УДК 517.946 (0.75.8)+517.2

С.Шарипов, К.С.Шарипов

*ЫГУ им. К.Тыныстанова*

# УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

*Введено понятие управления решения неоднородного уравнения колебания струны.*

В [1] рассмотрено неоднородное уравнение колебания вида

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), a^2 = \frac{k}{p}, 0 < x < l \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{matrix} u(x,0) = \varphi(x) \\ u_t(x,0) = \psi(x) \end{matrix} \qquad 0 \le x \le l \qquad (2)$$

и однородными граничными условиями

$$\begin{matrix} u(o,t) = 0 \\ u(l,t) = 0 \end{matrix} \qquad (3)$$

Видно, что решение задачи (1)-(3) подчиняется только начальным и граничным условиям (2) и (3).

Теперь для подчинения решения задачи (1)-(3) к другим условиям задаем дополнительные условия так:

$$\begin{matrix} u(x,t_1) = \varphi_1(x) \\ u(x,t_2) = \varphi_2(x) \\ - \quad - \quad - \\ u(x_1 t_n) = \varphi_n(x) \\ u(x,T) = \varphi_{n+1}(x) \end{matrix} \qquad 0 \le x \le l \qquad (4)$$

Дополнительное условие (4) называется условием управления.

Тогда рассмотрим задачу

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t), \qquad 0 \le x \le l, \qquad t \ge 0 \qquad (5)$$

1. начальное условие

$$\begin{matrix} u(x,0) = \varphi(x) \\ u(x,0) = \psi(x) \end{matrix} \qquad (6)$$

2. граничное условие

$$\begin{matrix} u(0,t) = 0, \\ u(l,t) = 0 \end{matrix} \qquad (7)$$

3. условие управления по переменной t

$$\begin{matrix} u(x,t_1) = \varphi_1(x) \\ u(x,t_2) = \varphi_2(x) \\ - \quad - \quad - \\ u(x,t_n) = \varphi_n(x) \\ u(x,T) = \varphi_{n+1}(x) \end{matrix} \qquad 0 \le x \le l \qquad (8)$$

Пусть правая часть $f(x,t)$ уравнение (5) имеет вид

$$f(x,t) = isF_{tt}(x,t) - a^2 F_{xx}(x,t) \qquad (9)$$

где

$$F(x,t)=\frac{p(t)}{2a^2}\left[\beta_0(x)(t-0)^2+(\beta_1(x)-\beta_0(x))(t-t_1)^2 isc_1'(1,t_1,t)+\ldots+(\beta_n(x)-\beta_{n-1}(x))isc_1'(1,t_n,t)\right]. \quad (10)$$

Здесь неизвестные величины $\beta_0(x),\beta_1(x),...,\beta_n(x)$ называются управляющими величинами. Предположим, что $\beta_0(x),\beta_1(x),...,\beta_n(x)$ они имеют непрерывные производные Ньютона-Лейбница и удовлетворяют условиям

$$\beta_0(0)=0, \qquad \beta_1(0)=0,...,\beta_n(0)=0, \quad (11)$$
$$\beta_0(l)=0, \qquad \beta_1(l)=0,...,\beta_n(l)=0 \quad (12)$$

Функция $p(t)$ имеет производную Ньютона-Лейбница и удовлетворяет условию

$$p(0)=0,\ p'(0)=0 \quad (13)$$

В этом случае задача управления (5)-(8) имеет решение вида [2]

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at)\sin\frac{\pi n}{e}x+$$
$$+\frac{p(t)}{2a^2}\left[\beta_0(x)(t-0)^2+(\beta_1(x)-\beta_0(x))(t-t_1)^2 isc_1'(1,t_1,t)+\right]$$
$$+\ldots+(\beta_n(x)-\beta_{n-1}(x))(t-t_n)^2 isc_1'(1,t_n,t)] \quad (14)$$

Известно [1] , что

$$A_n=\varphi_n,\ B_n=\frac{1}{\pi na}\psi_n \quad (15)$$

Здесь

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{e}x, \qquad \varphi_n=\frac{2}{e}\int_0^e\varphi(s)\sin\frac{\pi n}{e}sds$$
$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{e}x, \qquad \psi_n=\frac{2}{e}\int_0^e\psi(s)\sin\frac{\pi n}{e}sds$$

Теперь переходим к определению функции $\beta_0(x),\beta_n(x),...,\beta_n(x)$. Для чего используемусловие управления (8). Тогда из (14) имеем

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at_1+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at_1)\sin\frac{\pi n}{e}x+\frac{p(t_1)}{a^2}\beta_0(x)(t_1-0)^2$$
$$\varphi_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at_2+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at_2)\sin\frac{\pi n}{e}x$$
$$+\frac{p(t_2)}{a^2}\left[\beta_0(x)(t_2-0)^2+(\beta_1(x)-\beta_0(x))(t_2-t_1)^2\right] \quad (16)$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$\varphi_{n+1}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}aT+B_n\sin\frac{\pi n}{e}aT)\sin\frac{\pi n}{e}x$$
$$+\frac{p(T)}{a^2}\left[\beta_0(x)(T-0^2)+(\beta_1(x)-\beta_0(x))(T-t_1)^2+\ldots+(\beta_n(x)-\beta_{n-1}(x))(T-a_n)^2\right]$$

Значит нами получена алгебраическая система относительно неизвестных $\beta_0(x),\beta_1(x),...,\beta_n(x)$.

