УДК 517 (075.8)

С.Шарипов, К.С.Шарипов

ЫГУ им. К.Тыныстанова

УСОВЕРШЕНСТОВАНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ НЬЮТОНА-ЛЕЙБНИЦА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Впервые решена задача: как надо ввести понятие производной для недифференцируемых функций по Ньютону-Лейбницу.

Одним из основных понятий в математике является производная Ньютона-Лейбница. Ее роль в исследовании теоретических и практических задач из различных областей не имеет цены.

Известно, что для одного класса непрерывных функций

$$y = f(t), \qquad t \in [t_0, T] \tag{1}$$

в точке t производная Ньютона-Лейбница определяется классической формулой вида

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta f} = f'(t) \tag{2}$$

Теперь нам предстоит ее усовершенствовать так, чтобы в дальнейшем можно было исследовать те задачи, которые не решались с классической формулой (2) производной Ньютона-Лейбница

Асимметрические первые производные.

Пусть функция (1) имеет первую производную по Ньютону-Лейбницу.
В этом случае имеет место важная формула

$$f'(t-0) = f'(t+0) = f'(t), \forall t \in (t_0, T) \tag{3}$$

Теперь рассмотрим функцию вида

$$C(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t \le a, \quad \varphi(t) \in C^1[t_0, a], \\ \psi(t), & a \le t \le T, \quad \psi(t) \in C^1[a, T], \end{cases} \tag{4}$$

$$1.\ \varphi(a-0) = \psi(a+0) \tag{5}$$

$$2.\ \varphi'(a-0) \ne \psi'(a+0) \tag{6}$$

Видно, что в точке t=a функция (4) не имеет производной по Ньютону-Лейбницу (см. формулу (3)).

Особо отметим, что классическая формула (2) производной Ньютона-Лейбница непригодна для введения понятия производной к функции (4)-(6).

Теперь переходим к усовершенствованию классической формулы (2) производной Ньютона-Лейбница.

Пусть функция (1) имеет производную по Ньютону-Лейбницу.

Берем всевозможные пары (λ_1, λ_2), $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_1 \to 0, \lambda_2 \to 0$ и точку t. Определим приращение аргумента t: $t - \lambda_1, t + \lambda_2$. Величина приращения аргумента равна

$$\Delta t = t + \lambda_2 - (t - \lambda_1) = \lambda_1 + \lambda_2 \ . \tag{7}$$

К Δt соответствует приращение функции

$$\Delta f = f(t+\lambda_2) - f(t-\lambda_1) \ . \tag{8}$$

Составим отношение

$$\frac{f(t+\lambda_2) - f(t-\lambda_1)}{\lambda_1 + \lambda_2} \ . \tag{9}$$

Отсюда переходим к пределу при $\lambda_1 \to 0, \lambda_2 \to 0$

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{f(t+\lambda_2)-f(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} \ . \qquad (10)$$

Этот предел называется асимметрическим производным Ньютона-Лейбница и обозначим его так:

$$f'(t,A) = f'(t-0) + [f'(t+0) - f'(t-0)]A, \qquad (11)$$

$$A = \lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}. \qquad (12)$$

Для любых пар (λ_1, λ_2) $A \in [0,1]$ (13)

С другой стороны, в классе неопределенностей формулу (11) можно представить и так:

$$f'(t,A) = f'(t-0) + [f'(t+0) - f'(t-0)]A + [f(t+0) - f(t-0)\infty \ . \qquad (14)$$

Здесь

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} = \infty, \quad \forall\lambda_1 \quad и \quad \forall\lambda_2 \ . \qquad (15)$$

А также

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{f(t+0)-f(t-0)}{\lambda_1+\lambda_2}\frac{1}{\lambda_1+\lambda_2} = o = [f(t+0) - f(t-0)]\infty. \qquad (16)$$

Остается выяснить смысл ∞.

Итак, (11) или (14) дают нам асимметрические производные Ньютона-Лейбница [1] и имеет место важное равенство

$$f'(t,A) = f'(t), \quad \forall A \in [0,1] \qquad (17)$$

Отсюда будем говорить, что асимметрические производные (11) и (14) есть усовершенствованный вариант классической производной (2) Ньютона-Лейбница.

