

Мурзакматов М.У., Султанбаев Э.А.

БГУ им. К. Тыныстанова

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Разрабатывается алгоритм решения плоской задачи теплопроводности с краевым условием третьего рода методом конечных элементов, который апробирован на решении ряда тестовых примеров.

Распространение тепла в плоской области D описывается следующим уравнением теплопроводности [1]

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$(x, y) \in D, \quad t > 0$$

с начальным

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in D, \quad (2)$$

и граничным

$$k \frac{\partial u}{\partial n} + \beta u = \alpha(x, y, t), \quad (x, y) \in \Gamma, \quad t > 0 \quad (3)$$

условиями. В задаче (1) – (3) приняты следующие обозначения:

$u(x, y, t)$ – температура (град.); $k(x, y)$ – коэффициент теплопроводности $\left(\frac{Вт}{м \cdot К} \right)$; c

– удельная теплоемкость $\left(\frac{Дж}{кг \cdot К} \right)$; ρ – плотность среды ($кг/м^3$); $f(x, y, t)$ – плотность

тепловых источников $\left(\frac{Вт \cdot град}{м^3 \cdot К \cdot сек} \right)$; $\varphi(x, y)$ – начальное распределение температуры

(град.); $\beta(x, y, t)$ и $\alpha(x, y, t)$ – заданные функции; в случае первой краевой задачи считаем, что $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, $\beta = 1$, $\alpha(x, y, t)$ – заданная температура на границе области; $\Gamma = \partial D$ – граница области D ; $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по нормали к границе области.

Выбрав шаг по времени $\Delta t = t_s - t_{s-1}$, $s = 1, 2, \dots$, приближенно заменяем производную по времени разностным отношением

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u(x, y, t_s) - u(x, y, t_{s-1})}{\Delta t}$$

с весом σ ($0 < \sigma \leq 1$) и представим уравнение (1) в виде

$$-\sigma \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + Qu = F, \quad (4)$$

где

$$u = u(x, y, t_s), \quad \bar{u} = u(x, y, t_{s-1}), \quad Q = c\rho / \Delta t,$$

$$F = \sigma f(x, y, t_s) + (1 + \sigma) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \right) + f(x, y, t_{s-1}) \right] + Q\bar{u},$$

$$s = 1, 2, \dots$$

Такая схема, как известно, имеет при $\sigma = 1/2$ точность $o(\Delta t^2)$ [2].

Задачу (4), (2), (3) решаем методом конечных элементов [2,3]. Для этого разобьем область D на m треугольных элементов (рис. 1) и на элементарном треугольнике (e) с вершинами (x_i, y_i) , (x_j, y_j) , (x_k, y_k) представим функцию $u^{(e)}(x, y, t)$ в виде

$$u(x, y, t) = N_i(x, y)u_i(t) + N_j(x, y)u_j(t) + N_k(x, y)u_k(t), \quad (5)$$

где

$$N_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y,$$

$$N_j(x, y) = a_j + b_j x + c_j y,$$

$$N_k(x, y) = a_k + b_k x + c_k y,$$

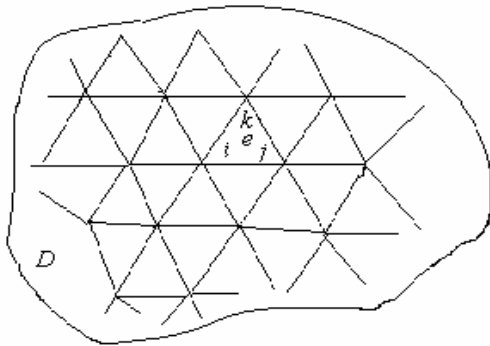


Рис. 1.

$a_i = (x_j y_k - x_k y_j) / \Delta_e$, $b_i = (y_j - y_k) / \Delta_e$,
 $c_i = (x_k - x_j) / \Delta_e$ и т.д.; остальные коэффициенты получаются с помощью круговой подстановки индексов i, j, k ;

$$\Delta_e = \det \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} -$$

удвоенная площадь треугольника (e); $u_i(t)$, $u_j(t)$, $u_k(t)$ - искомые значения функции $u(x, y, t)$ в точках i, j, k соответственно.

Составляя для каждого элемента (рис.1) выражения вида (5) и суммируя их по всем элементам, получаем разложение для искомой функции:

$$u(x, y, t) \approx u_n(x, y, t) = \sum_{e=1}^m u^{(e)}(x, y, t) = \sum_{j=1}^n N_j(x, y) u_j(t), \quad (6)$$

где n - число всех узлов сетки.

