УДК 532.546+518.5

Исабеков К А.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАБОТЫ СКВАЖИНЫ ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЕЙ ДИРАКА

Рассматривается задача моделирования скважины с помощью дельта-функции Дирака. Решение, полученное по предлагаемому методу, сравнивается с известным аналитическим решением.

В задачах гидрогеологии вертикальные дрены, выкачивающие воду из водонососного слоя, рассматриваются как точечные стоки, так как по сравнению с площадью рассматриваемой области фильтрации площадь поперечного сечения скважины ничтожно мала.

В мелиоративных задачах водопонижения расчет скважин необходим при определении количества и взаиморасположения скважин для обеспечения требуемого уровня подземных вод. Моделирование работы одиночной скважины преследует цель вычислить понижение напоров или уровней грунтовых вод в прискважинной зоне. Успешное решение задачи для одиночной скважины позволит проводить расчеты также для интерференции скважин.

Здесь мы рассмотрим вопрос об аппроксимации работы откачивающей скважины с помощью дельта – функции Дирака. Если скважина с постоянным дебитом q_i находится в точке $M_i\ (x_i, y_i)$, то функция источника (стока) будет равной [1,2],

$$f(x,y) = q_i\delta(x-x_i, y-y_i), \tag{1}$$

где $\delta(x-x_i, y-y_i)$ - дельта – функция Дирака. Функцию $\delta(x-x_i, y-y_i)$ можно считать плотностью стоков, создаваемой скважиной с единичным дебитом. Чтобы определить эту плотность, распределим ее дебит равномерно по кругу S_ε. Тогда получим среднюю плотность

$$f_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\varepsilon^2}, & (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 \le \varepsilon^2, \\ 0, & (x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 > \varepsilon^2. \end{cases}$$

От плотности естественно требовать, чтобы интеграл от нее по любому кругу давал бы дебит скважины, т.е.

$$\iint_{S_\varepsilon} f_\varepsilon(x,y)dxdy = 1.$$

Если в различных точках $M_i(x_i, y_i), i = 1,2,....,n$ сосредоточены источники (стоки) с дебитами q_i, то соответствующая плотность равна

$$\sum_{i=1}^{n} q_i\delta(x-x_i, y-y_i).$$

Слабый предел последовательности функций $f_\varepsilon(x,y)$ при $\varepsilon \to 0$, т.е. для любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\iint_{S_\varepsilon} f_\varepsilon(x,y)\varphi(x,y)dxdy = \varphi(0,0).$$

Следовательно, $f_\varepsilon(x,y) \to \delta(x,y)$ при $\varepsilon \to 0,$ в том смысле, что для любой непрерывной функции $\varphi(x,y)$ справедливо предельное соотношение

$$\iint_{S_\varepsilon} f_\varepsilon(x,y)\varphi(x,y)dxdy \to (\delta,\varphi) \qquad \text{при } \varepsilon \to 0,$$

где символ (δ,φ) обозначает число $\varphi(0,0)$ - значение функционала δ на функции φ. Если вместо функции $\varphi(x,y)$ взять базисную функцию $N_i(x,y)$, то

$$\iint_{S_\varepsilon} f(x,y)N_i(x,y)dxdy = q_i N_i(x_i,y_i) = q_i, \qquad (2)$$

т.к. значение базисной функции в соответствующем узле равно единице.

Функцию $\delta(x-x_i, y-y_i)$ представим в виде

$$\delta(x-x_i, y-y_i) = \left[1 - \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{r^2}\right]C_r,$$

где

$r^2 = (x_r - x_i)^2 + (y_r - y_i)^2$, (x_r, y_r) - точки, лежащие на окружности S_r радиуса r с центром в точке (x_i, y_i).

Постоянную C_r выберем так, чтобы

$$\iint_{S_\varepsilon} \delta(x-x_i, y-y_i)dxdy = 1,$$

т.е. чтобы

$$C_r \iint_{S_r} \left[1 - \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{r^2}\right]dxdy = 1,,$$

откуда имеем $C_r = \dfrac{2}{\pi r^2}$.

