УДК 512.1

Төлөгожоева Н., Садырбаев К., Асаналиева Д.
К.Тыныстанов ат. ЫМУ

ЭҢ ЧОҢ ЖАЛПЫ БӨЛҮҮЧҮ, ЭҢ КИЧИНЕ ЖАЛПЫ БӨЛҮНҮҮЧҮ ЖАНА АЛАРДЫН КАСИЕТТЕРИ

Илимий-методикалык макала элементардык математика курсунун маанилүү темаларынын бири болгон эң чоң жалпы бөлүүчү, эң кичине жалпы бөлүнүүчү жана алардын касиеттерин окутуу маселесине арналган.

1. а натуралдык санын в натуралдык санына бөлүү деп бул $\mathbf{в} \cdot x = \mathbf{a}$ (1) аткарыла тургандай х натуралдык санын табууну айтабыз. Ар кандай эле а жана в натуралдык сандары үчүн (1) барабардык туура болгондой х натуралдык саны дайыма жашай бербейт. Эгерде андай сан жашаса, анда х саны а жана в сандарынын тийиндиси деп айтабыз, мында а-бөлүнүүчү, ал эми в-бөлүүчү деп аталат. Эгерде (1) барабардык аткарылса, в жана х сандары а санынын бөлүүчүлөрү болот, б.а. x=a:b, b=a:x

Мейли, 48 жана 72 сандарынын бөлүүчүлөрүн табалы. 48 санынын бөлүүчүлөрүнүн көптүгүн А менен, ал эми 72 санынын бөлүүчүлөрүнүн көптүгүн В менен белгилейли:

А={1,2,3,4,5,6,8,12,16,24,48}-10

В={1,2,3,4,5,6,7,8,9,12,18,24,36,72}-12

$A \cap B = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$-8

Бул көптүктүн бардык элементтери - 48 жана 72 сандарынын жалпы бөлүүчүлөрү, ал эми мындагы эң чоң элемент 24 саны-эң чоң жалпы бөлүүчү болот. Аны ЭЧЖБ (48,72)=24 же Д(48,72)=24 деп белгилешет. Демек,

а жана b натуралдык сандарынын ар бири q натуралдык санына бөлүнсө, анда q саны а жана в сандарынын жалпы бөлүүчүсү деп аталат.

Мейли, $a_1, a_2, ..., a_к$ натуралдык сандары **d** натуралдык санына бөлүнсүн, б.а., d саны алардын жалпы бөлүүчүсү болот. Анда **d**$i \leq ai$, **i=1,2,...,к**. Мында кичине натуралдык сан чоң натуралдык санга бөлүнбөстүгүн билебиз да, $a_1, a_2, ..., a_к$ сандарынын ЭЧЖБ сүн 1 ден тартып ai сандарынын эң кичинесинин арасынан тандоого болот.

Мисалы, 6,12,24,72 d=2 ге бөлүнсүн $d \leq a_i, i = \overline{1, к}$ $a_1 = 6$ берилген сандардын эң кичинеси болгондуктан, $\boxed{1<d \leq a_i}$, болот. Д(6,12,24,72)=6

Эгерде Д (а,в)=1 болсо, анда а жана в сандары өз ара жөнөкөй сандар деп аталат.

Мисалы, 15 жана 28 сандары өз ара жөнөкөй сандар.

15 санынын бөлүүчүлөрүнүн көптүгүн А={1,3,5,15}.

28 санынын бөлүүчүлөрүнүн көптүгүн В={1,2,4,7,14,28}

$A \cap B = \{1\}$болот. Демек, Д(15,28)=1

Эгерде Д($a_1, a_2, ..., a_к$)=1 болсо, анда $a_1, a_2, ..., a_к$ сандары өз ара жөнөкөй сандар деп аталат.

Эгерде берилген сандардын ар бир түгөйү үчүн Д (a_i, a_j) =1 болсо, анда $a_1, a_2, ..., a_к$ сандары түгөйлөш *өз ара жөнөкөй сандар* деп аталат.

Мисалы, Д(8,5,4)=1

8,5,4 сандары өз ара жөнөкөй сандар, бирок түгөйлөш өз ара жөнөкөй сандар эмес. Анткени Д(8,4)=4>1.

