УДК 532.546

Байболотов Б. А.

ЫГУ им К. Тыныстанова

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАСХОДА ГРУНТОВЫХ ВОД МЕТОДОМ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ

Численно решается граничная обратная задача для одномерного уравнения Буссинеска методом регуляризации

При анализе изменения гидрогеологомелиоративной обстановки за счёт притока с орошаемых и промываемых земель возникает необходимость в расчёте расхода (притока или оттока) подземных вод. Обычно расчёты выполняются по формуле Дарси при наличии замеров уровней грунтовых вод (УГВ) в двух точках. Естественно, применение указанной формулы ограничивается, с одной стороны, необходимостью бурения двух скважин, а с другой - наличием погрешностей при определении разности уровней. Даже при отметках УГВ, полученных с помощью ЭВМ, отклонения в расходах от замеренных на гидроинтеграторе, достигают 10% (таблица 1).

Поэтому большой практический интерес представляет расчёт расхода грунтовых вод по замеру УГВ в одной точке путём решения граничной обратной задачи для одномерного уравнения Буссинеска. С помощью обратных задач можно ставить и решать задачи оптимального управления фильтрационным процессом. Обратные задачи относятся к классу некорректных. Эффективный метод решения некорректных задач, основанный на использовании качественной информации об искомом решении, разработан А.Н. Тихоновым [1 – 3].

Метод регуляризации успешно применяется также при решении нелинейных обратных задач [4, 5]. Разработанный в этих трудах алгоритм не требует приведения задач к интегральному уравнению I рода, то есть не обязательно явно задавать оператор прямого соответствия. В данной работе рассматривается применение регуляризирующего алгоритма [5] к нахождению граничного условия II рода в одномерном уравнении Буссинеска.

Пусть требуется найти отток грунтовых вод по известному УГВ в одной точке (в наблюдательной скважине), то есть восстановить функцию *q(t)*, если

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left[k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x}\right] = f(x,t), \qquad 0<x<l, \qquad 0<t\le T, \tag{1}$$

$$H(x,0) = H_0(x), \qquad 0<x<l\ , \tag{2}$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \ \ x=0 \qquad 0<t\le T, \tag{3}$$

$$k(H-b)\frac{\partial H}{\partial x} = q(t), \quad x=l, \quad 0<t\le T, \tag{4}$$

известно, что $\overline{H}(t) = H(x_1,t)$, $0\le x_1\le l$, $0<t\le T$, где $H(x,t)$, $k(x)$, $b(x)$, $\mu(x)$, $f(x,t)$ - УГВ, коэффициент фильтрации, поверхность водоупора, свободная водоотдача и функция вертикального водообмена соответственно.

Каждому значению функции $q(t)$ соответствует определённый УГВ $\overline{H}(t)$в точке $x = x_k$, то есть определён оператор $F(q) = \overline{H}(t)$. Но он определён неявно, он может быть задан алгоритмически сеточным аналогом задачи (1) - (4) [6, 7]:

$$\mu_i \frac{H_i^j - H_i^{j-1}}{\tau} - \frac{\sigma}{2h^2} Q_i^j - \frac{1-\sigma}{2h^2} Q_i^{j-1} = \sigma f_i^j + (1-\sigma) f_i^{j-1}, \qquad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$H_i^0 = H_0(x_i), \qquad i = 0, 1, \dots, n, \qquad (6)$$

$$\left[\frac{\sigma}{2h}\left(P_0^j + P_1^j\right) + \frac{h\mu_0}{2\tau}\right] H_0^j = \frac{\sigma}{2h}\left(P_0^j + P_1^j\right) H_1^j + \frac{1-\sigma}{2h}\left(P_0^j + P_1^j\right)\left(H_1^{j-1} - H_0^{j-1}\right) +$$

$$+ \frac{h}{2}\left[\frac{\mu_0}{\tau} H_0^{j-1} + \sigma f_0^j + (1-\sigma) f_0^{j-1}\right], \qquad (7)$$

$$\left[\frac{\sigma}{2h}\left(P_{n-1}^j + P_n^j\right) + \frac{h\mu_n}{2\tau}\right] H_n^j = \frac{\sigma}{2h}\left(P_{n-1}^j + P_n^j\right) H_{n-1}^j + \frac{1-\sigma}{2h}\left(P_{n-1}^j + P_{n1}^j\right)\left(H_n^{j-1} - H_{n-1}^{j-1}\right) +$$

$$+ \frac{h}{2}\left[\frac{\mu_n}{\tau} H_n^{j-1} + \sigma f_n^j + (1-\sigma) f_n^{j-1}\right] - q^j, \qquad (8)$$

$$P_i^j = k_i\left(\tilde{H}_i^j - b_i\right),$$

$$Q_i^j = (P_{i+1}^j + P_i^j) H_{i+1}^j - (P_{i+1}^j + 2P_i^j + P_{i-1}^j) H_i^j + (P_i^j + P_{i-1}^j) H_{i-1}^j,$$

$$m = T/\tau, \;\; n = l/h, \;\; 0 < \sigma \le 1, \;\; j = 1, 2, \dots, m,$$

$\tilde{H}_i^j$ - значения УГВ из предыдущей итерации.

