УДК 517.2 + 519.3

Шарипов К.С.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

В статье дан новый способ нахождений экстремалей функционалов.

Рассмотрим определенный интеграл вида

$$J = \int_{to}^{T} F\,(t\,,\,y(t)\,,\,y'(t))\,dt \qquad (1)$$

Известно что предметом вариационного исчисления является отыскание неизвестной функции y(t), удовлетворяющей заданным, закрепленным (числовым) граничным условиям

$$y\,(to) = A\,, \quad y\,(T) = B$$

такую, что на ней функционал принимал максимальное или минимальное значение.

Данная задача ранее была решена уравнением Эйлера.

Нами предложен новый способ оптимизации функционала (1).
Чтобы оптимизировать функционал поставлены задачи вида

1) построить совокупность решений задачи управления

$$y' + p(t)\,y = q\,(t)\,, \quad t \,€ [to\,,T] \qquad (2)$$

свободные граничные условия

$$y(to) = yo\,, \qquad y(T) = y_1 \qquad (3)$$

где p(t) – заданная непрерывная функция, q(t) – неизвестная управляющая непрерывная функция

2) из свободных бесконечных граничных условий (3) найти таких граничных условий

$$y(to) = yo = yo^{*}\,,\ \ y(T) = y_1 = y_1^{*}\,,$$

что соответствующая им функция из совокупности решений задачи управления (2) – (3), максимизировала или минимизировала данного функционала (1).

Видно что нам предстоит найти совокупность функции y(t), удовлетворяющие граничным условиям (2).

С этой целью построим решение задачи управления [3-5]

$$y' + p(f)\,y = q\,(t)\,, \quad t\,€\,[to\,,\,T\,] \qquad (4)$$

граничные условия (2)

$$y(to) = yo \quad, \quad y(T) = y_1 \qquad (5)$$

показано, что при внешней силы равной

$$q(t) = \frac{y_1 - y_{0}e^{\int_{to}^{T} p\,(s)\,ds}}{\int^{T} e^{-\int_{s}^{T} p\,(i)\,di} f(s)\,ds}\, f\,(t)$$

to

где f(t) – любая непрерывная функция, задача управления (4) – (5) имеет единственное решение вида

$$y = y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + \frac{y_1 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)\,ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(i)\,di} f(s)\,ds} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(i)\,di} f(s)\,ds \qquad (6)$$

Считая (5) свободными граничными условиями, из (6) имеем бесчисленное множество кривых линий.

Нами предложено из совокупности кривых линий, отыскать кривую линию, такую, чтобы на ней функционал (1) принимал максимальное и минимальное значения относительно y_0, y_1.

Для чего подставим (6) в функционал (1). Тогда имеем

$$J = \int_{t_0}^{T} F\Bigg[t,\; y_0 e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + \frac{y_1 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)\,ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(i)\,di} f(s)\,ds} \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(i)\,di} f(s)\,ds,$$

$$- y_0 p(t) e^{\int_{t_0}^{t} p(s)\,ds} + \frac{y_1 - y_0 e^{\int_{t_0}^{T} p(s)\,ds}}{\int_{t_0}^{T} e^{-\int_{s}^{T} p(i)\,di} f(s)\,ds} \left(f(t) - p(t) \int_{t_0}^{t} e^{\int_{s}^{t} p(i)\,di} f(s)\,ds \right) dt \qquad (7)$$

Функционал (7) дает нам функцию, которая зависит от граничных условий y_0 и y_1 Она в области

$$-\infty < y_0 < \infty \;,\; -\infty < y_1 < +\infty \qquad (8)$$

дает нам непрерывную функцию. Пусть она имеет непрерывную производную по y_0 и y_1 до требуемого порядка.

Итак, на кривой линии (6) функционал (1) дает нам функцию двух переменных y_0 и y_1, ее будем называть целевой функцией двух переменных ординат y_0 и y_1.

Целевую функцию (7) обозначим так

$$J = J(y_0, y_1), \qquad -\infty < y_0 < \infty \;,\; -\infty < y_1 < +\infty \qquad (9)$$

<u>Экстремум целевой функции (9).</u>

Определение экстремума целевой функции.

Будем говорить, что целевая функция $J(y_0, y_1)$ имеет максимум минимум $J(y_0^*, y^{*1})$ в точке $p(y_0^*, y^{*1})$, если для всех отличных от р точек $p(y_0, y_1)$ в достаточно малой окрестности точки р выполнено неравенство

$$J(y_0^*, y^{*1}) > J(y_0, y_1) \qquad (10)$$

или соответственно

$$J(y_0^*, y^{*1}) < J(y_0, y_1) \qquad (11)$$

Максимум или минимум целевой функции (9) называется его экстремумом.