Подставляем теперь в задаче (4), (2), (3) вместо u функцию $u_n(x, y, t)$ и применяем к ней обобщенный принцип Галеркина:

$$\iint_D N_i \left[-\sigma \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial u_n}{\partial x} \right) - \sigma \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) + Q u_n - F \right] dx dy +$$

$$+ \int_{\Gamma} N_i \left(\sigma k \frac{\partial u_n}{\partial n} + \sigma \beta u_n - \tilde{\alpha} \right) ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

где $\tilde{\alpha} = \sigma \alpha + (1 - \sigma) \left(\tilde{\alpha} - k \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} - \tilde{\beta} \tilde{u} \right)$, $\tilde{\alpha} = \alpha(x, y, t_{s-1})$, $\tilde{\beta} = \beta(x, y, t_{s-1})$.

Используя формулу Грина, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \sigma \iint_D k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial u_n}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D Q N_i u_n dx dy - \\ - \iint_D N_i F dx dy + \sigma \int_{\Gamma} N_i \beta u_n ds - \int_{\Gamma} N_i \tilde{\alpha} ds = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

После подстановки вместо функции $u_n(x, y, t)$ ее разложения (6) приходим к системе линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} a_{ij} = \sigma \iint_D k \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) dx dy + \iint_D Q N_i N_j dx dy + \sigma \int_{\Gamma} \beta N_i N_j ds, \\ b_i = \iint_D F N_i dx dy + \int_{\Gamma} \tilde{\alpha} N_i ds. \end{aligned}$$

Для вычисления коэффициентов и правых частей системы (8) интегралы по области разбиваются на m интегралов по треугольникам и вычисляются лишь по элементам, номера вершин которых соответствуют индексам коэффициентов. То же самое можно сказать и о контурных интегралах.

Во всех алгебраических уравнениях коэффициенты зависят от координат вершин треугольников, что дает возможность автоматизировать построение расчетной сетки, необходимой для составления алгебраических уравнений.

Вдоль отрезка прямой, соединяющей узловые точки, базисная функция изменяется линейно и поэтому она однозначно определяется двумя узловыми значениями независимо от элемента, в котором рассматривается. Такая непрерывность является необходимым условием минимизации функционала, так как при выполнении этого условия подынтегральное выражение из (3) на некоторых линиях могло бы терпеть разрыв.

Вычислив коэффициенты a_{ij} и b_j , получим замкнутую систему алгебраических уравнений, матрица которой имеет ленточную структуру и является симметричной. Такое свойство матрицы значительно экономит память ЭВМ, так как в памяти вычислительного устройства вместо полной матрицы записываются только ленточные ненулевые коэффициенты. Таким образом, вместо $n \times n$ коэффициентов запоминается не более $4n$ элементов квадратичной матрицы, где n – порядок матрицы. Следовательно, решаемая система уравнений – разреженная.

Каждый узел сетки является общей вершиной нескольких элементов (от 2 до 6 и более), поэтому матрица системы (8) не только симметрична, но и имеет диагональное преобладание, что позволяет применять для ее решения точные методы (например, метод Гаусса).

Приближенные расчеты по изложенному алгоритму показали эффективность метода конечных элементов при решении краевых задач теплопроводности со сколь угодно сложной геометрией области.

Используя полученные значения температуры в качестве начального условия, решаем задачу (1)-(3) для следующего временного слоя и т.д.

Алгоритм решения задачи апробирован на решении ряда тестовых примеров. Приведем один из них. В центре круговой области радиуса R расположен источник тепла. Среда считается однородной. Тепло распространяется от центра к краям области и на ее границе температура принимает нулевое значение. В табл. 1 показаны точные и приближенные значения в точках, расположенных на различных расстояниях от источника тепла.

Таблица 1

Точные и приближенные значения температуры

| | Значения температуры | 0 | 0,4R | 0,6R | 0,8R | R |
|------|----------------------|-----------|-----------|-----------|----------|----------|
| 0.01 | Точные | 24.751250 | 20.791050 | 12.623140 | 8.910448 | .000000 |
| | Приближенные | 24.123020 | 20.235070 | 12.484700 | 9.018810 | 0.021977 |
| 0.50 | Точные | 15.163270 | 12.737150 | 7.733267 | 5.458776 | 0.000000 |
| | Приближенные | 14.350060 | 11.250418 | 6.730240 | 6.907444 | 0.042324 |
| 1.00 | Точные | 9.196992 | 7.725473 | 4.690466 | 3.310917 | 0.000000 |
| | Приближенные | 8.356948 | 6.803452 | 3.508174 | 2.763756 | 0.069209 |

Литература

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. –М.: Наука, 1972.–735 с.
2. Самарский А.А. Теория разностных схем. –М.: Наука, 1977. –656 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. –М.: Мир, 1979. – 392 с.
4. Джаныбеков Ч., Мурзакматов М.У. Методы идентификации гидрогеологических параметров и прогнозирования процессов загрязнения подземных вод. –Бишкек: Илим, 2005. –180 с.