УДК 517.947.537

Тогочуев А. Ж.

ЫГУ им. К. Тыныстанова

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

Используя теоремы разделимости, доказывается существование решений с ограниченной производной нелинейной системы дифференциальных уравнений с диагональной матрицей.

Рассмотрим систему нелинейных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &-U_1''' + (|x| + \|U\| + 1)U = f_1(x) \\ &-U_2''' + (|x| + \|U\| + 1)U = f_2(x) \\ &------------------ \\ &-U_n''' + (|x| + \|U\| + 1)U = f_n(x) \end{aligned} \qquad (1)$$

Основным результатом этой работы является доказательство существования решений системы (1), имеющую ограниченную производную третьего порядка.

Пусть E_n n-мерное пространство Евклида. Обозначим через $H = E_n(R,R_n)$ евклидово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(R, R_n)$- множество финитных бесконечно гладких вектор-функций определенных на $R=(-\infty,\infty)$ со значением в R_n по норме

$$\| f(x)\|_{\mathrm{H}} = \Big(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Введем обозначения:

$$Q(x,U) = \begin{pmatrix} |x|+\|U\|+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |x|+\|U\|+1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |x|+\|U\|+1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdots \\ U_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

Тогда система (1) записывается в операторном виде

$$-U''' + Q(x,U)U = f(x) \qquad , x \in R,\ f \in E_n(R,R_n) \qquad (2)$$

К операторному уравнению (2) используем теорему из работы [3].

Теорема [3]**.** Пусть Q (x,U) непрерывная по совокупности переменных операторная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

а) Для почти всех x и U операторы Q (x, U) самосопряжены и являются обратным к вполне непрерывным операторам.

б) $\langle Q(x,U)f, f \rangle_{En} \geq s(x) \langle f, f \rangle_{En}$

где s(x) положительная функция, стремящаяся к $+\infty$ при $|x| \to +\infty$.

в) $$\sup_{|x-z|\le 2} \ \sup_{\|C_1 - C_2\| H \le 2A} \left\{ \begin{aligned} &\left\| [Q(x,c_1) - Q(t,c_2)][Q(x,c_1) + \lambda E]^{-1} \right\|_{En} + \\ &+ \left\| [Q(t,c_2 - Q(x,c_1)][Q(t,c_2) + \lambda E]^{-1} \right\|_{En} \end{aligned} \right\} \le T(A),$$

где $T(A) \le o(1)$ при $\lambda >> 1$ для любого конечного числа A.

Тогда существует число $\mu(A,f)$ и при $\lambda > \mu(A,f)$ уравнение (2) для любой правой части $f(x) \in H$ имеет решение $U(x) \in H$ такое, что $U''' \in$ H.

В силу этой теоремы для доказательства существования решений системы (1) с ограниченной производной третьего порядка, нам остается проверить условия а,б,в для матрицы Q(x,U).

Условие **а)** очевидно, т.к Q(x,U) диагональная матрица порядка n и det Q(x,U)$\neq 0$.

Проверяем условие **б):**

$$Q(x,U)\,f=\begin{pmatrix} |x|+\|U\|+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |x|+\|U\|+1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & |x|+|U|+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix}=(|x|+\|U\|+1)\cdot\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ - \\ f_n \end{pmatrix}=$$

$$=(|x|+\|U\|+1)f.$$

Тогда

$$\langle Q(x,U)\,f\,,\,f\rangle_{En}=\langle(|\,x\,|+\|\,U\,\|+1)\,f\,,\,f\rangle_{En}=(|x|+\|U\|+1)\langle f\,,\,f\rangle_{En}$$

Отсюда

$$\langle Q(x,U)\,f\,,\,f\rangle_{En}\geq |x|\,\langle f\,,\,f\rangle_{En}$$

Так, как |x| - положительная функция и $|x|\to+\infty$ при $x\to\infty$, поэтому условие **б)** выполнено.

Чтобы проверить условие **в)** нужно найти обратную матрицу $[Q(x,c_1)+\lambda E]^{-1}$.

Так, как

$$\det[Q(x,c_1)+\lambda E]=\begin{vmatrix} |x|+\|c_1\|+1+\lambda & 0 & ... & 0 \\ 0 & |x|+\|c_1\|+1+\lambda & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & |x|+\|c_1\|+1+\lambda \end{vmatrix}...=$$

$=(|x|+\|c_1\|+1+\lambda)^n$

и алгебраические дополнения.

$$Q_{ij}=\begin{cases}(|\,x\,|+\|\,c_1\,\|+1+\lambda\,)^{n-1} & при\quad i=j \\ 0 & при\quad i\neq j\end{cases}\qquad (i,j=1,2\dots,n)$$

То

$$[Q(x,c)+\lambda E]^{-1}=\frac{1}{(|\,x\,|+\|\,c\,\|+1+л)}{}^{n}\,*$$

$$*\begin{pmatrix} |(x|+\|c_1\|+1+\lambda)^{n-1} & 0 & ... & 0 \\ 0 & |(x|+\|c_1\|+1+\lambda)^{n-1} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & (|x|+\|c_1\|+1+\lambda)^{n-1} \end{pmatrix}=\frac{1}{|x|+\|c_1\|+1+\lambda}E$$

Теперь оценим норму

$$\| [Q(x,c_1)-Q(t,c_2)]\, [Q(x,c_1)+\lambda E] \|_{En}.$$

Так, как

$$Q(x,c_1)-Q(t,c_2)=(|x|-|t|+\|c_1\|-\|c_2\|)E.$$

Тогда

$$\| [Q(x,c_1)-Q(t,c_2)]\, [Q(x,c_1)+\lambda E] \|_{En} =$$

$$= \left\| \frac{|x|-|t|+\|c_1\|-\|c_2\|}{|x|+\|c_1\|+1+\lambda} E \right\|_{E_n} = \sqrt{3}\,\frac{|x|-|t|+\|c_1\|-\|c_2\|}{|x|+\|c_1\|+1+\lambda} \le \sqrt{3}\,\frac{|x-t|+\|c_1-c_2\|}{1+\lambda}.$$

Отсюда

$$\sup_{|x-t|\le 2}\ \sup_{\|C_1-C_2\|\le 2A} \left\{ \left\| [Q(c_1)-Q(c_2)][Q(x,c_1)+\lambda E]^{-1} \right\|_{E_n} + \left\| [Q(t,c_2)-Q(x,c_1)][Q(t,c_2)+\lambda E]^{-1} \right\|_{E_n} \right\} =$$

$$= \sup_{|x-t|\le 2}\ \sup_{\|C_1-C_2\|\le 2A} 2\sqrt{3}\,\frac{|x-t|+\|c_1-c_2\|}{1+\lambda} \le 2\sqrt{3}\,\frac{2+2A}{1+\lambda} = 4\sqrt{3}\,\frac{1+A}{1+\lambda} = T(A).$$

Число T(A)= $4\sqrt{3}\,\frac{1+A}{1+\lambda}$ ограничено при любом конечном А и T(A)<o (1) при λ >>1.

Итак, матрица Q(x,U) удовлетворяет всем условиям вышеуказанной теоремы.
Поэтому система (1) имеет решение с ограниченной производной третьего порядка т.е. $U''' \in H$.

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. -М.: Наука, 1969.
2. Ланкастер П. Теория матриц.- М.: Наука, 1979.
3. Тогочуев А.Ж., Муратбеков М.Б. Разделимость дифференциального оператора нечетного порядка с операторным коэффициентом.- В кн.: Тезисы докладов конференции математиков и механиков Киргизии, посвященной 70-летию Великого Октября,1987.