УДК 512.25

Маданбекова Э.Э., Кашкараева Г.А.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К КЛЕТОЧНО-ДИАГОНАЛЬНОМУ ВИДУ

Разрабатывается алгоритм приведения матриц к клеточно-диагональному виду, а также рассматривается применение метода сингулярного разложения.

Исследование клеточно-диагональных матриц связано в основном с полной проблемой собственных значений. Известно, что любая квадратная матрица подобна клеточно-диагональной матрице, у которой собственные значения различных клеток различные. В частности, такой клеточно-диагональной матрицей является каноническая матрица Жордана. Как уже отмечалось, исследование возмущения матриц общего вида сводится к изучению возмущения клеточно-диагональных матриц.

Рассмотрим клеточно-диагональную матрицу Λ, клетки $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_r$, которые не имеют общих собственных значений. Пусть $\Lambda + \Omega$ — возмущенная матрица. Разобьем матрицу Ω на прямоугольные клетки так, чтобы ее диагональные клетки имели те же размеры, что и соответствующие клетки матрицы Λ. Обозначим

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & 0 \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \Lambda_r \end{bmatrix}, \qquad \Omega = \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & \dots & \Omega_{1r} \\ \Omega_{21} & \Omega_{22} & \dots & \Omega_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Omega_{r1} & \Omega_{r2} & \dots & \Omega_{rr} \end{bmatrix}.$$

Будем приводить матрицу $\Lambda + \Omega$ подобным преобразованием к клеточно-диагональному виду. Это означает, что нужно найти невырожденную матрицу $\hat{X}$ и клеточно-диагональную матрицу $\hat{\Lambda}$, для которых

$$\hat{X}^{-1}(\Lambda+\Omega)\hat{X} = \hat{\Lambda}.$$

Конечно, диагональные клетки матрицы $\hat{\Lambda}$ должны иметь те же размеры, что и клетки матрицы Λ.

Если Ω — нулевая матрица, то $\hat{X}$ — единичная. Поэтому при малых Ω будем искать матрицу $\hat{X}$ в виде $\hat{X} = E + H$, где H — малая матрица. Разобьем матрицу H на клетки H_{ij} -аналогично Ω. Находим

$$\hat{X}^{-1}(\Lambda+\Omega)\hat{X} \cong (E - H)(\Lambda+\Omega)(E+H) \cong \Lambda+\Omega - H\Lambda+\Lambda H.$$

Подберем теперь H так, чтобы с точностью до малых второго порядка правая часть полученного соотношения была бы клеточно-диагональной матрицей, аналогичной Λ. Для этого положим

$$H_{kk} = 0 \qquad (1)$$

для всех k, а внедиагональные клетки $H_{1\kappa}$ определим из уравнений

$$H_{lk}\Lambda_k - \Lambda_l H_{lk} = \Omega_{lk} \qquad (2)$$

Согласно условию матрицы Λ_k и Λ_l не имеют общих собственных значений при $k \neq l$, следовательно, уравнения *(2)* разрешимы. Пусть элементы Ω малы по сравнению с расстояниями между множествами собственных значений матриц Λ_k и Λ_l, при $k \neq l$. В этом случае матрицы H_{lk} будут иметь тот же порядок малости, что и Ω_{lk}. Обозначив через $\hat{\Omega}$ клеточно-диагональную матрицу, составленную из диагональных клеток матрицы Ω получим, что $\hat{\Lambda} \cong \Lambda + \hat{\Omega}$; при этом

$$\hat{\Lambda}_k \cong \Lambda_k + \Omega_{kk} \qquad (3)$$

для всех k.

Формула *(3)* определяет главные члены возмущений собственных значений. Однако аналогичным способом можно получить и более точное соотношение. Пусть матрица H вычисляется согласно *(1)*, *(2)*. Это означает, что она удовлетворяет уравнению

$$\Omega - \hat{\Omega} = H\Lambda - \Lambda H$$

и имеет тот же порядок малости, что и матрица Ω. Далее находим, что с точностью до членов третьего порядка малости

$$(E + H)^{-1}(\Lambda + \Omega)(E + H) = (E - H + H^2 - \dots)(\Lambda + \Omega)(E + H) \cong \Lambda+\Omega - H\Lambda+\Lambda H - \ (\Omega - H\Lambda$$

$+ \Lambda H) + ... + \Omega H = \Lambda + \hat{\Omega} + \Omega H - H\hat{\Omega}$. (4)

Итак, с точностью до членов третьего порядка малости матрица $\Lambda + \Omega$ подобна матрице $\Lambda + \hat{\Omega}$ с возмущением $\Omega H - H\hat{\Omega}$.

