УДК: 517

Жокен кызы С.

ЫГУ им. К.Тыныстанова

О СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА-СТИЛТЬЕСА ПЕРВОГО РОДА С ПРИБЛИЖЕННО ЗАДАННЫМ ЯДРОМ

Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса и их системы рассматривались в [1-5]. В [4] исследование систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода проводилось в предположении, что правая часть $f(t)$ известна приближенно. В настоящей работе предполагается, что элементы матричного ядра $K(t,s)$ имеют приближенные значения.

Пусть $\varphi(t)$- возрастающая непрерывная функция на $G_o = [t_0, T]$ $(t_0 < T < \infty)$.
Рассмотрим систему:

$$\int_{t_0}^{t} K(t,s)\, u(s)\, d\varphi(s) = f(t), \qquad (1)$$

где $t \in [t_0, T]$, $K(t,s)$ - $n \times n$-мерная известная матричная функция, $f(t)$– n-мерная известная вектор-функция, $u(t) - n$-мерная неизвестная вектор-функция.

Наряду с системой (1) будем рассматривать систему

$$\varepsilon\, v(t,\varepsilon) + \int_{t_0}^{t} K(t,s)\, v(s,\varepsilon)\, d\varphi(s) = f(t), \qquad (2)$$

где $t \in [t_0, T]$, $\varepsilon > 0$ – малый параметр.

Пусть $\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $\|u\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |u_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ - нормы соответственно для $n \times n$- матрицы $A = (a_{ij})$ и для n-мерного вектора $u = (u_i)$. $C_n[t_0, T]$- пространство n-мерных вектор-функций с элементами из $C[t_0, T]$. Пространство n-мерных вектор-функций с элементами из $C_\rho^\gamma[t_0, T], 0 < \gamma \le 1$ обозначим через $C_{\rho,n}^\gamma[t_0, T]$. Если $u(t) \in C_{\rho,n}^\gamma[t_0, T]$, то $\| u(t) - u(s) \| \le c | \rho(t) - \rho(s) |^\gamma$, где $\rho(t) = \int_{t_0}^{t} \lambda(s) d\varphi(s)$, $t \in [t_0, T]$, c- положительная постоянная, зависящая от $u(t)$, $\lambda(t) = \min_i \lambda_i(t)$, где $\lambda_i(t)$ $(i = 1,2,...,n)$ - собственные значения матрицы $\frac{1}{2}[K(t,t) + K^*(t,t)]$, K^*- сопряженная матрица к матрице $K(t,t)$.

Потребуем выполнения следующих условий:

I) $n \times n$-мерное матричное ядро $K(t,s)$- непрерывная матричная функция на $G = \{(t,s) : t_0 \le s \le t \le T\}$;

II) $\lambda(t) \ge 0$ при $t \in [t_0, T]$, $\lambda(t) \in C[t_0, T]$, $\|K(t,t)\| \le N_0\, \lambda(t)$;

III) при $\tau > \eta$ для любых $(\tau, s), (\eta, s) \in G_1 = \{(t,s) : t_0 < s < t < T\}$ справедлива оценка

$$\|K(\tau,s) - K(\eta,s)\| \le l(s) \int_{\eta}^{\tau} \lambda(s) d\varphi(s), \text{ где } l(t) \in C[t_0, T], l(t) \ge 0 \text{ при } t \in [t_0, T].$$

В прикладных задачах часто элементы матричного ядра $K(t,s)$ известны приближенно. В этом случае вместо системы (2) имеем дело с некоторой другой системой

$$\varepsilon\, v_h(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t} K_h(t,s)\, v_h(s,\varepsilon)\, d\varphi(s)= f(t)\,, \qquad (3)$$

такой, что $\| K(t,s)-K_h(t,s)\| \le h$ и $K_h(t,s)$ удовлетворяет условиям :

а) $n\times n$-мерное матричное ядро $K_h(t,s)$ - непрерывная матричная функция на G ;

б) $\|K_h(t,t)\| \le n_0\lambda_h(t)$, $\lambda_h(t)\ge 0$ при $t\in[t_0,T]$, $\lambda_h(t)\in C[t_0,T]$, $\lambda_h(t)=\min\limits_i \lambda_{hi}(t)$, где $\lambda_{hi}(t)$ $(i=1,2,...,n)$- собственные значения матрицы $\frac{1}{2}\left[K_h(t,t)+K_h{}^*(t,t)\right]$;

в) при $\tau>\eta$ для любых $(\tau,s),(\eta,s)\in G_1$ справедлива оценка

$$\|K_h(\tau,s)-K_h(\eta,s)\| \le l_1(s)\int_{\eta}^{\tau}\lambda_h(s)d\varphi(s)\,.$$