Разностная схема (5) - (8) аппроксимирует задачу (1) - (4) с порядком $O(h^2 + \tau)$ при $\sigma \ne 0.5$ и $O(h^2 + \tau^2)$ - при σ = 0.5 [8]. Реализация схемы производится с помощью метода прогонки с применением метода квазилинеаризации [9] к нелинейным членам.

Метод регуляризации использует качественную информацию об искомом решении. Он позволяет из всех функций $q(t)$, удовлетворяющих условию

$$\left\| F(q) - \overline{H} \right\| \le \delta, \qquad (9)$$

выбрать в качестве решения самую гладкую. Такое решение обеспечивает минимум следующему сглаживающему функционалу:

$$M_\alpha(q) = \left\| F(q) - \overline{H} \right\|^2 + \alpha \left\| q' \right\|^2, \qquad (10)$$

где α > 0 - параметр регуляризации. При этом погрешность, вносимая за счёт сглаживающего члена $\alpha > \left\| q' \right\|^2$, должна быть порядка погрешности измерений. Из-за нелинейности оператора $F(q)$ для минимизации функционала (10) используется итерационная последовательность функционалов

$$M_{k,\alpha}(q_{k+1}^{\alpha\delta}) = \left\| F_q(q_k^{\alpha\delta}) + F_q'(q_k^{\alpha\delta})(q_{k+1}^{\alpha\delta} - q_k^{\alpha\delta}) - \overline{H} \right\|^2 + \alpha \left\| (q_k^{\alpha\delta})' \right\|, \qquad (11)$$

где $F_q'(q_k^{\alpha\delta})$ - операторная производная, которая аппроксимируется матрицей

Якоби. При каждом α_δ строится последовательность $\{q_k\}$ до выполнения условия $min\left\| q_{k+1}^{\alpha\delta} - q_k^{\alpha\delta} \right\|$, после чего находится новое значение параметра регуляризации. Для этой цели можно использовать метод невязок [10], который состоит в следующем.

Пусть

$$\rho(\alpha) \equiv \left\| F(q^\alpha) - \overline{H} \right\| = \delta,$$

где

$$\delta = \left(\sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \right)^{1/2} \text{ - невязка.}$$

Составляем функцию

$$y(\nu) = \frac{1}{\rho(\nu)} - \frac{1}{\delta}, \text{ где } \nu = 1/\alpha$$

и методом Ньютона решаем уравнение $y(\nu) = 0$. Тогда для параметра ν получаем следующую рекуррентную формулу:

$$\nu_{\delta+1} = \nu_\delta - \frac{\mathrm{y}(\nu_\delta)}{y(\nu_\delta)} = \nu_\delta + \frac{\rho(\nu_\delta)}{\rho'(\nu_\delta)}\left[1 - \frac{\rho(\nu_\delta)}{\delta}\right], \tag{12}$$

Производная функции $\rho(\nu)$ находится численно. Итерационный процесс минимизации функционала (11) заканчивается при достижении условия (9).

Проверка алгоритма программы производилась на решении тестовых задач. Приводим результаты решения одной задачи применительно к гидрогеологическим условиям конкретного опытного участка при расчётной схеме: среда однородная с k = 21,6 *м/сут*; μ = 0,2; l=12000 *м*; b = 0; f = 1,08 *мм/сут*; расчётный период T = 25 лет при τ = 365 *сут*. За начальные условия приняты УГВ, соответствующие граничным условиям $q_{np}=0$; q_{om}=22,2 *м²/сут*; инфильтрации f = 1,85 *мм/сут*. В качестве исходной информации принимались уровни в одной точке в расчётах, выполненных ранее на ЭВМ при $H_1 = H_1(t)$ и на гидроинтеграторе при $H_1 = const = 359$ *м*.

Расчёты и УГВ, определённые по предлагаемому методу, сравниваются с q_{om} и H_i, полученными в соответствующих расчётах (таблица 2).