Для нахождения клеточно-диагональной матрицы, которой подобна матрица в левой части *(4),* снова воспользуемся асимптотической формулой *(3)*, заменяя матрицы Λ и Ω соответственно матрицами $\Lambda + \hat{\Omega}$ и $\Omega H - H\Omega$. В силу непрерывной зависимости собственных значений от элементов матрицы, клетки $A_{kl}+\Omega_{kk}$ при малых Ω_{kk} не будут иметь общих собственных значений. Поэтому

$$\hat{\Lambda}_k \cong \Lambda_k + \Omega_{kk} + \sum_{\substack{i=l\\ i\neq k}}^{r} \Omega_{ki} H_{ik} \tag{5}$$

Это равенство уже верно с точностью до членов третьего порядка малости.

Исследование осуществляется более эффективно, если решение уравнений *(2)* можно написать в явном виде. Рассмотрим один из важнейших случаев, когда матрица Λ диагональная. Не ограничивая общности, можно считать, что каждая из клеток Λ_k является скалярной матрицей.

Обозначим через λ_i и $\hat{\lambda}_k$, где $1 \le I \le n$, собственные значения матриц Λ и $\hat{\Lambda}$, через ω_{ly} — элементы матрицы Ω. С точностью до величин второго порядка малости $\hat{\lambda}_k$ совпадают с собственными значениями клеток *(3)*, т. е. получаются путем сдвига собственных значений клеток Ω_{kk} на диагональные элементы клеток Λ_k. Известно, что сумма квадратов модулей собственных значений матрицы не превосходит квадрата ее евклидовой нормы, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \hat{\lambda}_i\right|^2 \ \lesssim\ \sum_{k=l}^{n} \left\|\Omega_{kk}\right\|_E^2 \tag{6}$$

и заведомо

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \hat{\lambda}_i\right|^2 \lesssim \left\|\Omega\right\|_E^2 .$$

Полученное соотношение асимптотически верно для любой матрицы Ω. Если же матрицы Λ и Ω эрмитовы, то оно оказывается верным независимо от величины Ω. Для нормальной матрицы $\hat{\Omega}$ асимптотическое неравенство *(6)* переходит в асимптотическое равенство.

Продолжим исследование возмущения клеточно-диагональной матрицы, однако, на этот раз в связи с сингулярным разложением. Новые результаты будут иметь много общего с полученными ранее. Существенное различие заключается лишь в том, что теперь мы рассматриваем только унитарные преобразования матрицы.

Рассмотрим квадратную клеточно-диагональную матрицу P, клетки $P_1, P_2, \dots, P_r$ которой не имеют общих сингулярных чисел. Пусть $P + \Omega$ — возмущенная матрица. Разобьем матрицу Ω на прямоугольные клетки Ω_{ij} так, чтобы ее диагональные клетки имели те же размеры, что H соответствующие клетки матрицы P. Будем приводить матрицу $P + \Omega$ к клеточно-диагональному виду с помощью унитарных преобразований. Это означает, что нужно найти унитарные матрицы $\hat{X}$, $\hat{Y}$ и клеточно-диагональную матрицу $\hat{P}$, для которых

$$\hat{Y}^*(P + \Omega)\hat{X} = \hat{P} .$$

При этом предполагается, что клетки $\hat{P}_k$ матрицы $\hat{P}$ имеют те же размеры, что и клетки матрицы P.