Таким образом,

$$\delta(x-x_i, y-y_i) = \frac{2}{\pi r^2}\left[1 - \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{r^2}\right]. \qquad (3)$$

Тогда

$$f(x,y) = \frac{2q_i}{\pi r^2}\left[1 - \frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{r^2}\right], \qquad (4)$$

$$f(x_i, y_i) = \frac{2q_i}{\pi r^2}.$$

Рассмотрим теперь задачу о притоке подземных вод к центральной скважине, работающей с постоянным дебитом $q(\text{м}^3/\text{сут})$ в круговом плане области фильтрации с радиусом *R.* Стационарная фильтрация подземных вод описывается следующим дифференциальным уравнением [3]:

$$LH = -\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial H}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial H}{\partial X}\right) + QH = f(x,y), \qquad (x,y) \in D \qquad (5)$$

с краевым условием

$$lH = T\frac{\partial H}{\partial n} + \beta H = \alpha, \qquad (x,y) \in \partial D, \qquad (6)$$

где *H=H(x,y)*-напор подземных вод *(м); T=T(x,y)=m(x,y)к(x,y)* - водопроводимость (*м^2/сут), m(x,y)* - мощность (*м), к(x,y)* – коэффициент фильтрации водоносного пласта *(м/сут); Q=Q(x,y)>0* функция учитывающая водообмен с выше- и нижележащими пластами *(1/сут); f(x,y)* – функция источников и стоков, в частности, дебит скважины *(м/сут);* $\alpha = \alpha(x,y), \beta = \beta(x,y)$ - заданные функции; *D* – область фильтрации, ∂D - ее граница.

Приближенное решение задачи (5), (6) ищем с помощью метода Галеркина [2,4], согласно которому невязки уравнений (5) и (6) должны быть ортогональны функциям, используемым при аппроксимации.

Если функции $N_1, N_2, \ldots N_j, \ldots$ образуют базис в рассматриваемом пространстве и для всех $j=1,2,\ldots$, выполняются равенства

$$\iint_D N_j(LH - f)d\sigma + \int_{\partial D} N_j(lH - \alpha)ds = 0, \qquad j = 1,2,..., \tag{7}$$

то невязки уравнений (5) и (6) обращаются в нуль. Поскольку в практических задачах множество базисных функций конечно, равенство (7) выполняется приближенно и обычно ищется функция, доставляющая минимум функционалу, стоящему в левой части равенств (7). Минимум этого функционала находится с помощью метода конечных элементов [2].

Разбиваем область D произвольным образом на треугольные элементы так, чтобы скважина находилась в общей вершине нескольких элементов. Пусть треугольник Δ_s имеет своими вершинами точки, $M_i(x_i, y_i)$, $M_j(x_j, y_j)$, $M_k(x_k, y_k)$ и скважина находится в вершине M_i. Внутри этого элемента решение задачи ищется в виде линейной функции

$$H^s(x,y) = N_i(x,y)H_i + N_j(x,y)H_j + N_k(x,y)H_k, \tag{8}$$

где

$$N_i = a_i + b_i x + c_i y, \quad N_j = a_j + b_j x + c_j y, \quad N_k = a_k + b_k x + c_k y_k,$$
$$a_i = \left(x_j y_k - x_k y_j\right)/\Delta_s, \quad b_i = \left(y_j - y_k\right)/\Delta_s, \quad c_i = (x_k - x_j)/\Delta_s,$$

и т.д. Остальные коэффициенты получаются с помощью круговой подстановки индексов i, j, k;

$\Delta_s = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} -$ удвоенная площадь треугольника $\Delta_s; H_i, H_j, H_k -$ искомые значения функции $H^s(x,y)$ в точках M_i, M_j, M_k соответственно.

Суммируя выражение вида (8) по всем элементам, получаем разложение для искомой функции:

$$H_n(x,y) = \sum_{s=1}^{m} H^s(x,y) = \sum_{j=1}^{n} H_j N_j(x,y), \tag{9}$$

где $m -$ число элементов, n - число всех узлов сетки.

