УДК 517 (075.08)+517.2

С.Шарипов, К.С.Шарипов

Каз ГУ им. Аль-Фараби

УПРАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В данной статье дано дальнейшее развитие нами выдвинутой идеи (см. [1-2]) об управлении решений нагруженных дифференциальных и интегральных уравнений.

Нагруженные дифференциальные уравнения

Нами в [2] , в частности, рассмотрена начальная задача управления

$$y' + p(t)y = \alpha_1 isc_1'(A,a_1,t) + (\alpha_2 - \alpha_1)isc_1'(A,a_2,t) + \dots + (\alpha_n - \alpha_{n-1})isc_1'(A,a_n,t), t \in [t_0,T], \forall A \in [0,1] \quad (1)$$

1) начальное условие

$$y(t_0) = y_0 \qquad (p(t) \in C_{[t_0,T]}) \quad (2)$$

2) условие управления

$$y(t_1) = y_1, y(t_2) = y_2, \dots, y(t_n) = y_n$$
$$t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 < \dots < a_n < t_n \le T \quad (3)$$

Здесь управляющие величины $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ есть неизвестные постоянные величины. Для определения их выведены формулы (см. формулы 25 [2]).

Показано, что решение уравнения (1) проходит через заданные точки $(t_0,y_0),(t_1,y_1),\dots,(t_n,y_n)$.

Теперь рассмотрим весьма важный случай, когда управляющие величины $\alpha_1\alpha_2,\dots,\alpha_n$ имеют вид $\alpha_1 = y(t_1), \alpha_2 = y(t_2), \dots, \alpha_n = y(t_n) \qquad (t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < \dots < a_n < t_n \le T)$

Тогда имеем задачу управления вида

$$y' + p(t)y = y(t_1)isc_1'(A,a_1,t) + (y(t_2) - y(t_1))isc_1'(A,a_2,t) + \dots + (y(t_n) - y(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,t), t \in [t_0,T], \forall A \in [0,1], \quad (4)$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (5)$$

Здесь $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ как значения решения задачи (4)-(5) соответственно в точках $t_1,t_2,\dots,t_n$ являются неизвестным и постоянными величинами.

В этом случае дифференциальное уравнение (4) называется нагруженным дифференциальным уравнением, а $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ называются нагрузками соответственно на отрезках $(a_1,a_2),(a_2,a_3),\dots,(a_n,T]$.

Поэтому задачу (4)-(5) будем называть задачей управления, посредством нагрузки $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$. Нам предстоит вывести формулы для определения этих нагрузок.

Нами показано, что решение нагруженной задачи (4)-(5) в классе урчуктных функций имеет вид

$$
\begin{aligned}
y = {} & y_0 \ell^{-\int\limits_{t_0}^{t} p(s)ds} + y(t_1)\int\limits_{a_1}^{t} \ell^{-\int\limits_{s}^{t} p(i)di} ds \qquad isc_1'(A,a_1,t) + \\
& +(y(t_2)-y(t_1))\int\limits_{a_2}^{t} \ell^{-\int\limits_{s}^{t} p(i)di} ds \qquad isc_1'(A,a_2 t) + \ldots + \\
& (y(t_n)-y(t_{n-1}))\int\limits_{a_n}^{t} \ell^{-\int\limits_{s}^{t} p(i)di} ds \qquad isc_1'(A,a_n,t)
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Видно, что решение (6) выражается с нагрузками $y(t_1), y(t_2),..., y(t_n)$, причем оно определено на отрезке $[t_0,T]$

$(t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 < \ldots < a_n < t_n < T)$.

Находим значения решения (6) в точках $t_1, t_2,..., t_n$

Тогда имеем

$$
\begin{aligned}
& y(t_1) = y_0 \ell^{-\int\limits_{t_0}^{t_1} p(s)ds} + y(t_1)\int\limits_{a_1}^{t_1} \ell^{-\int\limits_{s}^{t_1} p(i)di} ds \\
& y(t_2) = y_0 \ell^{-\int\limits_{t_0}^{t_2} p(s)ds} + y(t_1)\int\limits_{a_1}^{t_2} \ell^{-\int\limits_{s}^{t_2} p(i)di} ds + \\
& (y(t_2)-y(t_1))\int\limits_{a_2}^{t_2} \ell^{-\int\limits_{s}^{t_2} p(i)di} ds \\
& y(t_n) = y_0 \ell^{-\int\limits_{t_0}^{t_n} p(s)ds} + y(t_1)\int\limits_{a_1}^{t_n} \ell^{-\int\limits_{s}^{t_n} p(i)di} ds + \\
& (y(t_2)-y(t_1))\int\limits_{a_n}^{t_n} \ell^{-\int\limits_{s}^{t_n} p(i)di} ds
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Получим алгебраическую систему относительно нагрузки $y(t_1), y(t_2),.., y(t_n)$. отсюда следует, что мы можем определить в точках $t_1, t_2,..., t_n$ значения решения (6) нагруженной задачи 94)-(5). Видно, что нагрузка $y(t_1)$ определяется формулой