а жана в натуралдык сандарынын ***эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү деп*** а га жана в га бир эле учурда бөлүнгөн натуралдык сандардын эң кичинесин айтабыз .

ЭКЖБ ($a, в$) же К ($a, в$) деп белгилейбиз.

Алсак, 12 ге эселүү сандардын көптүгү А={12,24,36,48,60,72,84,96,…},

16 га эселүү сандардын көптүгү В болсун. В={16,32,48,64,80,96,112,…}

$A \cap B = \{48,96,144,\ldots\}$ бул көптүктүн элементтери 12 жана 16 сандарынын жалпы бөлүүчүлөрү деп аталат. Бул көптүк чексиз, анын эң чоң элементин табуу мүмкүн эмес, бирок эң кичине (жалпы бөлүнүүчүсү) элементи 48 саны болот. Бул 12 жана 16 сандарынын эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү, б.а., К(12,48)=48

2. Э.Ч.Ж.Б. жана Э.К.Ж.Бнүн касиеттерин төмөндөгүдөй теоремалар менен берели:

1-теорема. ***Каалаган жалпы бөлүнүүчү эң кичине жалпы бөлүнүүчүгө бөлүнөт.*** $a_1, a_2, ..., a_к$ ***сандары (a_i, i=1,2,…k) берилсин.***

М - каалаган жалпы бөлүнүүчү, К($a_1, a_2, ..., a_к$)=m болсун, б.а., m *эң кичине жалпы бөлүнүүчү*

Д-дөө: (карама-каршысынан далилдейли).

1) $(q, r \in N)\ [(\overline{M \vdots m}) \Rightarrow M = mq + r,\ \ 0 \le r < m]$

2) $(M \vdots a_i) \wedge (m \vdots a_i) \wedge (M \ge mq) \Rightarrow (M - mq) \vdots a_i,\quad i = 1,...,r$

$(r = M - mq) \Rightarrow (r \vdots ai)$ $\quad r -$ жалпы бөлүнүүчү.

3),1) $r < m$ болгондуктан, К($a_1, a_2, ..., a_к$) = m ге карама-каршылыкка келет.

Демек, $r = 0 \Rightarrow M \vdots m$

2-теорема. Эгерде a саны в санына бөлүнсө, анда a жана $в$ сандарынын Э.Ч.Ж.Б. $в$ жана алардын Э.К.Ж.Б. a болот.

$$(a \vdots в) \Rightarrow Д(a, в) = в \wedge К(a, в) = a$$

Д-дөө: (аналитикалык метод менен далилдейли)

1) $Д(a, в) = в \Rightarrow (a \vdots в) \wedge (в \vdots в)$, мында $в$ -жалпы бөлүүчү

Мейли, $(\forall d \in N)[(d > в) \Rightarrow (\overline{в \vdots d})]$, демек, $Д(a, в) = в$

$К(a, в) = a \Rightarrow (a \vdots a) \wedge (a \vdots в) \Rightarrow a$ - жалпы бөлүнүүчү

$(\forall m > 0)[m < a \Rightarrow \overline{m \vdots a}]$, демек, К ($a$, $в$)=a

3-теорема. Эгерде К (a, $в$)=m болсо, анда $(\forall c \in N)\quad К(ac, вc) = mc$

Д-дөө: (синтетикалык метод менен далилдейли)

1) $К(a, в) = m \Rightarrow (m \vdots a) \wedge (m \vdots в)$

2),1) $(\forall c > 0)\ [(m \vdots a = mc \vdots ac) \wedge (m \vdots b = mc)] \Rightarrow mc$ -жалпы бөлүнүүчү

3) Мейли, $(\exists l \in N)[К(ac, bc) = l \Rightarrow (l \prec mc)]$

4),3) $(l \vdots bc) \Rightarrow (l \vdots c \subset mc \vdots c = m)$

5),4) $[(l \vdots c) \vdots a \wedge (l \vdots c) \vdots b] \Rightarrow (l \vdots c)$ -Э.К.Ж.Б болот

$m -$ Э.К.Ж.Б дегендик менен карама- каршылыкка келебиз.

Демек, $mc = К(ac, bc)$

4-теорема. Кээ бир сандардын эң чоң жалпы бөлүүчүсү бул сандардын бардык жалпы бөлүүчүлөрүнүн эң кичине жалпы бөлүнүүчүсү болот.

