О НЕКОТОРЫХ ВЕЛИЧИНАХ ФИЗИКИ И МАТЕМАТИКИ

У.С. Сейталиев, С.К.Кадышев
Кыргызский национальный университет им. Ж.Баласагына, г. Бишкек

«Мышление состоит столько же в разложении предметов сознания на их элементы, сколько в объединении связанных друг с другом элементов в единство. Без анализа нет синтеза», - писал Ф.Энгельс. К тому же, последовательный анализ и синтез, как правило, повышают системность наших знаний. На самом деле, чтобы указать истину, необходимо повысить системность знаний о предмете, как бы подняться над частностью и развязать глаза, чтобы возникла новая перспектива знаний.

Студенты должны уметь устанавливать всесторонние связи между понятиями и теориями, отражающие объективно существующие отношения в природе. Объектом чистой математики является весьма реальный материал: пространственные формы и количественные отношения материального мира. Тот факт, что этот материал принимает чрезвычайно абстрактную форму, может лишь слабо затушевать его происхождение из внешнего мира. Но чтобы быть в состоянии исследовать эти формы и отношения в чистом виде, необходимо совершенно отделить их от их содержания, оставить это последнее в стороне, как нечто безразличное. Из этих соображений вытекает, что основным методом математики является метод абстракции. Её предметной областью является вся действительность, другими словами, нет ни одной материальной области, в которой не проявились бы закономерности, изучаемые математикой. Таким образом, математика изучает количественные отношения и пространственные формы, как существующих областей объектов, так и тех, которые можно «сконструировать». Физика, как наука, имеет своей предметной областью фундаментальные свойства материи в двух её формах – в форме вещества и поля и главным объектом физики становятся фундаментальные явления природы и описывающие их законы. Взаимосвязи математики и физики определяются, прежде всего наличием общей предметной области, изучаемой ими, хотя и с различных точек зрения. Взаимосвязь математики и физики выражается во взаимодействии их идей и методов. Физика ставит задачи и создает необходимые для их решения математические идеи и методы, которые в дальнейшем служат базой для развития математической теории.

Понятие "величина" имеет особое значение для формирования и развития у студента теоретического мышления. Через понятие величины, описывающей реальные свойства предметов, происходит познание окружающей действительности, создание целостного представления о мире, в котором мы живем. Знания и умения, связанные с величинами, являются основой для дальнейшего изучения математики, физики, экономики, астрономии, географии, биологии, химии и других наук. Поэтому студенты, кроме полученных знаний созерцанием, должны иметь представление о величинах, как о математических понятиях, ее свойствах, о зависимостях между величинами, о системе измерения и воспроизведения величины. А для этого студент должен иметь представление о логическом обосновании понятий скалярной, векторной, тензорной, спинорной величин, знать их свойства, зависимости между величинами, процессы измерения и воспроизведения этих величин через их генезис, позволяющий излагать научные знания от конкретного к абстрактному.

Свойства, присущие всем предметам некоторого множества, называются общими. Общее свойство, значения которого характеризуются *количественно* (или отвечают на вопрос "сколько?"), называется величиной

Таким образом, понятие "величина" возникло как абстракция в ходе выделения количественных отношений на множестве значений свойства.

Для описания многих физических и геометрических фактов обычно вводится та или иная система координат, что позволяет описывать различные объекты при помощи одного или нескольких чисел, а соотношения между объектами - равенствами, связывающими эти числа или системы чисел. Некоторые из величин, называемые скалярными (масса, температура и т. д.), описываются одним числом, причём значение этих величин не изменяется при переходе от одной системы координат к другой (мы рассматриваем здесь физические явления с точки зрения классической физики). Другие величины - векторные (сила, скорость и т. д.), описываются тремя числами (компонентами вектора), причём при переходе от одной системы координат к другой компоненты вектора преобразуются по определённому закону. Наряду со скалярными и векторными величинами встречаются во многих вопросах физики и геометрии величины более сложного строения. Эти величины, называемые тензорными, описываются в каждой системе координат несколькими числами (компонентами тензора), причём закон преобразования этих чисел при переходе от одной системы координат к другой более сложен, чем для векторов Здесь термин был первоначально связан с малыми растяжениями (и сжатиями), возникающими при упругой деформации (откуда и название "Тензор."), а затем перенесён в другие области механики, так появились Тензор деформации, Тензор напряжения, Тензор инерции и др.

