УДК 517.947.537

А.Ж.Тогочуев

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДИАГОНАЛЬНОЙ МАТРИЦЕЙ

В работе рассматривается система дифференциальных уравнений с диагональной матрицей, доказывается существование и гладкость решений этой системы по всей действительной оси.

Пусть R_n n–мерное пространство Евклида. Обозначим через $H = R_n(R, R_n)$ евклидово пространство, полученное пополнением $C_0^\infty(R, R_n)$-множество финитных бесконечно гладких вектор-функций, определенных на $R = (-\infty, \infty)$ со значением в R_n по норме

$$\|f(x)\|_H = \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

соответствующий скалярному произведению

$$\left(f(x), g(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(x).$$

Рассмотрим систему линейных дифференциальных уравнений

$$\begin{array}{c} -y_1''' + (|x|+1)y_1 = f_1(x) \\ -y_2''' + (|x|+1)y_2 = f_2(x) \\ -------------- \\ -y_n''' + (|x|+1)y_n = f_n(x) \end{array} \qquad (1)$$

с диагональной матрицей

$$Q(x) = \begin{pmatrix} |x|+1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |x|+1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |x|+1 \end{pmatrix}$$

Основным результатом этой работы является доказательство существования и гладкости решений системы (1), определенной в бесконечном интервале $R = (-\infty, \infty)$.

Для доказательства этого утверждения введем обозначения:

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \dots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Тогда система (1) записывается в виде операторного уравнения

$$-y''' + Q(x)y = f(x) \qquad (2)$$

Рассматривая дифференциальное выражение

$$l[y] = -y''' + Q(x)y, \quad x \in R,$$

определенное на множестве $C_0^\infty(R, R_n)$, обозначим через L замыкание дифференциального выражения $l[y]$ в норме H.

В дальнейшем нам понадобится теорема из работы [3].

Теорема [3]. Пусть для самосопряженной операторной функции $Q(x), (x \in R)$

Выполняются следующие условия:

1. $(Q(x)f, f)_H \geq \delta(f, f)_H$, $f \in D$, $D = D(Q(x))$ - область определения операторов $Q(x), \delta > 0$.

2. $\sup\limits_{|x-y|\leq 2} \left\{ \left\| [Q(x) - Q(y)][Q(x) + \lambda E]^{-1} \right\|_H + \left\| [Q(y) - Q(x)][Q(y) + \lambda E]^{-1} \right\|_H \right\} \leq O(1), \lambda >> 1$

3. Для почти всех x оператор $Q(x)$ является обратным к вполне непрерывному оператору. Тогда оператор

$$L + \lambda E = -y''' + [Q(x) + \lambda E]y$$

имеет ограниченный обратный и оператор L разделим в пространстве H.

Определение. Оператор $Ly = -y''' + Q(x)y$ называется разделимым в пространстве H, если из того, что $y \in D(L)$, следует, что $y''' \in H$, где $D(\cdot)$-область определения оператора L.

Для доказательства нашего утверждения нам остается проверить условия 1-3 вышеприведенной теоремы.

Условие 1. Так как

$$Q(x)f = \begin{pmatrix} (|x|+1)f_1 \\ (|x|+1)f_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (|x|+1)f_n \end{pmatrix} = (|x|+1)\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \ldots \\ f_n \end{pmatrix} = (|x|+1)f \text{ , то}$$

$$(Q(x)f, f)_H = ((|x|+1)f, f)_H = (|x|+1)(f, f)_H \geq \delta(f, f)_H .$$

Условие 1 выполняется.

Для проверки условия 2 предварительно вычислим $[Q(x) + \lambda \mathrm{E}]^{-1}$.

Так как алгебраические дополнения диагональных элементов матрицы $Q(x) + \lambda \mathrm{E}$ равна $(|x| + \lambda + 1)^{n-1}$ и $det[Q(x) + \lambda E] = (|x| + \lambda + 1)^n$.

Поэтому

$$[Q(x) + \lambda E]^{-1} = \frac{1}{det[Q(x) + \lambda E]}\begin{pmatrix} (|x|+\lambda+1)^{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (|x|+\lambda+1)^{n-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & (|x|+\lambda+1)^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{(|x|+\lambda+1)^{n-1}}{(|x|+\lambda+1)^n}E = \frac{1}{|x|+\lambda+1}E.$$

Далее

$$Q(x) - Q(y) = \begin{pmatrix} |x|+1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |x|+1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |x|+1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |y|+1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |y|+1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |y|+1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} |x|-|y| & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & |x|-|y| & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & |x|-|y| \end{pmatrix} = (|x|-|y|)E.$$

Учитывая полученное, вычислим норму

$$\left\| \left[Q(x) - Q(y) \right] \left[Q(x) + \lambda E \right]^{-1} \right\|_H .$$

$$\left\| \left[Q(x) - Q(y) \right] \quad \left[Q(x) + \lambda E \right]^{-1} \right\| = \sqrt{\sum_n \left| \frac{|x| - |y|}{|x| + \lambda + 1} \right|^2} =$$

$$\sqrt{\left| \frac{|x| - |y|}{|x| + \lambda + 1} \right|^2 \sum_n 1} = \frac{|x| - |y|}{|x| + \lambda + 1} \sqrt{n} \le \frac{|x - y|}{\lambda} \sqrt{n} .$$

Отсюда

$$\sup_{|x-y| \le 2} \left\| \left[Q(x) - Q(y) \right] \left[Q(x) + \lambda E \right]^{-1} \right\|_H \le \frac{2\sqrt{n}}{\lambda} \le O(1) \text{ при } \lambda >> 1.$$

Второе слагаемое условия 2 оценивается аналогично. Условие 2 выполняется.

Далее, так как $det\ Q(x) = (|x| + 1)^n \neq 0$ и из конечномерности пространства R_n следует условие 3.

Матрица $Q(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы [3]. Тогда по этой же теореме оператор $L + \lambda E$ имеет ограниченный обратный, т.е. существуют решения $y = (L + \lambda E)^{-1} f$ уравнения (2) и оператор L разделим. Тогда по определению разделимости $y''' \in H$, т.е. решения системы (1) являются гладкими.

ЛИТЕРАТУРА

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. –М.:Наука,1969.
2. Ланкастер П. Теория матриц. –М.:Наука,1979.
3. Тогочуев А.Ж. Гладкость решений линейного дифференциального уравнения с операторным коэффициентом на бесконечном интервале. //Вестник ИГУ, -Каракол, 2000, №4, -стр.81-86.