$a_1, a_2, ..., a_к$ сандарынын жалпы бөлүүчүлөрү: $d_1, d_2, \ldots, d_n$ болсун. Мейли, К($d_1, d_2, \ldots, d_n$)= m деп белгилейли.

Д-дөө: (синтез методу менен далилдейли)

1) Шарт боюнча ар бир $a_i, (i = 1, ..., к)$ - жалпы бөлүнүүчү болот.

2) 1-Т$\Rightarrow (\forall a_i \vdots m) \Rightarrow (m$ -жалпы бөлүнүүчү) б.а. $m = di$

3) $(\forall d_j \in N)(d_j > d_i) \wedge (m = d_i) \Rightarrow (\overline{m \vdots d_j})$

Демек, $Д(a_1, a_2, ..., a_к) = m$, $К(d_1, d_2, \ldots, d_n) = m$

Мисалы, 6,18,36 сандарынын Д(6,18,36)=6, ал эми К(1,2,3,6)=6

5-теорема. Эгерде Д$(a, в) = c$ болсо, анда a жана $в$ сандарынын жалпы бөлүнүүчүсү $l = \frac{a \cdot b}{c}$ болот.

Д-дөө: (аналитикалык метод менен көрсөтөлү).

1) $l = \frac{a \cdot b}{c}$ -жалпы бөлүнүүчү $\Rightarrow (l \vdots a) \wedge (l \vdots b)$ экендигин далилдөө жетиштүү

2) $(l \vdots b) \Leftrightarrow (\exists b_1 \in N)[l = a \cdot b_1]$

$(l \vdots b) \Leftrightarrow (\exists a_1 \in N)[l = b \cdot a_1]$ экендигин көрсөтүү жетиштүү.

3) ,2) $\frac{a \cdot b}{c} = \frac{a_1 \cdot b_1}{1} \Rightarrow b = c \cdot b_1 \Leftrightarrow (b \vdots c)$

$\frac{a \cdot b}{c} = \frac{b \cdot a_1}{1} \Rightarrow a = c \cdot a_1 \Leftrightarrow (a \vdots c)$ с-жалпы бөлүүчү

6-теорема. Эгерде К(а,в)=k болсо, анда $d = \frac{ab}{к}$ – эң чоң жалпы бөлүүчү болот.

Д-дөө:

1) $d = \frac{ab}{к} (Э.Ч.Ж.Б) \Rightarrow (a \vdots d) \wedge (b \vdots d)$ далилдөө жетиштүү.

2) $(a \vdots d) \Leftrightarrow (\exists a_1 \in N)[a = d \cdot a_1]$

$(b \vdots d) \Leftrightarrow (\exists b_1 \in N)[b = d \cdot b_1]$

3) ,2) $\frac{d_k}{b} = \frac{d \cdot a_1}{1} \Rightarrow к = в \cdot a_1 \Leftrightarrow (к \vdots b)$

$\frac{d_k}{b} = \frac{d \cdot a_1}{1} \Rightarrow к = в \cdot a_1 \Leftrightarrow (к \vdots a)$ $\Rightarrow к$ -жалпы бөлүнүүчү

к-нын Э.К.Ж.Б. экендигин көрсөтөлү.

4) Мейли, Р-э.к.ж.б болсун (Р<К)$\Rightarrow \overline{P \vdots K}$

Демек, К($a \cdot b$) = r

6[I]-теорема. **Д(**$a,b) \cdot K(a,b) = \frac{ab}{к} \cdot к = ab$

6[II]-теорема. **Д(**$a,b) = 1 \Rightarrow K(a,b) = a \cdot b$

Д-дөө: ab -жалпы бөлүнүүчү, К (a,b)=m *болсун дейли.*

1) К(a,b)= $a \cdot b$ $\Rightarrow (ab \vdots a) \wedge (ab \vdots b)$

2) 1-Т$\Rightarrow \frac{ab}{m} = t \Leftrightarrow ab = mt, t \in N$

t=1экендигин далилдейли.