Предложение А. Все свойства, правила, определения и теоремы, относящиеся к первой производной Ньютона-Лейбница, будут справедливыми и для первых асимметрических производных Ньютона-Лейбница.

Асимметрические вторые производные.

Пусть функция (1) имеет вторую производную по Ньютону-Лейбницу. В этом случае имеют место формулы

$$1) \ f'(t+0) = f'(t-0) = f'(t), \quad \forall t, \qquad (18)$$

$$2) \ f''(t+0) = f''(t-0) = f''(t), \quad \forall t \qquad (19)$$

Вторая производная Ньютона-Лейбница вычисляется по классической формуле

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{f'(t+\Delta t)-f'(t)}{\Delta t} = f''(t). \qquad (20)$$

В этом случае вторые асимметрические производные Ньютона-Лейбница вычисляются по формуле

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{f'(t+\lambda_2)-f'(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} = f''(t-0) + [f''(t+0) - f''(t-0)]A \qquad (21)$$ Ее

форма (21) в классе неопределенностей имеет вид

$$\lim_{\substack{\lambda_1\to 0\\ \lambda_2\to 0}} \frac{f'(t+\lambda_2)-f'(t-\lambda_1)}{\lambda_1+\lambda_2} = f''(t-0) + [f''(t+0) - f''(t-0)]A + [f'(t+0) - f(t-0)]\infty. \qquad (22)$$ З

начит, вторые асимметрические производные Ньютона-Лейбница имеют вид:

$$f''(t,A) = f''(t-0) + [f''(t+0) - f''(t-0)]A, \qquad (22)$$

$$f''(t,A) = f''(t-0) + [f''(t+0)] - f''(t-0)]A + [f'(t+0) - f'(t-0)]\infty. \qquad (23)$$

Очевидно, что

$$f''(t,A) = f''(t), \qquad \forall A \in [0,1]. \tag{24}$$

Предложение Б. Все свойства, правила, определения и теоремы, относящиеся ко второй производной Ньютона-Лейбница, будут справедливыми и для вторых асимметрических производных Ньютона-Лейбница.

При этом мы должны учитывать и свойства и теоремы, получаемые на основе равенств вида:

$$f'(t,A) = f'(t,B) = f'(t), \qquad A \in [0,1], B \in [0,1], A \neq B, \tag{25}$$

$$f''(t,A) = f''(t,B) = f''(t), \qquad A \in [0,1], B \in [0,1], A \neq B. \tag{26}$$

Они являются новыми свойствами теорем полученных для первой и второй классических производных Ньютона-Лейбница.

Здесь приведем лишь некоторые из них.

Производная суммы.

$$y = f_1(t) + f_2(t)$$

$$y' = f_1(t) + f_2'(t) \tag{27}$$

Это равенство можно написать так

$$1)\, y' = f_1'(t,A) + f_2'(t,A), \qquad \forall A \in [0,1] \tag{28}$$

$$2)\, y' = f_1'(t,A) + f_2'(t,B), \qquad \forall A, B \in [0,1], A \neq B. \tag{29}$$

Равенство (29) является новым свойством производной Ньютона-Лейбница. Раньше оно не встречалось.

Производная сложной функции

$$y = f(\varphi(t)) = f(u), \qquad u = \varphi(t) \tag{30}$$

$$y' = \varphi'(t)\, f_u'(u). \tag{31}$$

Ее асимметрические производные, в частности, вычисляются так

$$y' = \varphi'(t,A)\, f_u'(u), \qquad \forall A \in [0,1]. \tag{32}$$

Здесь ограничимся этими свойствами.

Итак, мы вкратце привели усовершенствованную форму первой и второй производных Ньютона-Лейбница.

Теперь переходим к применению этих асимметрических производных Ньютона-Лейбница.

Применение асимметрических производных Ньютона-Лейбница.

Рассмотрим недифференцируемую функцию по Ньютону-Лейбницу вида

$$C(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t_0 \le t \le a, \quad \varphi(t) \in C^1[t_0, a], \\ \psi(t), & a \le t \le 1 \quad \psi(t) \in C^1[a, t], \end{cases} \tag{33}$$

1. $\varphi(a-0) = \psi(a+0)$.