Как известно величины, имеющие модуль и направление, характеризующие скорость, ускорение и т.д. получили название вектор. Векторы в механике имеют физическое значение и характеризуют движение тела в абсолютном пространстве. По этой причине в физике принято рядом со словом вектор всегда упоминать, что характеризует вектор. В результате, векторы имеют конкретное название: вектор скорости тела, вектор ускорения тела, вектор силы и т.д.

Векторы позволили наглядно представить процесс движения тел, которое изучается в различных системах координат.

Раньше считалось, что положение тел в системе координат задается с помощью скалярных величин - координат. Расстояние между точками, среднюю скорость движения тела также принято считать скалярными величинами. Если в системе координат задаются векторы, то проекции векторов на оси координат считаются скалярными величинами.

Кроме векторов появились так называемые псевдовекторы, как результат векторного или скалярного произведения двух и даже трех векторов. Псевдовекторы формально (условно) характеризуют величину и направление некоторых характеристик движения тела, например, угловую скорость, и угловое ускорение при вращательном движении.

Если проанализировать все предыдущие замечания, то придем к выводу о существовании двух классов векторов, не считая класса псевдовекторов.

Первый класс векторов - это векторы, которые характеризуют движение тела (реальные векторы).

Второй класс векторов - это векторы, которые вводятся вместе с системой координат и связывают систему координат с телом (придуманные векторы). (Они приводят к появлению псевдовекторов.).

Вектор - это не абстракция чего-то нереального, а реальная характеристика физического процесса. Именно такое понимание вектора в механике является единственно правильным.

Понятие тензора

При первом знакомстве с тензорным исчислением легко встретить барьер – не совсем понятно на интуитивном уровне, что такое тензор вообще и что принято считать тензором, а что - нет? Дело в том, что самые простейшие тензоры, скаляры и векторы, являются хорошо представимыми объектами. Однако тензоры второго ранга и выше являются объектами посложнее и вызывают затруднения: как их лучше себе представить и какой физический смысл они несут?

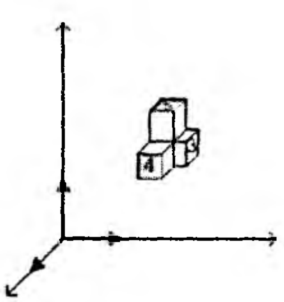

Рис.1 – Некий объект

Итак, чтобы понять, о чем речь, дадим простое (словесное) понятие тензора. Прежде всего, тензором описывается некоторое свойство физического объекта, обычно настолько сложное, что требует нескольких числовых характеристик.

Приведем примеры из классической механики:

• тензор потенциала гравитационного поля (содержит одно число, это скаляр);

• тензор ускорения (содержит три числа – проекции на три пространственные оси, это вектор);

• тензор электромагнитного поля (содержит проекции двух векторов поля на три пространственные оси и еще кое-что, это тензор 2-го ранга).

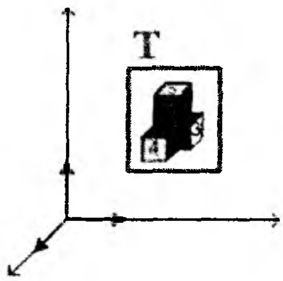

Рис.2 – Тензор «весь в себе».

Мы не зря пишем слово «содержит». Тензор не является простой совокупностью чисел (матрицей). Числа тензора – это его компоненты, они завязаны друг с другом. Вытаскивать компоненту из тензора и использовать ее в дальнейших расчетах некорректно. Это противоречит идеологии тензорного исчисления (о ней – позже). Тензор – целостный математический объект. Его компоненты подчиняются некоему «закону сохранения тензора», который не дает тензору «рассыпаться» на компоненты. В чем же особенность тензора?