3) ,2) $m = к(a,b) \Rightarrow (m \vdots a) \Leftrightarrow (\exists q \in N)(m = aq)$

$\frac{a \cdot b}{t} = \frac{aq}{1} \Leftrightarrow b \vdots t = q$

4) ,2) $m = к(a,b) \Rightarrow (m \vdots b) \Leftrightarrow (\exists s \in N)(m = b \cdot s)$

$\frac{a \cdot b}{t} = \frac{b \cdot s}{1} \Leftrightarrow a \vdots t = s$ -t жалпы бөлүүчү

Д $(a,b) \vdots t$ б.а. $1 \vdots t \Leftrightarrow t = 1$

7-теорема. a жана b сандарынын эң чоң жалпы бөлүүчүсү ал сандардын каалаган жалпы бөлүүчүсүнө бөлүнөт.

Д$(a,b) = d \wedge a,b$ сандарынын жалпы бөлүүчүсү с болсун.

Д-дөө:

1) С-ж.б.$\Rightarrow (a \vdots c) \wedge (b \vdots c)$ д.ж.

2) $(a \vdots c) \wedge (b \vdots c) \Rightarrow (a \cdot b \vdots c), l = \frac{a \cdot b}{c}$ -жалпы бөлүнүүчү

3) Д(a,b) $= d \Rightarrow d = \frac{ab}{к}$, мында к-эң кичине жалпы бөлүнүүчү.

4) ,3) К=$\frac{a \cdot b}{d} \Rightarrow \frac{a \cdot b}{c} : \frac{a \cdot b}{d} \Leftrightarrow \frac{a \cdot b}{c} \cdot \frac{d}{a \cdot b} = \frac{d}{c}$

8-теорема. Эгерде а жана b натуралдык сандарынын көбөйтүндүсү *a* b, m* натуралдык санына бөлүнсө жана Д (a,m)=1 болсо, анда b⋮m болот.

(a b⋮m) $\wedge\ Д(a,m) = 1 \Rightarrow b⋮m$

Д-дөө: 1) $Д(a,m) = 1 \Rightarrow К(a,m) = am = k$

2) $(ab⋮a) \wedge (ab⋮m) \Rightarrow ab$ -жалпы бөлүнүүчү

3) ,1),2) $ab⋮am = b⋮m$

9-теорема. Эгерде а натуралдык саны өз ара жөнөкөй болгон b жана с сандарынын ар бирине бөлүнсө, анда ал алардын көбөйтүндүсүнө да бөлүнөт.

$(a⋮c) \wedge (a⋮b) \wedge Д(в,c) = 1 \Rightarrow a⋮bc$

Д-дөө: 1) $(a⋮c) \wedge (a⋮b) \Rightarrow a$ -жалпы бөлүнүүчү.

2)Д($b,c) = 1 \Rightarrow К(b,c) = bc$ (6^{II}-Т. негизинде)

3)1Т$\Rightarrow a⋮bc$

9-Т$\Rightarrow$ санга бөлүнүүчүлүк белгилери келип чыгат. Бөлүүчү эки жөнөкөй сандын көбөйтүндүсү болуш керек. Мисалы, х натуралдык саны 6га бөлүнүш үчүн анын 2ге да, 3кө да бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

Мейли, $(x⋮2) \wedge (x⋮3) \Rightarrow x$ -жалпы бөлүнүүчү

К(2,3)=6$\Rightarrow x⋮6$

Ушул сыяктуу төмөнкү ырастоолор далилденет.

1) Х натуралдык саны 12 ге бөлүнүш үчүн анын 3 кө, 4 кө да бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

2) Х нат.саны 15 ке бөлүнүш үчүн анын 3 кө да, жана 5 ке да бөлүнүшү зарыл жана жетиштүү.

Мисалы, (975⋮*15*) $\Rightarrow$(975⋮*5*)$\wedge$*(975⋮3)*.

Адабияттар:

1. Лельчук М.П. и др. Математика. -Минск: Высш. школа, 1975.
2. Виленкин Н.Я. и др. Математика. -М.: Просвещение, 1977.
3. Проскуряков И.И. и др. Числа и многочлены. -М.: Просвещение, 1965.
4. Энциклопедия элементарной математики. Арифметика. /Под. Редакцией П.С.Александрова, А.Е.Маркушевича и др –М.: Госд. изд. технико-теоретической литературы, 1951.