В равенствах (7) вместо функции $H(x,y)$ подставим ее разложение (9) и после упрощений получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно H_j [4]:

$$\sum_{j=1}^{n}\left\{\iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\sigma + \iint_D N_i N_j Q d\sigma + \int_{\partial D} N_i N_j \beta ds\right\}H_j = \iint_D N_i f d\sigma + \int_{\partial D} N_i \alpha ds,$$
$$i = 1,2,...n,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} H_j = b_i, \qquad i = 1,2,....,n, \tag{10}$$

где

$$a_{ij} = \iint_D T\left(\frac{\partial N_i}{\partial x}\frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y}\frac{\partial N_j}{\partial y}\right)d\sigma + \iint_D N_i N_j Q d\sigma + \int_{\partial D} N_i N_j \beta ds, \quad b_i = \iint_D N_i f d\sigma + \int_{\partial D} N_i \alpha ds. \tag{11}$$

Система (10) является хорошо обусловленной с диагональным преобладанием и она легко решается одним из точных или итерационных методов.

Алгоритм и программа отлажены на ряде тестовых задач. Рассмотрим одну из них. В круговой области происходит приток к центральной откачивающей скважине с постоянным дебитом *q=4000* $м^3$*/сут,* пробуренной в напорный водоносный пласт мощностью $m = 100\,м$. На границе области, удаленной от центра на *R=2500 м,* поддерживается постоянный напор H_e*=250 м,* коэффициент фильтрации пласта равен *к=5 м/сут.* На рис.1. показаны кривые депрессии в прискважинной зоне, полученные по известной формуле [5] и по предлагаемому методу.

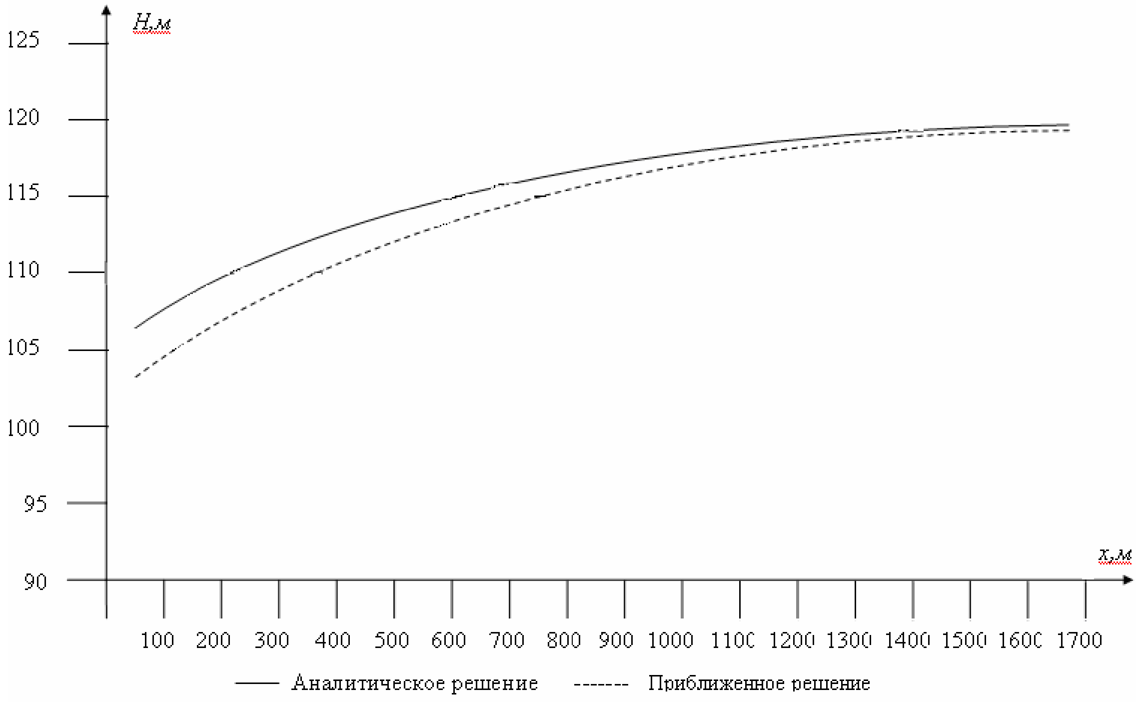

Рис.1 Кривые депрессии в прискважинной зоне.

Литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической функции. –М.: Наука, 1981.-512 с.
2. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М: Мир, 1979.-392 с.
3. Полубаринова – Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. –М.: Наука, 1977.-664 с.
4. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеофизических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. -Бишкек: Илим, 2005.-180 с.
5. Бочевер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М. Основы гидрогеологических расчетов. -М.: Недра, 1969.-368 с.