Из приведенных выше примеров нетрудно сделать вывод, что компоненты тензора получают семантику и численные значения только тогда, когда выбрана система координат. Однако мы знаем, что систем координат (СК) может быть введено множество, а физическая величина (например, сила тяги автомобиля) одна на всех. Часто необходимо определять компоненты тензора в нескольких СК. Обычно при этом дано правило перехода из одной СК в другую. Если компоненты тензора вычислены в одной СК, то как определить их аналоги в другой? Тензорное исчисление дает на это изящный ответ: все компоненты тензора преобразуются по общему тензорному правилу независимо от их физического смысла! И векторы силы, и векторы магнитного поля, и градиенты потенциальных полей – все они одинаково преобразуются! Это значит, что, назвав компонентную матрицу тензором, мы приписываем ей правило преобразования при смене СК. Точнее, не само правило (оно общее для всех тензоров), а способность сохранять физический смысл при таком преобразовании в «новой» СК. Это – важнейшее свойство всех тензоров. Именно таким образом проверяется тензорный характер физической величины. Например, определим, что есть скаляр в специальной теории относительности (СТО). Скаляром называют тензор 0-го ранга. Правило преобразования для скаляра таково, что его единственная компонента не меняется (инвариантна) при смене СК. То есть скаляром можно назвать массу покоя – она инвариантна для конкретного тела в любой СК. А вот релятивистская масса – не скаляр, она преобразуется по нетензорному закону! Но можно предположить, что релятивистская масса входит в какой-нибудь тензор как компонента (это нулевая компонента вектора энергии-импульса).

Итак, обобщим. Тензор:

1) это целостный математический объект;
2) при выборе СК он получает численные компоненты;
3) преобразуется по общему тензорному закону.

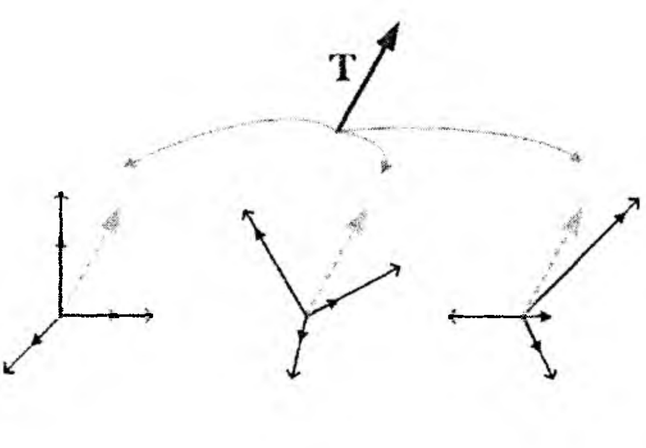

Рис. 3 – Сущность тензора одна, а явления (координаты) разные. Но не произвольные, а взаимозависимые!

Идеология тензорного исчисления

Мы дошли до самой сути тензоров. Основной причиной их популярности в Теории относительности является как раз единый закон их преобразования. Почему?

Для иллюстрации приведем символический вид уравнения Эйнштейна из общей теории относительности (ОТО):

ТЕНЗОР_А + скаляр_1 * ТЕНЗОР_В = скаляр_2 * ТЕНЗОР_С

Эта формула является тензорной. Все тензорные уравнения замечательны тем, что их вид не меняется при смене СК. Это очень просто доказать: обе части уравнения преобразуются по одному и тому же закону, а значит преобразования взаимно сокращаются, и формула остается в прежнем виде.

Таким образом, тензорное исчисление позволяет избежать нежелательных эффектов, связанных с неудачным выбором СК, и проникнуть в саму суть физических законов, которые отныне записаны в независимом от СК.

Именно поэтому тензоры нашли самое широкое применение в ОТО, т.е. там, где требовалось выявить общие, универсальные законы физики, которые будут справедливы в любой СК. Это важное свойство ОТО-шных уравнений называют общей ковариантностью.

Если неким преобразованием координат можно упростить внешний вид тензорных уравнений, то их былая сложность являлась координатным эффектом. Но пространство может быть искривленным изначально (как поверхность сферы) и никакая координатная сетка не нем не приведет тензорные уравнения этого пространства к наиболее простым. Любой тензор характеризуется рангом (или сложностью, информативностью) и мерностью (количеством измерений пространства, степенью свободы). Ранг тензора непосредственно связан с его смысловым содержанием и той ролью, которую тензор играет в физических формулах. А вот мерность является следствием количества измерений СК (число базисных векторов). Например, в СТО мы имеем право рассматривать процессы в 1-мерном пространстве, отбрасывая 2 других измерения, если в них движения нет. При этом вид тензорных формул не меняется.

Индексы тензора. Чтобы выделить из тензора компоненту, их индексируют. Число индексов тензора определяет его ранг. Индексы обозначают буквами i, j, k и т.д. Например, не важно, обозначим мы репер как ei или ej. но следует соблюдать осторожность. Если в одном месте тензор обозначен как Xij, а в другом – как Xji, то они будут трактоваться как взаимно транспонированные тензоры.