Будем опять искать матрицы $\hat{X}$, $\hat{Y}$ как возмущенные единичные матрицы, т. е. в виде сумм $\hat{X} = E + H$, $\hat{Y} = E + T$, где H и T — малые матрицы. Так как $\hat{X}$ и $\hat{Y}$ должны быть унитарными, то асимптотически H и T будут косоэрмитовыми. Эти матрицы мы разобьем па клетки H_{ij} и T_{ij} по тому же принципу, что и Ω. Имеем

$$\hat{Y}^* (P + \Omega)\ \hat{X} \cong (E - T)\ (P + \Omega)\ (E + H) \cong P + \Omega - TP + PH.$$

Подберем матрицы H и T так, чтобы с точностью до малых второго порядка малости правая часть полученного соотношения была бы клеточно-диагональной матрицей. Для этого положим

$$H_{kk} = T_{kk} = 0 \tag{7}$$

для всех k, а внедиагональные клетки H_{lk}, T_{lk} определим из систем

$$T_{kl}Pl - P_kH_{kl} = \Omega_{kl}, \qquad T_{lk}P_k - P_lH_{lk} = \Omega_{lk}.$$

В силу условий на матрицы H и T: $T_{kl} = -T_{lk}^*$, $H_{kl} = -H_{lk}^*$.

поэтому в действительности будем иметь системы

$$P_k H_{kl} - T_{kl} P_l = -\Omega_{kl}, \quad H_{kl}^* - P_k^* T_{kl} = \Omega_{lk}^* \tag{8}$$

Матрицы P_k и P_l не имеют общих сингулярных чисел при $k \neq l$, следовательно, системы *(8)* разрешимы. Предположим, что элементы Ω малы по сравнению с расстояниями между множествами сингулярных чисел матриц P_k и P_l ,при $k \neq 1$. В этом случае матрицы H_{kl}, T_{kl} будут иметь тот же порядок малости, что и Ω.

Пусть $\hat{\Omega}$ — клеточно-диагональная матрица, составленная из диагональных клеток Ω. Матрицы H и T удовлетворяют уравнению $\Omega - \hat{\Omega} = TP - PH$, поэтому $\hat{P} \cong P + \hat{\Omega}$ при этом, конечно,

$$\hat{P}_k = P_k + \Omega_{kk} \tag{9}$$

для всех k.

Формула *(9)* определяет главные члены возмущений сингулярных чисел, а решения систем *(8)* — главные члены возмущений сингулярных векторов. Снова исследование осуществляется более эффективно, если решение систем *(8)* можно написать в явном виде.

Наиболее широкое примение в теории возмущений находят евклидова и спектральная формы, что объясняется их инвариантностью к унитарным преобразованиям. С целью упрощения записи довольно часто использовались знаки приближенных равенств и неравенств. Если они связывают какие-либо выражения, то предполагается, что написанные соотношения асимптотически верны с точностью до указанных в тексте членов.

Исследование задач линейной алгебры сводится к изучению задач с простыми матрицами – диагональными и клеточно-диагональными матрицами, которые часто оказываются плохообусловленными.

Для решения невырожденных матриц используется сингулярное разложение. Оно является наиболее надежным методом приближенного решения, который основан на матричной факторизации. Для этого была составлена программа на языке Фортран и отлажена на тестовом примере.

Результаты тестовых примеров

	Данная матрица	Результаты
1	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X_1=1$, $X_2=2$, $X_3=3$
2	$\begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 6.1 & 7.1 & 8.1 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$X_1=-0.006997$, $X_2=-0.2082274$, $X_3=-0.006997$
3	$\begin{pmatrix} 1.0 & 5.0 & 6.0 \\ 2.0 & 7.0 & 4.0 \\ 3.0 & 8.0 & 3.0 \\ 4.0 & 9.0 & 2.0 \\ 5.0 & 10.0 & 1.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28.0 \\ 28.0 \\ 28.0 \\ 28.0 \\ 28.0 \end{pmatrix}$	$X_1=-0.000005$, $X_2=2.545457$, $X_3=2.545453$

4	$\begin{pmatrix} 5.0 & 5.0 & 5.0 \\ 5.0 & 4.89 & 5.0 \\ 5.0 & 5.0 & 4.9 \\ 5.0 & 5.0 & 5.0 \\ 5.0 & 5.0 & 5.0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.0 \\ 5.0 \\ 1.0 \\ 2.0 \\ 0 \end{pmatrix}$	X_1=*12105.98* , X_2=*-13.450810*, X_3=*-12092.06*

Литература

1. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной матоматики. –М.: Наука, 1970. – 293 с.
2. Фадеев В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. –М.: Наука, 1987. – с. 45-49.
3. Боглаев Ю.П. Вычислительная математика и программирование. –М.: Высшая школа, 1990. – с. 96-104.
4. Воеводин В.В. Ошибки округления в алгебраических процессах. –М.: Наука,1968. -с. 24-26.