<u>Оптимальное частное решение</u>

Определение 1. Координаты yo^{*} , y_1 точки максимума или минимума будем называть максимально граничными условиями или минимально граничными условиями.

Определение 2. Из совокупности (6) при

$$y = yo^{*} \qquad y_1 = y_1^{*} \tag{12}$$

выделенное частное решение будем называть максимально оптимальным решением или минимально оптимальным решением задачи управления (4)-(5).

Итак оптимальное решение

$$Y = yoe^{\int_{to}^{t} p(s)\,ds} + \frac{y_1 - yoe^{\int_{to}^{T} p(s)\,ds}}{\int_{to}^{T} e^{\int_{s}^{T} p(i)\,di} f(s)\,ds} \int_{to}^{t} e^{\int_{to}^{t} p(i)\,di} f(s)\,ds ,\ t\ [to, T] \tag{13}$$

называется экстремалью функционала (1).

Значит, на ней функционал (1) как целевая функция имеет максимальное и минимальное значения.

Из выше приведенного следует, что задачу вариационного исчисления сформулируем так: при каких граничных условиях (5) решение управления (4) доставляет максимальное и минимальное значения функционалу (1) ?

Чтобы найти точки максимума и минимума целевой функции (9), используем необходимые условия экстремума целевой функции, достаточные условия экстремума целевой функции и условный экстремум целевой функции из математического анализа, а также математического программирования [5].

<u>Необходимые условия экстремума целевой функции</u>

Точки, в которых дифференцируемая целевая функция (9) $(J(yo\ ,\ y_1))$ может достигать экстремума, находятся путем решения системы уравнений

$$\begin{aligned} J_{yo}(y_o, y_1) &= 0 \\ J_{y1}(y_0, y_1) &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Это и есть необходимые условия экстремума.

<u>Достаточные условия экстремума функции (9)</u>

Пусть точка р (yo^* , y_1^*) – стационарная точка целевой функции (9) :

$$\begin{aligned} J_{yo}(yo^{*}, y1^{*}) &= 0 \\ J_{y1}(y_0^{*}, y_1^{*}) &= 0 \end{aligned}$$

Теперь вычислим вторые производные целевой функции (9) в точке $P(yo^{*} , y_1^{*})$

$$A = J_{y0y0}(yo^{*} , y_1^{*}) ,\ B = J\, yoy_1 (yo^{*} , y_1^{*}) , C = J\, y_1\, y_1 (y_0^{*} , y_1^{*}) \tag{16}$$

Составим дискриминант

$$\Delta = AC – B^2 \tag{17}$$

Тогда, если $\Delta > 0$ то целевая функция (9) имеет экстремум в точке р (yo^{*}, y_1^{*}) а именно максимум, если $A< 0$ и минимум если $A>0$.

Итак

, если целевая функция (9) имеет максимум и минимум то функционал (1) на кривой линии (6) имеет экстремум при граничных условиях

$$yo = yo^* \quad y_1 = y_1^* \tag{18}$$

Эти граничные условия (18) являются оптимальными граничными условиями.
В этом случае кривая линия (13) дает нам оптимальную кривую, называемую экстремалью функционала (1), которая соединяет точки

$$Дo\ (yo^*,\ y_1^*)\ и\ Д_1\ (yo^*,\ y_1^*).$$

Если целевая функция (9) имеет n максимумов и минимумов, то функционал (1) имеет n экстремалей.

Условный экстремум целевой функции (9)

Нахождение условного экстремума целевой функции относительно некоторой функции выражается задачей вида: Найти и максимальное и минимальное значения функционала (9) при условий, что ее переменные ординаты yo и y_1 удовлетворяют соотношению

$$g\ (yo,\ y_1) = b \tag{19}$$

Чтобы решить поставленную задачу, составим функцию Лагранжа

$$E = J\ (yo,\ y_1) + \lambda\ (g\ (yo,\ y_1) - b). \tag{20}$$

Находим частные производные

$$\begin{gathered} E_{y0} = J_{yo}\ (yo,\ y_1) + \lambda\ g_{y0}\ (yo,\ y_1) \\ E_{y1} = J_{y1}\ (yo,\ y_1) + \lambda\ g_{y1}\ (yo,\ y_1) \\ E_{\lambda} = g\ (yo,\ y_1) - в \end{gathered} \tag{21}$$

Составим систему уравнений вида

$$\begin{aligned} &J_{yo}\ (yo,\ y_1) + \lambda\ g_{y0}\ (yo,\ y_1) = 0 \\ &J_{y1}\ (yo,\ y_1) + \lambda\ g_{y1}\ (yo,\ y_1) = 0 \\ &g\ (yo,\ y_1) - b = 0 \end{aligned} \tag{22}$$

Решив систему 22 получаем все точки, в которых целевая функция (9) может иметь экстремальные значения. Дальнейшие исследования проводим с помощью достаточного условия экстремума.