Тензорные формулы очень компактны, т.к. записаны в общем виде для каждой компоненты тензоров. Например, формула

Xi = Yi + Zi

понимается как: «Каждая i-я компонента тензора X равна сумме i-х компонент тензоров Y и Z». Т.е. под одной формулой подразумевается сразу несколько – для каждой i-й компоненты тензора X. Количество уравнений будет равно в данном случае мерности тензоров. Здесь как раз и нужно следить за тем, чтобы буква «i» в обозначении индекса повторялась у всех трех тензоров! Можно привести два примера тензора из физики: это (1) тензор инерции, компонентами которого являются моменты и произведения инерции твердого тела, и (2) тензор напряжений, компоненты которого описывают напряжения, возникающие в упругом теле под действием внешних сил В тензорном исчислении указываются методы получения соотношений между тензорами и функций от компонент тензоров, не меняющихся при переходе от одной системы координат к другой (инвариантных соотношений и инвариантов). Таким образом, одной из основных задач тензорного исчисления является нахождение аналитических формулировок законов механики, геометрии, физики, не зависящих от выбора координатной системы.

Тензорный анализ. В приложениях приходится обычно рассматривать не отдельные тензоры, а тензорные поля. Например, при изучении упругой деформации рассматривают тензоры деформации и напряжений во всех точках тела. Если в пространстве задана прямоугольная система координат, то тензорное поле $T(p)$ можно рассматривать как совокупность функций $t_{i_1 \dots i_l}(x^1, x^2, x^3)$, заданных в каждой точке $p(x^1, x^2, x^3)$ области и преобразующихся при переходе от одной системы прямоугольных координат к другой по формулам $p'_{i_1} \dots p'_{i_l} = \alpha^{i_1}_{j_1} \alpha^{i_2}_{j_2} \dots \alpha^{i_l}_{j_l} p_{i_1 \dots i_l}$.

В этом случае частные производные компонент тензора по координатам $\frac{\partial t_{i_1 \dots i_l}}{\partial x^j}$ образуют также тензор, валентность которого на единицу выше валентности исходного тензора. Например, при дифференцировании скалярного поля получается поле градиента, при дифференцировании поля градиента - поле симметрического тензора второй валентности:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \text{ и т. д.}$$

Спинор

При изучении явления спина электрона было обнаружено, что существуют физические величины, не принадлежащие к ранее известным типам (например, эти величины могут быть определены лишь с точностью до знака, т. к. при повороте системы координат на 2π вокруг некоторой оси все компоненты этих величин меняют знак). Такие величины были рассмотрены ещё в 1913 Э. Картаном в его исследованиях по теории представлений групп и вновь открыты в 1929 Б. Л. Варденом в связи с исследованиями по квантовой механике. Он назвал эти величины спинорами.

Спиноры первой валентности задаются двумя комплексными числами (ξ^1, ξ^2), причём в отличие, например, от тензоров, для которых различные совокупности чисел задают различные тензоры, для спиноров считают, что совокупности (ξ^1, ξ^2) и $(-\xi^1, -\xi^2)$ определяют один и тот же спинор. Это объясняется законом преобразования спиноров при переходе от одной системы координат к другой. При повороте системы координат на угол θ вокруг оси с направляющими косинусами $\cos\chi_1$, $\cos\chi_2$, $\cos\chi_3$ компоненты спинора преобразуются по формулам

$$\xi^{1'} = \alpha\xi^1 + \beta\xi^2, \quad \xi^{2'} = \gamma\xi^1 + \delta\xi^2$$

где

$$\alpha = \lambda + i\mu, \ \beta = \nu + i\rho, \ \gamma = -\bar{\beta}, \ \delta = \bar{\alpha},$$

$$\lambda = \cos\frac{\theta}{2}, \ \mu = \sin\frac{\theta}{2}\cos\chi_1, \ \nu = \sin\frac{\theta}{2}\cos\chi_2, \ \rho = \sin\frac{\theta}{2}\cos\chi_3$$

В частности, при повороте системы координат на угол 2π, возвращающем её в исходное положение, компоненты спинора меняют знак, что объясняет тождественность спиноров (ξ^1, ξ^2) и $(-\xi^1, -\xi^2)$.