$$
y(t_1) = \frac{y_0}{1 - \int\limits_{a_1}^{t_1} \ell^{-\int\limits_{s}^{t_1} p(i)di} ds} \ell^{-\int\limits_{t_0}^{t_1} p(s)ds}
\tag{8}
$$

По начальному условию $y(t_0) = y_0$ и заданной функции $p(t)$, по формуле (8) мы можем вычислить значение решения нагруженной задачи (4)-(5) в любой точке $t_1 \in (a_1, a_2)$. Далее подставляя значение $y(t_1)$ во второе уравнение системы (7) находим значение нагрузки $y(t_2)$ в любой точке $t_2 \in (a_2, a_3)$. Аналогично по этой схеме можем определить значение нагрузки $y(t_n)$ в любой точке $t_n \in (a_n, T]$.

Очевидно, что роль управляющих величин играют эти найденные значения нагрузки $y(t_1), y(t_2),..., y(t_n)$.

Подставляя эти значения нагрузки $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ в (6) имеем решение нагруженного дифференциального уравнения (4), удовлетворяющее начальному условию (5). Кроме того, оно проходит через нагруженные точки

$(t_1, y(t_1)), (t_2 y(t_2)), \dots, (t_n, y(t_n)).$

Итак, доказана следующая теорема.

Терема 1. Существуют нагрузки $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$

$(t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 < \dots < a_n < t_n \le T)$ управляющее решение нагруженного дифференциального уравнения.

$$y' + p(t)y = y(t_1) isc_1'(A, a_1 t) + (y(t_2) - y(t_1)) isc_1'(A, a_2, t) +$$
$$\dots + (y(t_n) - y(t_{n-1})) isc_1'(A, a_n, t), t \in [t_0, T], \forall A \in [0,1]$$

удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$.

из теоремы 1 следует важное следствие.

Следствие. Существуют нагрузки $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$

$(t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 < \dots < a_n < t_n \le T)$

управляющее решение нагруженного дифференциального уравнения

$$\begin{gathered} y' = y(t_1) isc_1'(A, a_1, t) + (y(t_2) - y(t_1)) isc_1'(A, a_2, t) + \dots \\ + (y(t_n) - y(t_{n-1})) isc_1'(A, a_n, t), t \in [t_0, T], \forall A \in [0,1]. \end{gathered} \quad (9),$$

удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$

Решение нагруженного дифференциального уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$ имеет вид

$$y = y_0 \ell^{y(t_1)(t-a_1) isc_1'(A,a_1,t) + (y(t_2) - y(t_1))(t-a_2) isc_1'(A,a_1,t) + \dots + (y(t_n) - y(t_{n-1}))(t-a_n) isc_1'(A,a_1,t)} \quad (10)$$

Отсюда согласно формуле (7), имеем систему относительно $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ вида

$$y = (t_1) = y_0 \ell^{y(t_1)(t_1 - a_1)}$$
$$y(t_2) y(t_1) = y_0 \ell^{y(t_1)(t_2 - a_1) + (y(t_2) - y(t_1))(t_2 - a_2)} \quad (11)$$
$$y(t_n) = y_0 \ell^{y(t_1)(t_n - a_1) + (y(t_2) - y(t_1))(t_n - a_2) + \dots + (y(t_n) - y(t_{n-1})(t_n - a_n)}$$

Отсюда, находим нагрузки $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$.

Подставляя эти значения нагрузки $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ в (10), получим искомое решение нагруженного дифференциального уравнения (9), удовлетворяющее начальному условию $y(t_0) = y_0$ и проходящее через точки нагрузки $(t_1, y(t_1)), (t_2, y(t_2)) \dots (t_n, y(t_n))$.

Отметим, что такая задача относится к типу задачи математической биологии (экологии) [3].