2. $\varphi'(a-0) \neq \psi'(a+0)$. (34)

Видно, что она в точке t=a не имеет производной по Ньютону-Лейбницу. Но она имеет конечную одностороннюю производную Ньютона-Лейбница.

Такая функция называется урчуктной.

Теперь будем исследовать на задачу производную недифференцируемой функции (по Ньютону-Лейбницу) вида (33)-(34).

Нами предложено, что посредством асимметрических производных Ньютона-Лейбница ввести понятие «производная урчуктной функции».

Первые исправленные производные урчуктной функции.

Определение 1. Первые асимметрические производные Ньютона-Лейбница (14) будем брать в качестве определения асимметрических производных первого порядка урчуктной функции (33)-(34).

Итак, согласно формуле (14), первые асимметрические производные урчуктной функции (33)-(34) имеют вид:

$$\begin{aligned}&C'(t,A) = C'(t-0) + [C'(t+0)] - C'(t-0)]A + [C(t+0) - C(t+0)]\infty,\\ &A \in [0,1]\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь

$$[C(t+0) - C(t-0)]\infty = 0$$

в смысле

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} [C(t+0) - C(t-0)] \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} = 0 = 0.\infty \tag{36}$$

Тогда первые асимметрические производные (35) имеют вид:

$$\begin{aligned}&C'(t,A) = C'(t-0) + [C'(t+0)] - C'(t-0)]A = \\ &= \begin{cases} \varphi'(t), & t_0 \le t < a, \\ \varphi'(a-0) + [\varphi'(a+0) - \varphi'(a-0)]A, & t = a, \qquad A \in [0,1] \\ \psi'(t), & a < t \le T \end{cases}\end{aligned} \tag{37}$$

Видно, что урчуктная функция (33)-(34) имеет бесчисленное множество первых асимметрических производных, т.е. каждый класс эквивалентных пар (λ_1, λ_2) порождает свою первую исправленную производную.

В дальнейшем первые асимметрические производные урчуктной функции (33)-(34) будем называть их первыми исправленными производными и введем обозначение

$$C'(t,A) = isc'(A,a,t), \forall A \in [0,1]. \tag{38}$$

Можно привести следующую схему:

$$f'(t) = f'(t,A) \to C'(t,A) = isc'(A,a,t), \forall A \in [0,1]. \tag{39}$$

И наоборот

$$isc'(A,a,t) = C'(t,A) \to f'(t,A) = f'(t), \forall A \in [0,1]. \tag{40}$$

Предложение B. Первые исправленные производные (37) на основании предложения A обладают всеми свойствами, правилами, определениями и теоремами первых асимметрических производных Ньютона-Лейбница.

Здесь лишь приведем некоторые из них.

Исправленная производная суммы.

$$y = C_2(t) + C_3(t). \tag{41}$$

Имея ввиду формулу (28) и (39) получим

$$isy' = isc_2'(A,a,t) + isc_3'(A,a,t). \tag{42}$$

А с формулами (29) и (39) имеем важное свойство исправленной производной суммы (выявленное впервые) вида:

$$isy' = isc_2'(A,a,t) + isc_3'(B,a,t). \tag{43}$$

Видно, что исправленные производные первого слагаемого вычисляются с парой (λ_1, λ_2), а второго слагаемого вычисляется с парой (λ_3, λ_4) такими, что

$$\lim_{\substack{\lambda_1 \to 0 \\ \lambda_2 \to 0}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = A, A \in [0,1],$$

$$\lim_{\substack{\lambda_3 \to 0 \\ \lambda_4 \to 0}} \frac{\lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} = B, B \in [0,1], A \ne B.$$

Это правило является весьма важным новшеством в теории производных.

Исправленная производная сложной функции

$$Y=f(c\ (t)). \tag{44}$$

Пусть функция f является дифференцируемой по Ньютону-Лейбницу, а C(t) - урчуктная функция .

Тогда на основании асимметрических производных Ньютона-Лейбница (32) имеем

$$isy' = isc'(A,a,t)\,f'(C(t)) \quad . \tag{45}$$

Эта формула установлена впервые.

Мы не будем останавливаться на остальных свойствах, правилах и теоремах, т.к. не рассматриваем их в пределах данной статьи.