Отсюда

$$\beta_0(x)=\frac{a^2}{p(t_1)(t_1-0)^2}\left[\varphi_1(x)-\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at_1)\sin\frac{\pi n}{e}x\right]$$

$$\beta_1(x)-\beta_0(x)=\frac{a^2}{p(t_2)(t_2-t_1)^2}\left[\varphi_2(x)-\frac{p(t_2)}{a^2}\beta_0(x)(t_2-0)^2-\right.$$

$$\left.-\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at_2+\beta_n\sin\frac{\pi n}{e}at_2)\sin\frac{\pi n}{e}x\ \right] \tag{17}$$

– – – – –

$$\beta_n(x)-\beta_{n-1}(x)=\frac{a^2}{p(T)(T-a_n)^2}\left\{\varphi_{n=1}(x)-\frac{p(T)}{a^2}\left[\beta_0(x)(T-0)^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ldots+(\beta_{n-1}(x)-\beta_{n-2}(x))(T-a_{n-1})^2\ \right]-\sum_{n=1}^{\infty}\ (A_n\cos\frac{\pi n}{e}aT+B_n\sin\frac{\pi n}{e}aT)\ \right\}$$

Согласно (11) и (12) должны выполняться следующие условия:

$$\varphi_1(0)=0,\qquad \varphi_2(0)=0,\ldots,\varphi_n(0)=0 \tag{18}$$

$$\varphi_1(e)=0,\qquad \varphi_2(e)=0,\ldots,\varphi_n(e)=0 \tag{19}$$

Подставляя эти значения (17) в (14) получим решение задачи управления (5)-(8).

Теперь рассмотрим задачу управления вида:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t) \tag{20}$$

1) начальное условие

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{21}$$

$$u_t(x,0)=\psi(x)$$

2) условие управления по переменной x

$$u(0,t)=\mu_0(t)$$

$$u(x_1,t)=\mu_1(t)$$

$$u(x_2,t)=\mu_2(t)$$

\- - - - -

$$u(x_n,t)=\mu_n(t)$$

$$u(e,t)=\mu_{n+1}(t) \tag{22}$$

Исследуем эту задачу в случае, когда функция (10) $F(x,t)$ имеет вид

$$F(x,t)=\frac{1}{2a^2}\left[p(x)\beta_0(t)+\beta_1x^2+(\beta_2(t)-\beta_1(t))(x-x_1)^2isc_1'(1,x_1,x)+\ldots+(\beta_n(t)-\beta_{n-1}(t))\right.$$

$$\left.(x-x_n)^2isc_1'(1,x_n,x)\right] \tag{23}$$

$p(x)$ имеет два раза производную Ньютона-Лейбница, причем $p(0)\neq 0, p(e)\neq 0.$ (24)

В этом случае задача управления (20)-(22) имеет решение вида

$$u(x,e)=\sum_{m=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at+\beta_n\sin\frac{\pi n}{e}at)\sin\frac{\pi n}{e}x+$$

$$+\frac{1}{2a^2}\left[p(x)\beta_0+\beta_1x^2+(\beta_2-\beta_1)(x-x_1)^2isc_1'(1,x_1,x)+\ldots+(\beta_n-\beta_{n-1})(x-x_n)^2isc_1'(1,x_n,x)\ \right]$$

Теперь используя условие управления (22) из (25) имеем

$$\mu_0(t)=\frac{1}{2a^2}p(0)\beta_0$$

$$\mu_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at)\sin\frac{\pi n}{e}x_1+\frac{1}{2a^2}[p(x_1)\beta_0+\beta_1 x_1{}^2]$$

\- \- \- \- \- \-

$$\mu_n(t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at)\sin\frac{\pi n}{e}x_n+ \qquad (26)$$

$$+\frac{1}{2a^2}[p(x_n)\beta_0+\beta_1 x_n{}^2+(\beta_2-\beta_1)(x_n x_1)^2+...+(\beta_{n-1}-\beta_{n-2})(x_n-x_{n-1})]$$

$$\mu_{n+1}(t)=\frac{1}{2a^2}[p(l)\beta_0+\beta_1 l^2+(\beta_2-\beta_1)(l-x_1)^2+...+(\beta_n-\beta_{n-1})(l-x_n)^2\ ]$$

Отсюда имеем

$$\beta_0=\frac{2a^2\mu_0(t)}{p(0)}$$

$$\beta_1=\frac{2a^2\mu_1(t)-2a^2\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\frac{\pi n}{e}at+...+B_n\sin\frac{\pi n}{e}at)\sin\frac{\pi n}{e}x_1-p(x_1)\beta_0}{x_1{}^2} \qquad (27)$$

– – – – –

$$\beta_n-\beta_{n-1}=\frac{2a^2\mu_{n+1}(t)-p(e)\beta_0-\beta_1 e^2-(\beta_2-\beta_1)(l-x_1)^2-...-(\beta_{n-1}-\beta_{n-2})(l-x_{n-1})}{(l-x_n)^2}$$

Подставляя (27) в (25) получим решение задачи управления (20)-(22).

Видно, что $\beta_1(t)$ зависит от $\mu_0(t)$ и $\mu_1(t)$, аналогично можно увидеть, что $\beta_n(t)$ зависит от всех предыдущих функций $\beta_0(t),\beta_1(t),...,\beta_{n-1}(t)$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Управление математической физикой. –М.: Наука, 1972.
2. Шарипов С., Шарипов К.С, Управление решения дифференциального и интегрального уравнений //Вестник ЫГУ, №12, 2005.