ЛЕММА. Пусть выполняются условия а)-в), $f(t)\in C^1_{p,n}[t_0,T]$, тогда для решении $v_h(t,\varepsilon)$ системы (3) имеет место оценка

$$\|v_h(t,\varepsilon)\|_C \le C(1+n_0)e^{\int_{t_0}^{T} l_1(s)C_4 d\varphi(s)}\,, \qquad (4)$$

где $C_4=\frac{1}{e}+n_0$, C - положительная постоянная.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из системы (3) имеем:

$$v_h(t,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}K_h(s,s)v_h(s,\varepsilon)d\varphi(s)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\left[K_h(t,s)-K_h(s,s)\right]v_h(s,\varepsilon)d\varphi(s)+f(t).$$

Используя резольвенту матричного ядра $\left[-\frac{K_h(s,s)}{\varepsilon}\right]$[2], обобщенную формулу Дирихле [1], получим

$$v_h(t,\varepsilon)=\int_{t_0}^{t}H_3(t,s,\varepsilon)v_h(s,\varepsilon)d\varphi(s)+\psi(t,\varepsilon)\,, \qquad (5)$$

где

$$H_3(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\left[K_h(t,s)-K_h(s,s)\right]+\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{s}^{t}X_h(t,\tau,\varepsilon)K_h(\tau,\tau)\left[K_h(\tau,s)-K_h(s,s)\right]d\varphi(\tau), \qquad (6)$$

$$\psi(t,\varepsilon)= f(t)-\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}X_h(t,\tau,\varepsilon)K_h(\tau,\tau)f(\tau)d\varphi(\tau), \qquad (7)$$

$X_h(t,s,\varepsilon)$ [2] - решение матричного уравнения

$X_h(t,s,\varepsilon)=-\frac{1}{\varepsilon}\int_{s}^{t}K_h(\tau,\tau)X_h(\tau,s,\varepsilon)d\varphi(\tau)+E_n$, $E_n - n\times n$-мерная единичная матрица.

Так как $\|X_h(t,s,\varepsilon\| \le e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda_h(\tau)d\varphi(\tau)}$ [4], для (6) получим:

$$\|H_3(t,s,\varepsilon)\| \le l_1(s)C_4\ . \qquad (8)$$

Так как $f(t)\in C^1_{p,n}[t_0,T]$, то $\|f(t)\|\le C$ и для (7) получим

$$\|\psi(t,\varepsilon)\| \le C(1+n_0). \qquad (9)$$

Тогда из (5), с учетом (8) и (9), имеем:

$$\|v_h(t,\varepsilon)\|_C \le \int_{t_0}^{t} l_1(s) C_4 \|v_h(s,\varepsilon)\|_C \, d\varphi(s) + C(1+n_0).$$

Применяя к последнему неравенству обобщенную формулу Гронуолла-Беллмана [1], получим оценку (4). Лемма доказана.

Вычитая из системы (2) систему (3) и вводя обозначение

$$z(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon) - v_h(t,\varepsilon), \tag{10}$$

используя резольвенту матричного ядра $\left[-\dfrac{K(s,s)}{\varepsilon}\right]$ [2], обобщенную формулу Дирихле [1], получим

$$z(t,\varepsilon) = \int_{t_0}^{t} H_1(t,s,\varepsilon) z(s,\varepsilon) d\varphi(s) + \int_{t_0}^{t} H_2(t,s,\varepsilon) v_h(s,\varepsilon) d\varphi(s), \tag{11}$$

где

$$H_1(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s) - K(s,s)] + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,\tau,\varepsilon) K(\tau,\tau)[K(\tau,s) - K(s,s)] d\varphi(\tau), \tag{12}$$

$$H_2(t,s,\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon}[K(t,s) - K_h(t,s)] + \frac{1}{\varepsilon^2}\int_s^t X(t,\tau,\varepsilon) K(\tau,\tau)[K(\tau,s) - K_h(\tau,s)] d\varphi(\tau). \tag{13}$$

Здесь $X(t,s,\varepsilon)$ [2] является решением матричного уравнения

$X(t,s,\varepsilon) = -\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_s^t K(\tau,\tau) X(\tau,s,\varepsilon) d\varphi(\tau) + E_n$, $E_n - n \times n$-мерная единичная матрица.