Примером спинорной величины может служить волновая функция частицы со спином 1/2 (например, электрона).

Матрица

$$\sigma = \begin{Vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

является в этом случае унитарной матрицей.

К спинорам относят и величины $(\bar{\xi}^1, \bar{\xi}^2)$, компоненты которых комплексно сопряжены с компонентами спинора (ξ^1, ξ^2). Матрица преобразования этих величин имеет вид

$$\bar{\sigma} = \begin{Vmatrix} \bar{\alpha} & \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} & \bar{\delta} \end{Vmatrix}.$$

Наряду с введёнными выше контравариантными компонентами (ξ^1, ξ^2) спинора, можно ввести ковариантные компоненты (ξ_1, ξ_2) положив $\xi_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}\xi^\beta$, где $\varepsilon_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$ (как всегда, по повторяющимся индексам производится суммирование). Иными словами, $\xi^2 = \xi_1, \xi^1 = -\xi_2$.

Ковариантные компоненты преобразуются матрицей

$$\sigma^* = \begin{Vmatrix} \delta & -\gamma \\ -\beta & \alpha \end{Vmatrix}.$$

При вращениях эта матрица совпадает с матрицей σ, т. е. при вращениях ковариантные компоненты спинора преобразуются как компоненты комплексно сопряжённого спинора.

Спинорная алгебра строится аналогично обычной тензорной алгебре (см. ниже).

Спинором валентности r (или спинтензором) называется совокупность 2^r комплексных чисел $a^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_r}$, определённых с точностью до знака, которая при переходе от одной системы координат к другой преобразуется как произведение r компонент спиноров первой валентности, т. е. как

$$\xi^{\lambda_1}, \xi^{\lambda_2}, \xi^{\lambda_3}, \ldots, \xi^{\lambda_r}$$

Аналогично определяются комплексно-сопряжённый спинор валентности r, смешанный спинор, спинор с ковариантными компонентами и т. д. Сложение спиноров и умножение спинора на скаляр определяются покоординатно. Произведением двух спиноров называется спинор, компонентами которого являются попарные произведения компонент сомножителей.

Например, из спиноров второй $a_{\lambda\mu}$ и третьей $b^{\nu\rho\sigma}$ валентности можно образовать спинор пятой валентности $a_{\lambda\mu}b^{\nu\rho\sigma}$.

Свёрткой спинора $a^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3\ldots\lambda_r}$ по индексам λ_1 и λ_2 называется спинор $b^{\lambda_3\ldots\lambda_r} = \varepsilon_{\alpha\beta}a^{\alpha\beta\lambda_3\ldots\lambda_r}$

В спинорной алгебре часто используются тождества

$$\xi_\lambda\eta^\lambda = -\xi^\lambda\eta_\lambda$$

$$b^\lambda c_\mu d^\mu + c^\lambda d_\mu b^\mu + d^\lambda b_\mu c^\mu = 0$$

В квантовой механике важную роль играет исследование систем линейных дифференциальных уравнений, связывающих величины спинорного типа, которые остаются инвариантными при унимодулярных преобразованиях, т. к. только такие системы уравнений релятивистски инвариантны. Наиболее важны приложения спинорного анализа к теории уравнений Максвелла и Дирака. Запись этих уравнений в спинорной форме позволяет сразу установить их релятивистскую инвариантность, установить характер преобразования входящих в них величин. Спинорная алгебра находит также приложения к квантовой теории химической валентности. Теория спиноров в пространствах высшего числа измерений связана с представлениями групп вращений многомерных пространств. Спинорное исчисление связано также с некоторыми вопросами неевклидовой геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления,
2. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ. 3 изд. - М., 1965; М., 1967.
3. Схоутен Я. А., Тензорный анализ для физиков / Пер. с англ. -М., 1965.
4. Мак-Коннел А.-Д., Введение в тензорный анализ. /Пер. с англ.М., 1963.
5. Румер Ю. Б., Спинорный анализ. -М. - Л., 1936.
6. Картан Э., Теория спиноров. / Пер. с франц. -М., 1947.
7. Ландау Л., Лифшиц Е., Квантовая механика. - Ч.1, М. - Л., 1948 (Теоретическая физика, т. 5, ч. 1);
8. Теория спиноров // Успехи математических наук. - 1955, Т. 10, вып. 2 (64).