В следующих статьях будем рассматривать первообразные и интегралы разрывных функций первого рода.

Исправленная производная дает возможность исследовать широкий класс задач управления решения дифференциального уравнения вида

$$y' + p(t)y = q(t),$$

$$y(t_0) = y_0, y(a_1) = y_1, y(a_2) = y_2, ..., y(a_n) = y_n, y(T) = d.$$

Показано, что задача управления имеет решение $y(t, y_0, y_1, ..., y_n, d)$ [1].

Отметим, что в наших следующих статьях решение задачи управления будет исследовано математическим программированием относительно $y_0, y_1, ..., y_n, 0$.

Например, можно исследовать задачи максимума и минимума: найти максимум (или минимум) интегралов

$$\int_{t_0}^{T} y(t, y_0, y_1, ..., y_n, d)dt\,,\ \int_{t_0}^{T} y^2(t, y_0, y_1, ..., y_n, d)dt$$

при некоторых ограничениях относительно $y_0, y_1, ..., y_n, d$

Значит нахождение максимума или минимума интеграла относится к задаче математического программирования.

А также можно исследовать математическим программированием краевую задачу (управления)

$y' + p(t)y = q(t), \quad t \in [t_0, T],$

граничные условия $y(t_0) = y_0, y(T) = y_1$

при непрерывной функции $q(t) = \beta_0 f(t), t \in [t_0, T]$, где β_0 - неизвестное число.

Рассмотрим краевую задачу

$$y' + p(t)y = q(t),$$

$$\alpha_1 y'(t_0) + \beta_1 y(t_0) = u_0, \quad \alpha_i, \beta_i (i = 1,2),\ u_0, u_1 \text{ - заданные числа.}$$

$$\alpha_2 y'(T) + \beta_2 y(T) = u_1$$

$P(t)$ - заданная функция, а $q(t)$ ищем из совокупности функций

$F(t) = \beta_0 f(t),$ где $f(t)$ - любая непрерывная функция.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу

$$y' + p(t)y = \beta_0 f(t),$$

$$\alpha_1 y'(t_0) + \beta_1 y(t_0) = u_0,$$

$$\alpha_2 y'(T) + \beta_2 y(T) = u_1$$

Данная задача имеет решение $y(t, u_0, u_1)$.

Математическим программированием исследуем решение $y(t, u_0, u_1)$ относительно u_0, u_1.

1) Найти max или min целевой функции

$$F(u_0, u_1) = y(t_0, u_0, u_1)$$

при ограничениях

$$\alpha_1 u_0 + \alpha_2 u_1 \le n_1$$

$$\alpha_3 u_0 + \alpha_4 u_1 \le n_2$$

$$\alpha_5 u_0 + \alpha_6 u_1 \le n_3$$
$$u_0 \ge 0, u_1 \ge 0.$$

Находим решение этой задачи $u_0 = \bar{u}_0, u_1 = \bar{u}_1.$

При этом находим $y(t_0) = y(t_0, \bar{u}_0, \bar{u}_1), y(T) = y(T, \bar{u}_0, \bar{u}_1)$ и $\beta_0 = \beta(\bar{u}_0, \bar{u}_1)$.

Итак, нашли граничные условия $y(t_0), y'(t_0)$, и $y(T), y'(T)$ согласно задачи математического программирования.

Найти max или min целевой функции

$$F(u_0, u_1) = y(t_0, u_0, u_1)$$

при ограничениях

$$m_1 u_0 + m_2 u_1 \le d_1,$$
$$m_3 u_0 + m_4 u_1 \le d_2,$$
$$m_5 u_0 + m_6 u_1 \le d_3$$
$$u_0 \ge 0, u_1 \ge 0.$$

Данная задача имеет решение $u_0 = \overset{=}{u}_0, u_1 = \overset{=}{u}_1$ находим граничные условия $y(t_0)$, $y'(t_0)$ и $y(T)$, $y'(T)$.

Итак, математическое программирование дает способ выделения частных решений дифференциальных уравнений.

Отметим, что таких экстремальных задач достаточно много.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решения дифференциального и интегрального уравнения //Вестник ЫГУ, № 12, 2004.