Зная, что $\|X(t,s,\varepsilon\| \le e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \lambda(\tau) d\varphi(\tau)}$ [4], для (12) получим:

$$\|H_1(t,s,\varepsilon)\| \le l(s) C_3, \quad C_3 = \frac{1}{e} + N_0, \tag{14}$$

Для (13) имеем

$\|H_2(t,s,\varepsilon)\| \le \dfrac{h}{\varepsilon} + \dfrac{1}{\varepsilon^2}\displaystyle\int_s^t e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_\tau^t \lambda(\tau) d\varphi(\tau)} N_0 \lambda(\tau) h \, d\varphi(\tau)$. Тогда

$$\|H_2(t,s,\varepsilon)\| \le \frac{h}{\varepsilon}(1+N_0) \tag{15}$$

Учитывая (10), (14) и (15), в силу леммы и обобщенного неравенства Гронуолла-Беллмана [1], из (11) имеем:

$$\| v(t,\varepsilon) - v_h(t,\varepsilon) \|_C \le \frac{h}{\varepsilon} N e^{\int_{t_0}^{T} l(s) C_3 d\varphi(s)}, \tag{16}$$

где $N = C(1+N_0)(1+n_0) e^{\int_{t_0}^{T} l_1(s) C_4 d\varphi(s)} [\varphi(T) - \varphi(t_0)]$.

ТЕОРЕМА. Пусть выполняются условия I)-III), а)-в). Тогда

1) если $\lambda(t) > 0$ $\lambda_h(t) > 0$ при почти всех $t \in [t_0, T]$, $\varepsilon = \sqrt{h}$, система (1) имеет решение $u(t) \in C_n[t_0, T]$, то решение $v_h(t,\varepsilon)$ системы (3) при $h \to 0$ сходится по норме $C_n[t_0,T]$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v_h(t,\varepsilon) - u(t)\|_C \le \frac{h}{\varepsilon} N e^{\int_{t_0}^{T} l(s) C_3 d\varphi(s)} + M(1+N_0)\left[2\|u(t)\|_C \exp\left(-\frac{1}{h^{\frac{1-\beta}{2}}}\right) + w_{\bar{u}}\left(h^{\frac{\beta}{2}}\right)\right], \tag{17}$$

где β – произвольное число из интервала (0,1),

$$w_{\bar{u}}(\delta)=\sup\left\{\left\|u(\rho^{-1}(\mu))-u(\rho^{-1}(\nu))\right\|,|\mu-\nu|\le\delta,\mu,\nu\in[0,\rho(T)]\right\};\ M=\exp\left[\int_{t_0}^{T}l(s)d\varphi(s)\right];$$

2) если система (1) имеет решение $u(t)\in C_{\rho,n}^{\gamma}[t_0,T],0<\gamma\le 1$, $\varepsilon=\sqrt{h}$, то решение $v_h(t,\varepsilon)$ системы (3) при $h\to 0$ сходится по норме $C_n[t_0,T]$ к $u(t)$. При этом справедлива оценка

$$\|v_h(t,\varepsilon)-u(t)\|_C\le\frac{h}{\varepsilon}N e^{\int_{t_0}^{T}l(s)C_3d\varphi(s)}+MC_2h^{\frac{\gamma}{2}}, \tag{18}$$

где

$$C_2=M_0(C_0+N_0C_1),$$

$$C_0=\sup\left\{\tau^{\gamma}e^{-\tau},\tau\in[0,\infty)\right\},M_0=\sup\left\{\|u(t)-u(s)\|/|\rho(t)-\rho(s)|^{\gamma},t,s\in[t_0,T],t\ne s\right\},$$

$$C_1=\int_0^{\infty}e^{-\tau}\tau^{\gamma}d\tau.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

$$\|v_h(t,\varepsilon)-u(t)\|_C=\|v_h(t,\varepsilon)-v(t,\varepsilon)+v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C\le\|v_h(t,\varepsilon)-v(t,\varepsilon)\|_C+\|v(t,\varepsilon)-u(t)\|_C.$$

Тогда, учитывая оценку (16), по теореме 1 работы [4] из последнего неравенства следуют оценки (17) и (18). Теорема доказана.

Литература

1. Асанов А.А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода// Табигый Илимдер журналы.- Бишкек: КТМУ, 2002.- Вып. 2.- С. 79-95.

2. Асанов А.А. Система интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса //Табигый Илимдер журналы.-Бишкек: КТМУ, 2004.- Вып. 2.- С. 64-76.

3. Асанов А.А., Жокен кызы С. Линейные интегральные уравнения Вольтера Стилтьеса первого рода// Вестник Ысыккульского университета. -Каракол, 2003.-Вып. 9. -С. 73-79.

4. Жокен кызы С. Регуляризация и единственность решений систем линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода. // Труды XIII Байкальской международной школы-семинара «Методы оптимизации и их приложения». -Иркутск, 2005. -С.122-128.

5. Жокен кызы С. Система линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса первого рода. //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. -Бишкек, 2004. -Вып. 33.-С.111-117.

6. Иманалиев М.И., Асанов А.А. Регуляризация, единственность и существование решения для интегральных уравнений Вольтерра 1 рода. //Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. - Фрунзе: Илим, 1988.- Вып. 21. –С. 3-38.