Эту нашу идею, в частности, можно распространить на нагруженную задачу вида,

$$y'' + b_1 y' + b_2 y = y(t_1) isc_1'(A, a_1, t) + (y(t_2) - y(t_1)) isc_1'(A, a_2, t) + \dots$$
$$+ (y(t_n) - y(t_{n-1})) isc_1'(A, a_n, t) t \in [t_0, T], \forall A \in [0,1],$$
$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1 (b_1 b_2 - const) \quad ,$$
$$(t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 < \dots < a_n < t_n \le T)$$

либо на нагруженную задачу вида

$$y'' + b_1 y' + b_2 y = y(t_1) isc_1'(A, a_1 t) + \dots + (y(t_n) - y(t_{n-1})) isc_1'(A, a_n, t),$$
$$y(t_0) = y_0, y(T) = y_1 (t \in [t_0, T], A \in [0,1])$$
$$(t_0 < a_1 < t_1 < a_2 < t_2 < \dots < a_n < t_n < T).$$

Эти нагруженные задачи будут рассматриваться в наших следующих статьях.

Нагруженные интегральные уравнения

Рассмотрим нерегулярные нагруженные интегральные уравнения Вольтера первого и второго рода соответственно вида

$$\int_{t_0}^{t} K(t,s)y(s)ds = f(t)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1,t)+(y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,t)+...$$

$$+(y^2(t_n)-y^2(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,t)], t\in[t_0,T], \forall A\in[0,1]$$

$$t_0<a_1<t_1<a_2<t_2<...<a_n<t_n\le T, f(t)\in C^1{}_{[t_0,T]},$$

$K(t,t)\neq 0,\quad \forall t\in[t_0,T].\quad K_t^i(t,s)$ - непрерывная функция.

$$y(t)+\int_{t_0}^{t} K(t,s)y(s)ds = f(t)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1t)+(y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,t)+$$

$$...+(y^2(t_n)-y^2(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,t)], t\in[t_0,T], \forall A\in[0,1],$$ непрерывные функции $f(t)$ и $K(t,s)$

Непрерывное решение нагруженного уравнения Вольтера второго рода посредством резольвенты можно написать так:

$$y = f(t)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1,t)+(y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,t)+...$$

$$+(y^2(t_n)-y^2(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,t)]+ \quad (12)$$

$$+\int_{t_0}^{t} R(t,s)f(s)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1,s)+(y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,s)+(y^2(t_n)-y^2(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,S)]ds$$

Теперь относительно нагрузки $y(t_1),y(t_2),...,y(t_n)$ имеем систему вида

$$y(t_1)=f(t_1)y^2(t_1)+\int_{t_0}^{t_1} R(t_1,s)y^2(t_1)f(s)isc_1'(A,a_1s)ds$$

$$y(t_2)=f(t_2)y^2(t_2)+\int_{t_0}^{t_2} R(t_2,s)f(s)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1,s)+(y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,s]ds$$

$$y(t_n)=f(t_n)y^2(t_n)+\int_{t_0}^{t_n} R(t_n,S)f(s)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1,S)+$$

$$[y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,s)+...+(y^2(t_n)-y^2(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,S]ds$$

Отсюда находим нагрузки $y(t_1),y(t_2),...,y(t_n)$.

$$y_1(t_1)=\frac{1}{f(t_1)+\int_{t_s}^{t_1} R(t_1,S)f(s)isc_1'(A,a_1,S)ds.}$$

Аналогично находим остальные нагрузки.

Подставляя значения нагрузки $y_1(t_1),y_1(t_2),...,y_1(t_n)$ в (12) имеем решение нагруженного уравнения Вольтера второго рода.

Итак, теорема доказана.

<u>Теорема 2.</u> Существуют нагрузки $y(t_1),y(t_2),...,y(t_n)$

$(t_0<a_1<t_1<a_2<t_2<...<a_n<t_n\le T)$ управляющие непрерывное решение нагруженного интегрального уравнения Вольтера второго рода

$$y+\int_{t_0}^{t} K(t,S)y(S)ds = f(t)[y^2(t_1)isc_1'(A,a_1,t)+(y^2(t_2)-y^2(t_1))isc_1'(A,a_2,t)+$$

$$+...+(y^2(t_n)-y^2(t_{n-1}))isc_1'(A,a_n,t), \forall A\in[0,1],$$

удовлетворяющее начальному условию $y(t_0)=0.$

$f(a_1)=f(a_2)=...=f(a_n)=0.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарипов С., Шарипов К.С. Основные теоремы дифференциального исчисления урчуктных (разрывных) функций //Вестник ИГУ, №9. –Каракол, 2003. –С.55-66.
2. Шарипов С., Шарипов К.С. Управление решением дифференциального и интегрального уравнения //Вестник ИГУ, №12. –Каракол, 2004. –С.159-163.
3. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. –М.:Наука, 1976.