Для анализа влияния расстояния точки задания $H(t)$ от границы расчёты выполнялись при заданных УГВ в точках $x_k=0$, $x_k=0.5L$ и $x_k=l$. При этом установлено, что для данной расчётной схемы при равномерном распределении питания, отклонения в сравниваемых расходах не превышают 5% даже при задании $\overline{H}(t)$ в начале профиля. Точность определения q_{om} повышается с приближением к $x=l$; при $\overline{H}(t) = H(x_{1/2}, t)$ отклонения составляют около 1%, при $\overline{H}(t) = H(x_l, t)$ - 0.1%. Аналогичная картина наблюдается и в УГВ.

Таблица 1

Отклонения в расчётных (q) и замеренных (q_u) расходах.

Месяц	W мм/сут	q_u м²/сут	q при Δx * 250 м	q при Δx * 1000 м	W мм/сут	q_u м²/сут	Δq при Δx = 250 м
Январь	0.832	20.52	0.15	2.19	0.784	19.35	-5.9
Февраль	1.26	22.71	8.41	11.62	-	-	-
Март	1.11	20.13	-0.25	1.44	-	-	-

Апрель	2.44	21.20	-4.81	2.03	-	-	-
Май	1.71	20.52	-1.36	-0.097	-	-	-
Июнь	2.88	22.00	-4.01	2.05	-	-	-
Июль	3.52	23.23	-1.55	2.76	1.46	18.19	-9.2
Август	3.28	23.42	-4.70	1.24	-	-	-
Сентябрь	1.93	23.60	2.67	4.62	-	-	-
Октябрь	1.19	22.96	2.66	5.79	-	-	-
Ноябрь	0.98	21.20	-1.04	0.90	-	-	-
Декабрь	0.82	20.90	0.48	2.11	-0.784	18.00	-3.5

Таблица 2.

Отклонения в расчётных и фактических расходах Δq и ΔH

Год	При $H_L = H_L(t)$						При $H_L = const$ = 359 м					
	$x = 0$		$x = 0.5L$		$x = L$		$x = 0$		$x = 0.5L$		$x = L$	
	Δq	ΔH_L	Δq	ΔH_L	Δq	ΔH_L	Δq	ΔH_L	Δq	ΔH_L	Δq	ΔH_L
1	-0.18	0.08	0.01	-0.01	-0.03	0	0.22	0.06	0.35	0	0.39	0
5	-0.66	0.25	-0.03	0.01	0	0	-0.48	0.13	-0.04	0	-0.08	0.01
10	0.22	-0.08	-0.06	0.01	-0.01	0.01	-0.95	0.27	-0.23	0	-0.24	0.01
15	0.18	-0.10	0.07	-0.04	0	0.01	0.10	-0.14	-0.23	0.01	-0.19	0.01
20	-0.44	0.14	-0.15	0.03	0.01	0		-0.12		0.05		0.01
25	-0.10	0.06	-0.11	0.05	0.01	0.01		-0.18		-0.03		0.01

Примечание: $\Delta q = q_u - q$, $\Delta H_0 = H_Ф - H_P$ в $x = 0$, $\Delta H_L = H_Ф - H_P$ *в* $x = L$

Выводы

1. Предложенный алгоритм позволяет вести расчет расхода грунтовых вод при задании отметки УГВ в одной скважине в условиях неоднородной по длине профиля фильтрационной среды, неравномерного распределения вертикального водообмена, при произвольном положении водоупора.

2. Для повышения точности расчёта (при учёте характера распределения питания, неоднородности среды и других факторов), УГВ желательно задавать ближе к расчётной границе.

Литература

1. Тихонов А.Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации. // ДАН СССР, 1963, 151, № 3, с. 501 – 504.

2. Тихонов А.Н. О регуляризации некорректно поставленных задач. // ДАН СССР, 1963, 153, № 1, с. 48 – 52.

3. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.

4. Тихонов А.Н., Гласко В.Б. Применение метода регуляризации в нелинейных задачах. //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965, № 3, с. 463 – 473.

5. Гласко В.Б., Захаров М.В., Колп А.Н. О применении метода регуляризации к решению одной обратной задачи нелинейной теории теплопроводности. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975, 15, № 6, с.1607 – 1611.

6. Джаныбеков Ч.Д., Мурзакматов М.У. Вариационно-разностный метод решения задач подземной фильтрации. //ВИНИТИ АН СССР, 1974, №182-74, Деп.

7. Джаныбеков Ч.Д. Математическое моделирование движения грунтовых вод в

многослойных средах. – Фрунзе: Илим, 1982. – 280 с.

8. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.

9. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968.

10. Морозов Б.А. О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации. //Журнал вычислительной математики и математической физики. 1968, 8, № 2, с. 296 - 309.