүксүз оператор болот.

Ошентип, $Q(x)$ матрицасы теоре-манын бардык шарттарын канагаттан-дыргандыктан $L + \lambda \mathrm{E}$ оператору чектелген тескери операторго ээ болот б.а., $y = (L + \lambda \mathrm{E})^{-1} f$, (3) теңдеменин же ага эквиваленттүү болгон (1) системанын чыгарылышы болот.

Ал эми L операторунун бөлүктө-нүүчүлүгү боюнча $y''' \in H$ болгондук-тан y чыгарылышынын жылмалуулугу келип чыгат.

Адабияттар

1.Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1979.

2.Неймарк М.А. Линейные дифферен-циальные операторы. - М.: Наука, 1969.

3. Тогочуев А.Ж. Гладкость решений линейного дифференциального уравне-ния с операторным коэффициентом на бесконечном интервале. //Вестник ИГУ, 2000, № 4. с. 81-86.