В этом случае находим условно – максимальное и условно – минимальное решения, которые являются условными экстремалями функционала (9).

Математическое программирование

Для исследования функционала (9) на экстремум используем теорию математического программирования [6].

Если $J\ (yo,\ y_1)$ и $g\ (y_0,\ y_1)$ – линейные функции, то задача

$$J = J\ (y_0,\ y_1),\ \ g_i\ (y_0,\ y_1) \leq bi \qquad i = 1,\ m$$

дает нам задачу линейного программирования вида

$$F = c_1\, y_0 + c_2\, y_1, \tag{23}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} \alpha_1\, y_0 + \alpha_2\, y_1 \leq d_0 \\ \alpha_3\, y_0 + \alpha_4\, y_1 \leq d_1 \\ \alpha_5\, y_0 + \alpha_6\, y_1 \leq d_2 \\ y_0 \geq 0\ \ y_1 \geq 0 \end{gathered} \tag{24}$$

В этом случае находим точки максимума и минимума.

Значит можем построить максимальные и минимальные экстремали функционала (9).

Квадратическое программирование

Пусть функционал (9) представим в виде

$$J = J(y_0\,,\, y_1) = c_1\, y_0^2 + c_2\, y_1^2 + c_3\, y_0\, y_1 + c_4\, y_0 + c_5\, y_1 \tag{25}$$

Это квадратичная форма (25) функционала (9) исследуется на седловую точку экстремума при ограничениях

$$\begin{gathered} \alpha_1\, y_0 + \alpha_2\, y_1 \le d_0 \\ \alpha_3\, y_0 + \alpha_4\, y_1 \le d_1 \\ y_0 \ge 0 \;\; y_1 \ge 0 \end{gathered} \tag{26}$$

Чтобы найти седловую точку целевой функции (9) при ограничениях (26), используем рекомендации, приведенные в [6 стр. 203].

По теореме Куна – Таккера целевая функция (25)
при ограничениях (26) имеет седловую точку экстремума. Ее координаты обозначим так

$$y_0 = \bar{y}_0\,, \quad y_1 = \bar{y}_1 \tag{27}$$

Условия (27) будем называть седловыми граничными условиями.

Подставляя (27) в (6) имеем так называемое седловое решение

$$y = \bar{y}_0\, e^{\int_{to}^{t} p(s)\,ds} + \frac{y_1 - y_{0}e^{\int_{to}^{T} p(s)\,ds}}{\int_{to}^{T} e^{T - \int_s P(i)\,di} f(s)\,ds} \int_{to}^{t} e^{-\int_s^t P(i)\,di} f(s)\,ds \tag{28}$$

Оно дает нам седловой экстремаль функционала (1) (на кривой линии (28)).

На остальные методы построения экстремалей функционалов (9) как нелинейная целевая функция не останавливаемся, а только указываем на учебное пособие [6] (см. стр. 269).

Отметим лишь, что оптимизирующую кривую можем находить как решение обратной задачи: по заданному решению

$$y = \varphi(t), t \in [t_0, T]$$

удовлетворяющему условиям $\varphi(t_0) = y_0, \varphi(T) = y_1$ найти управляющую функцию q(t)?

В этом случае q(t) определяется как решение интегрального уравнения Вольтерра- первого рода вида

$$\int_t^t \ell^{-\int_s^t p(i)di} q(s)ds = \varphi(t) - y_0 \ell^{-\int_{t0}^t p(s)ds}$$

Литература

1. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление. – М., 1961.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике – М.: Наука , 1978.
3. Шарипов С. Шарипов К.С. Основные теоремы дифференциального исчисления для урчуктных (разрывных) функций // Вестник ИГУ, №9, 2003.
4. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнений // Вестник ИГУ, №12, 2004.
5. Шарипов С. Шарипов К.С. Усовершенствование производных Ньютона-Лейбница и их применение // Вестник ИГУ, №17, 2006.
6. Акулич Н.Л. Математическое програмирование в примерах и задачах –М: Высшая школа, 1986.